

وزارة المعارف العمومية

كتاب الجبر الابتدائى

تأليف

هول ونايت

الجزء الأول

من الباب الأول الى الباب الحادى والثلاثين

ترجم الى العربية بأمر وزارة المعارف العمومية

مع تعديل بعض الأمثلة والتمارين بما يلائم حالة المدارس المصرية

المطبعة الأميرية بالقاهرة

١٩٢٥

محتويات

الجزء الأول من كتاب الجبر الابتدائى

بسم الله الرحمن الرحيم

كتاب الجبر الابتدائى

الجزء الأول

الباب الأوّل – تعاريف ، التعويض

بند ١ – الجبر كالحساب يبحث فيه عن الكميات ولكن بطريقة أعمّ لأن الكميات فى العمليات الحسابية تبين بأرقام ذات قيم محدودة لا تتغير . ولكن فى الجبر تبين الكميات برموز تعطى لها أى قيمة تراد وتلك الرموز هى حروف الهجاء ثم إن الحروف وإن لم تقيد بقيم مخصوصة إلا أن قيمتها فى العملية الواحدة تبقى واحدة لا تتغير

مثلا : إذا قيل لتكن ا = ١ فليس معناه أن ا = ١ دائما بل إنها تساويه فى العملية التى نكون مشتغلين بها . وفضلا عن ذلك لنا أن نستعمل هذه الرموز بدون وضع قيم مخصوصة لها وهذا فى الحقيقة من أهم ما يبحث فيه علم الجبر

ولنبدأ الآن بالتعاريف الجبرية مع العلم بأن العلامات + ، – ، × ، ÷ ، = تدل فى الجبر على ما تدل عليه من المعانى فى الحساب وأن كل الرموز الجبرية التى نستعملها الآن تدل على أعداد صحيحة فقط

بند ٢ – المقدار الجبرى هو مجموع رموز ويتكوّن من (حدّ) أو عدّة (حدود) منفصل بعضها عن بعض بالعلامتين + ، – أو باحداهما

(مثلا) ٧ ا + ٥ ب – ٣ ح – س + ٢ ص مقدار جبرى ذو خمسة حدود

(تنبيه) إذا لم يسبق الحدّ علامة يعتبر مسبوقا بالعلامة +

بند ٣ – المقدار الجبرى إما بسيط أو مركب . فالبسيط ما تركب من حدّ مثل ٥ ا والمركب ما تركب من حدّين فصاعدا . فاذا كان المقدار ذا حدّين سمى ذا الحدّين مثل ٣ ا – ٢ ب واذا كان ذا ثلاثة حدود سمى ذا ثلاثة الحدود مثل ٢ ا – ٣ ب + ح فاذا زاد على ذلك سمى كثير الحدود وقد يسمى المقدار البسيط مقدارا ذا حدّ واحد أيضا

بند ٤ — إذا ضربت كمية فى أخرى أو فى جملة كميات يسمى الناتج حاصل الضرب و يوجد اختلاف مهم بين الوضع الجبرى والوضع الحسابى فى الدلالة على الضرب . ففى الحساب يوضع حاصل ضرب ٢ ، ٣ هكذا ٢ × ٣ أما فى الجبر فيكتب حاصل ضرب ا فى ب بأحد الاوضاع الثلاثة ا × ب ، ا . ب ، ا ب والاخير أكثر شيوعا

(مثلا) إذا كانت ا = ٢ ، ب = ٣ فالوضع الجبرى

ا ب = ا × ب = ٢ × ٣ = ٦ ولكن الوضع الحسابى ٣٢ يدل على اثنين وثلاثين أى ٣ × ١٠ + ٢

بند ٥ — كل كمية من الكميات التى تدخل فى تكوين أى حاصل من حواصل الضرب تسمى عاملا من عوامل ذلك الحاصل فاذن ٥ ، ا ، ب عوامل الحاصل ٥ ا ب

بند ٦ — إذا كان احد عوامل المقدار الجبرى عددا سمى ذلك العدد معاملا أو مكررا للعوامل الأخرى ففى المثال السابق ٥ ا ب يسمى الرقم ٥ معاملا للعاملين ا ، ب إلا ان كلمة معامل قد تتجاوز العامل الرقمى فيحسن أحيانا أن تطلق على اى عامل آخر غير العامل الرقمى كما انه قد يحسن فى بعض الأحيان إطلاقها على أكثر من عامل واحد

ففى حاصل الضرب ٦ ا ب ح يمكن ان يقال إن ٦ ا معامل للكمية ب ح . وكل معامل ليس رقميا محضا يسمى معاملا حرفيا

(تنبيه) إذا كان المعامل ١ يهمل لفظا وكتابة فلا نقول واحد ب ولا نكتب ١ ب بل نكتب ونقرأ ب فقط

بند ٧ — إذا ضربت كمية فى نفسها مرة أو مرتين او أكثر فحاصل الضرب يسمى قوة لتلك الكمية وللدلالة عليها يوضع فوق الكمية مائلا جهة اليسار العدد الدال على عدد العوامل فتكون ا × ا القوة الثانية للكمية ا وتكتب هكذا $ا^{٢}$ وتكون ا × ا × ا القوة الثالثة للكمية ا وتكتب $ا^{٣}$ وهكذا الرقم الدال على قوة أى كمية يسمى أسا فاذن ٢ ، ٥ ، ٧ أسس $ت^{٢}$ ، $ت^{٥}$ ، $ت^{٧}$ على الترتيب

(ملاحظة) تقرا $ا^{٢}$ عادة ا تربيع ، $ا^{٣}$ ا تكعيب ، $ا^{٤}$ ا أس أربعة وهكذا واذا كان الأس ١ يهمل لفظا وكتابة فلا نكتب $ح^{١}$ ولا نقول ح أس واحد بل نكتب ونقول ح فقط

وعلى ذلك فالكميات ح ، ١ ح ، $ح^{١}$ ، ١ $ح^{١}$ تدل كلها على شىء واحد

بند ٨ — على المبتدئ أن يحذر من الخلط بين المعامل والأس

(مثال ١) ما الفرق فى المعنى بين ٣ ا ، $ا^{٣}$

الجواب ٣ ا معناه حاصل ضرب الكميتين ٣ ، ا إحداهما فى الاخرى

أما $ا^{٣}$ فمعناه القوة الثالثة للكمية ا أى حاصل ضرب الكميات ا ، ا ، ا بعضها فى بعض

فان كانت ا = ٤ كان ٣ ا = ٣ × ا = ٣ × ٤ = ١٢

و $ا^{٣}$ = ا × ا × ا = ٤ × ٤ × ٤ = ٦٤

(مثال ٢) إذا كانت ب = ٥ فما الفرق بين ٤ ب^{٢} ، ٢ ب^{٤}

الجواب ٤ ب^{٢} = ٤ × ب × ب = ٤ × ٥ × ٥ = ١٠٠

، ٢ ب^{٤} = ٢ × ب × ب × ب × ب = ٢ × ٥ × ٥ × ٥ × ٥ = ١٢٥٠

(مثال ٣) إذا كان ا = ٤ ، س = ١ فما قيمة ٥ س^{٥}

الجواب ٥ س^{٥} = ٥ × س × س × س × س × س

= ٥ × ١ × ١ × ١ × ١ = ٥

(ملاحظة) يجب ان يلاحظ المبتدئ أن كل قوة للواحد تساوى واحدا

من المعلوم أن حاصل الضرب فى الحساب لا يتغير بتغير موضع العوامل فمثلا ٣ × ٤ تدل على ٣ مكررة ٤ مرات ، ٤ × ٣ تدل على ٤ مكررة ٣ مرات والناتج فى كلتا الحالتين ١٢

وحينئذ يكون ٣ × ٤ = ٤ × ٣

وكذلك ٣ × ٤ × ٥ = ٤ × ٣ × ٥ = ٤ × ٥ × ٣

وهذه القاعدة عامّة مهما كان عدد العوامل

وكذلك ا ب ، ب ا معناهما حاصل ضرب كميتين تدل عليهما ا ، ب فقيمة حاصل الضرب واحدة فى كلتا الحالتين

وكذلك ا ب ح ، ا ح ب ، ب ا ح ، ب ح ا ، ح ا ب ، ح ب ا كلها تدل على شىء واحد لأن كلا منها عبارة عن حاصل ضرب الكميات الثلاث ا ، ب ، ح بعضها فى بعض فليس من الأمور الجوهرية حينئذ مراعاة اىّ ترتيب خاص فى كتابة عوامل أى كمية وإن كان المعتاد أن يراعى فى وضعها أن تكون على ترتيب حروف المعجم

إذا كان المعامل الكسرى أكبر من الواحد يبقى عادة على هيئة عدد كسرى

(مثلا) إذا كانت ا = ٦ ، س = ٧ ، ع = ٥ فما قيمة $\frac{١٣}{١٠}$ ا س ع

الجواب $\frac{١٣}{١٠}$ ا س ع = $\frac{١٣}{١٠}$ × ٦ × ٧ × ٥ = ٢٧٣

(تمارين ١)

إذا كانت ا = ٧ ، ب = ٢ ، ح = ١ ، س = ٥ ، ص = ٣ فما قيمة كل من المقادير الاتية

(١) ١٤ س	(٥) ٥ ب ص	(٩) ٦ ح^{٤}	(١٣) ٨ ب ح ص
(٢) س^{٣}	(٦) ب^{٥}	(١٠) ٤ ص^{٣}	(١٤) ٧ ص^{٢}
(٣) ١٣ س	(٧) ٣ ب^{٢}	(١١) ٧ ح^{٥}	(١٥) ٨ س^{٢}
(٤) ا^{٣}	(٨) ٢ س ا	(١٢) ٩ ب^{٤}	

إذا كانت ا = ٨ ، ب = ٥ ، ح = ٤ ، س = ١ ، ص = ٣ فما قيمة كل من المقادير الآتية

(١٦) ٩ س ص	(٢٠) $٧\,ص^{٤}$	(٢٤) $س^{ب}$	(٢٨) $ا^{ح}$
(١٧) $٨\,ب^{٣}$	(٢١) $ح^{س}$	(٢٥) $ص^{ب}$	(٢٩) $ح^{ص}$
(١٨) $٣\,س^{٥}$	(٢٢) $ب^{ص}$	(٢٦) $ا^{ص}$	(٣٠) ٦ ب س ص
(١٩) $س^{٨}$	(٢٣) $ص^{ح}$	(٢٧) $ب^{س}$	

إذا كانت ا = ٥ ، ب = ١ ، ح = ٦ ، س = ٤ فما قيمة كل من المقادير الآتية

(٣١) $\frac{٣}{٨}$ [illegible]^{٢}	(٣٤) $٢^{ح}$	(٣٧) $\frac{٧}{١٥}$ ا ح س	(٤٠) $\frac{س^{٥}}{٦٤}$
(٣٢) $\frac{١}{١٠}$ ا س	(٣٥) $٨^{ب}$	(٣٨) $\frac{١}{٨}$ ب ح س	
(٣٣) $٣^{س}$	(٣٦) $٧^{س}$	(٣٩) $\frac{٢}{٩}\,ح^{٣}$	

بند ١٠ — إذا تكررت الكميات المراد ضربها بعضها فى بعض يبين حاصل الضرب بالكيفية المبينة ببند ٧

فمثلا ا ا ب ب ب ب ح ء ء ء تكتب $ا^{٢}\,ب^{٤}\,ح\,ء^{٣}$

وبالعكس $٧\,ا^{٣}\,ح\,ء^{٢}$ عبارة عن ٧ × ا × ا × ا × ح × ء × ء

(مثال ١) إذا كانت س = ٥ ، ص = ٣ فما قيمة $٤\,س^{٢}\,ص^{٣}$

الجواب $٤\,س^{٢}\,ص^{٣} = ٤ \times ٥^{٢} \times ٣^{٣}$

$= ٤ \times ٢٥ \times ٢٧$

$= ٢٧٠٠$

(مثال ٢) إذا كانت ا = ٤ ، ب = ٩ ، س = ٦ فما قيمة $\frac{٨\,ب\,س^{٢}}{٢٧\,ا^{٣}}$

الجواب $\frac{٨\,ب\,س^{٢}}{٢٧\,ا^{٣}} = \frac{٨ \times ٩ \times ٦^{٢}}{٢٧ \times ٤^{٣}} = \frac{٨ \times ٩ \times ٣٦}{٢٧ \times ٦٤} = \frac{٣}{٢} = ١\frac{١}{٢}$

بند ١١ — إذا كان أحد عوامل حاصل الضرب يساوى صفرا فالحاصل جميعه يساوى صفرا مهما بلغت قيمة العوامل الأخرى ويسمى هذا العامل عاملا صفريا

فمثلا إذا كان س = صفرا فالكمية $ا\,ب^{٣}\,س\,ص^{٢}$ تحتوى على عامل صفرى وحينئذ تساوى صفرا مهما كانت قيمة ا ، ب ، ص

وإذا كانت ح = صفرا تكون $ح^{٣}$ = صفرا أيضا وحينئذ يكون $ا\,ب^{٢}\,ح^{٣}$ = صفرا مهما بلغت قيمة ا ، ب

(ملاحظة) كل قوة للصفر تساوى صفرا

(تمـارين ١ ب)

إذا كانت ا = ٧ ، ب = ٢ ، حـ = صفرا ، سـ = ٥ ، صـ = ٣
فما قيمة كل من المقادير الآتية

(١) ٤ ا سـ^{٢}	(٤) ٣ سـ صـ	(٧) $\frac{٢}{٥}$ سـ صـ^{٤}	(١٠) ٨ سـ صـ
(٢) ا^{٣} ب	(٥) $\frac{٣}{٤}$ ب^{٢} سـ	(٨) ا^{٣} حـ	(١١) $\frac{٧}{٢٠}$ ا ب^{٣} سـ
(٣) ٨ ب^{٢} صـ	(٦) $\frac{٥}{٦}$ ب^{٣} صـ^{٢}	(٩) ا حـ صـ	(١٢) $\frac{١}{٩}$ سـ^{٢} صـ^{٤}

إذا كانت ا = ٢ ، ب = ٣ ، حـ = ١ ، ل = صفرا ، م = ٤ ، ر = ٦ فما
قيمة كل من المقادير الآتية

(١٣) $\frac{٣ ا^{٢} ر}{٨ ب}$	(١٧) ٣ ا^{٢} ب حـ	(٢١) $\frac{٢ ا^{٢} ل}{٧ ر}$	(٢٥) $\frac{٥ ا^{ر} ب^{م}}{٦٤ ر^{ا}}$
(١٤) $\frac{٨ ا ب^{٢}}{٩ م^{٢}}$	(١٨) $\frac{٥}{٦}$ ب ا^{ر}	(٢٢) ٣^{ا} × ٢^{ب}	(٢٦) $\frac{٢٧ ا^{م}}{٣٢}$
(١٥) $\frac{٦ ا^{٣} حـ}{ب^{٢}}$	(١٩) $\frac{٨ ب^{م}}{٩ ا^{ر}}$	(٢٣) ٢^{ر} × ا^{م}	(٢٧) $\frac{٦٤}{م^{ر}}$
(١٦) $\frac{٤ حـ ر^{٢}}{٩ ا^{٣}}$	(٢٠) ٥ ا^{ب} حـ^{ر}	(٢٤) حـ^{ب} ب^{م}	(٢٨) $\frac{ب^{ر}}{ب^{ر}}$

بند ١٢ — تعـريف : الجـذر التربيعى لأى مقـدار جبرى هو الكميـة التى يساوى مربعها أى قوتها الثانية ذلك المقدار فمثلا ٩ = الجذر التربيعى للعدد ٨١ لأن ٩^{٢} = ٨١

والعلامة $\sqrt{\ }$ تسمى علامة الجذر

يكتب الجذر التربيعى للكمية ب هكذا $\sqrt[٢]{ب}$ أو $\sqrt{ب}$ والصورة الثانيـة أبسـط من الأولى فهى أكثر شيوعا

وعلى هذا النحو نقول إن الجذر التكعيبى والرابع والخامس إلخ لأى مقدار جبرى هو الكميـة التى تساوى قوتها الثالثة أو الرابعة أو الخامسة إلخ ذلك المقدار الجبرى

وتبين تلك الجذور بالعلامات $\sqrt[٣]{\ }$ $\sqrt[٤]{\ }$ $\sqrt[٥]{\ }$ وهكذا على الترتيب

فمثـلا : $\sqrt[٣]{٢٧}$ = ٣ لأن ٣^{٣} = ٢٧ ، $\sqrt[٥]{٣٢}$ = ٢ لأن ٢^{٥} = ٣٢

(مثـال ١) ماقيمة ٥ $\sqrt{٦ ا^{٣} ب^{٤} حـ}$ حينما تكون ا = ٣ ، ب = ١ ، حـ = ٨

الجواب ٥ $\sqrt{٦ ا^{٣} ب^{٤} حـ}$ = ٥ × $\sqrt{٦ × ٣^{٣} × ١^{٤} × ٨}$

= ٥ × $\sqrt{٦ × ٢٧ × ٨}$

= ٥ $\sqrt{١٢٩٦}$ = ٥ × ٣٦ = ١٨٠

(مثال ٢) ما قيمة $\sqrt[3]{\frac{\text{ا ب}^{٤}}{\text{٨ س}^{٣}}}$ حينما تكون ا = ٩ ، ب = ٣ ، س = ٥

الجواب $\sqrt[3]{\frac{\text{ا ب}^{٤}}{\text{٨ س}^{٣}}} = \sqrt[3]{\frac{٩ \times ٣^{٤}}{٨ \times ٥^{٣}}} = \sqrt[3]{\frac{٩ \times ٨١}{٨ \times ١٢٥}}$

$= \sqrt[3]{\frac{٩ \times ٩ \times ٩}{١٠٠٠}} = \frac{٩}{١٠}$

(تمارين ١ ح)

إذا كانت ا = ٨ ، ح = صفرا ، ب = ٩ ، س = ٤ ، ص = ١ فما قيمة كل من المقادير الآتية

(١) $\sqrt{\text{٢ ا}}$

(٢) $\sqrt{\text{ب س}}$

(٣) $\sqrt{\text{٢ ا س}}$

(٤) $\sqrt{\text{٢ ا ب}^{٢}}$

(٥) $\sqrt[3]{\text{٣ ب}}$

(٦) $\sqrt[3]{\text{ا س}^{٣}}$

(٧) $\sqrt[3]{\text{٨ س}^{٣}\text{ ص}^{٣}}$

(٨) $\sqrt[3]{\text{ح ص}^{٥}}$

(٩) ٢ س $\sqrt{\text{٢ ا ص}}$

(١٠) ٥ ص $\sqrt{\text{٤ ب س}}$

(١١) ٣ ح $\sqrt{\text{ب س}}$

(١٢) ٢ س ص $\sqrt{\text{٤ ص}^{٥}}$

(١٣) $\sqrt{\frac{\text{٨ س}^{٣}}{\text{ا ب}}}$

(١٤) $\sqrt{\frac{\text{٢٥ ا}}{\text{٢ ب}}}$

(١٥) $\sqrt{\frac{\text{١٦ س}}{\text{٤٩ ص}^{٣}}}$

(١٦) $\sqrt{\frac{\text{ح ا}^{٢}}{\text{١٦ ب}}}$

(١٧) $\sqrt[3]{\frac{\text{٣ ا}}{\text{ب}^{٢}}}$

(١٨) $\sqrt[3]{\frac{\text{ا س}^{٣}}{\text{٢٧ ص}^{٣}}}$

(١٩) $\sqrt[3]{\frac{\text{ح ا}}{\text{٣ ب}}}$

(٢٠) $\sqrt[3]{\frac{\text{ا}^{٢}\text{ ب}^{٢}}{\text{٣ س}^{٣}}}$

(٢١) $\sqrt{\frac{\text{ب ا س}^{٢}}{\text{١٨ ص}^{٣}}}$

بند ١٣ — إذا اشتمل المقدار الجبرى على أكثر من حدّ نجرى العمل فى كل حدّ على انفراده حسب القواعد السابقة ثم نستخرج القيمة العددية للمقدار كله باجراء العمل فى النواتج حسبما تستلزمه العلامات وإذا كان هناك أقواس ( ) تعتبر كل الحدود المحصورة بين كل قوسين كمية واحدة كما الحال فى الحساب

(مثال ١) إذا كانت ح = ٥ فما قيمة $\text{ح}^{٤} - \text{٤ ح} + \text{٢ ح}^{٣} - \text{٣ ح}^{٢}$

الجواب $\text{ح}^{٤} = ٥^{٤} = ٥ \times ٥ \times ٥ \times ٥ = ٦٢٥$

و $\text{٤ ح} = ٤ \times ٥ = ٢٠$

و $\text{٢ ح}^{٣} = ٢ \times ٥^{٣} = ٢ \times ٥ \times ٥ \times ٥ = ٢٥٠$

و $\text{٣ ح}^{٢} = ٣ \times ٥^{٢} = ٣ \times ٥ \times ٥ = ٧٥$

فالمقدار الجبرى كله إذن $= ٦٢٥ - ٢٠ + ٢٥٠ - ٧٥ = ٧٨٠$

(مثال ٢) إذا كانت ا = ٧ ، ب = ٣ ، حـ = ٢ فما قيمة $ا\,(ب + حـ)^{٢} - حـ\,(ا - ب)^{٣}$

لذلك نقول إن هذا المقدار $= ٧\,(٣ + ٢)^{٢} - ٢\,(٧ - ٣)^{٣} = ٧ \times ٥^{٢} - ٢ \times ٤^{٣}$

$= ١٧٥ - ١٢٨ = ٤٧$

(مثال ٣) إذا كانت ا = ٥ ، ب = ٣ ، حـ = ١ فما قيمة

$$ا^{٢} \cdot \frac{ا - ب}{ب + ٢حـ} - ب^{٢} \cdot \frac{ا - حـ}{(ا + حـ)^{٢}}$$

هذا المقدار $= ٥^{٢} \times \frac{٥ - ٣}{٣ + (٢ \times ١)} - ٣^{٢} \times \frac{٥ - ١}{(٥ + ١)^{٢}}$

$= ٢٥ \times \frac{٢}{٥} - ٩ \times \frac{٤}{٣٦}$

$= ١٠ - ١ = ٩$

بند ١٤ — سبق أننا قلنا فى بند ١١ إن كل حدّ يحتوى على عامل صفرى يساوى صفرا وكل حدّ من هذا القبيل يسمى حدّا صفريا

(مثال ١) إذا كانت ا = ٢ ، ب = صفرا ، س = ٥ ، ص = ٣

فما قيمة $٥ ا^{٣} - ا ب^{٢} + ٢ س^{٢} ص + ٣ ب س ص$

هذا المقدار $= (٥ \times ٢^{٣}) - ٠ + (٢ \times ٥^{٢} \times ٣) + ٠$

$= ٤٠ + ١٥٠ = ١٩٠$

ملاحظة : يلاحظ ان الحدّين الصفريين لا تأثير لهما فى قيمة المقدار

(مثال ٢) ما قيمة المقدار الجبرى $\frac{٣}{٥} س^{٢} - ا^{٢} ص + ٧ ا ب س - \frac{٥}{٢} ص$

إذا كانت ا = ٥ ، ب = ٠ ، س = ٧ ، ص = ١

$\frac{٣}{٥} س^{٢} - ا^{٢} ص + ٧ ا ب س - \frac{٥}{٢} ص = \frac{٣}{٥} \times ٧^{٢} - ٥^{٢} \times ١ + ٠ - \frac{٥}{٢} \times ١$

$= ٢٩ \frac{٢}{٥} - ٢٥ - ٢ \frac{١}{٢} = ١ \frac{٩}{١٠}$

(مثال ٣) ما قيمة المقدار الجبرى $س^{٢} - ١٠ س + ٢١$

(أولا) إذا كانت قيمة س صفرا و(ثانيا) إذا كانت قيمتها ٢ و(ثالثا) ٣ و(رابعا) ٧ و(خامسا) ٨

الأحسن هنا أن يرتب الحل كما هو مبين بالجدول الآتى

س	٠	٢	٣	٧	٨
$س^{٢}$	٠	٤	٩	٤٩	٦٤
١٠ س	٠	٢٠	٣٠	٧٠	٨٠
$س^{٢} - ١٠ س + ٢١$	٢١	٥	٠	٠	٥

فالأجوبة إذن ٢١ ، ٥ ، صفر ، صفر ، ٥

بند ١٥ — على الطالب أن يراعى القواعد الآتية فى حل التمارين الجبرية

(أولا) حسن الترتيب وإحكام الوضع فان ذلك يساعد كثيرا على صحة العمل

(ثانيا) لايجوز مطلقا استعمال علامة = إلا بين الكميات المتساوية فيجب الامتناع عن الغموض أو عدم الصحة فى استعمالها

(ثالثا) إذا لم تكن المقادير الجبرية قصيرة جدا يلزم وضع علامات التساوى بعضها تحت بعض أثناء السير فى العملية

(رابعا) يجب أن تبين كيفية التدرج فى إجراء العملية بحيث يظهر من العمل كيفية استنتاج كل شىء من الذى قبله ويحسن أحيانا أن يستعان على ذلك بكتابة شىء من الألفاظ التى تزيد فى وضوح المسألة وهذا أمر هام سنبينه بعد

(تمارين ١ د)

إذا كانت ا = ٢ ، ب = ٣ ، حـ = ١ ، د = صفرا فما القيمة العددية لكل من المقادير الآتية

(١) ١٦ + ٥ ب − ٨ حـ + ٩ د

(٢) ١٣ − ٤ ب + ٦ حـ + ٥ د

(٣) ١٥ + ٣ حـ − ٢ ب + ٦ د

(٤) ا ب + ب حـ + حـ ا − د ا

(٥) ١٦ ب − ٣ حـ د + ٢ د ا − ٥٠ حـ ب + ٢ د ب

(٦) ا ب حـ + ب حـ د + حـ د ا + د ا ب

(٧) ٣ ا ب حـ − ٢ ب حـ د + ٢ حـ د ا − ٤ د ا ب

(٨) ٢ ب حـ + ٣ حـ د − ٤ د ا + ٥ ا ب

(٩) ٣ ب حـ د + ٥ حـ د ا − ٧ د ا ب + ا ب حـ

(١٠) ا^{2} + ب^{2} + حـ^{2} + د^{2}

(١١) ٢ ا^{2} + ٣ ب^{3} − ٤ حـ^{4}

(١٢) ا^{4} + ب^{4} − حـ^{4}

إذا كانت ا = ١ ، ب = ٢ ، حـ = ٣ ، د = صفرا فما القيمة العددية لكل من المقادير الآتية

(١٣) ا^{3} + ب^{3} + حـ^{3} + د^{3}

(١٤) $\frac{1}{2}$ ب حـ^{2} − ا^{3} − ب^{3} − $\frac{3}{4}$ ا ب^{3} حـ

(١٥) ٣ ا ب حـ − ب^{2} حـ − ٦ ا^{3}

(١٦) ٢ ا^{2} + ٢ ب^{2} + ٢ حـ^{2} + ٢ د^{2} − ٢ ب حـ − ٢ حـ د − ٢ د ا − ٢ ا ب

(١٧) $ح + \frac{٤}{٥} ا د^{٤} - ٣ ا^{٣} + ب^{٢} د$

(١٨) $ا^{٢} + ٢ ب^{٢} + ٢ ح^{٢} + د^{٢} + ٢ ا ب + ٢ ب ح + \frac{٢}{٧} ح د$

(١٩) $٢ ح^{٢} + ٢ ا + ٢ ب^{٢} - ٤ ح ب + ٦ ا ب ح د$

(٢٠) $١٣ ا^{٢} + \frac{١١}{٩} ح + ٢٠ ا ب - ١٦ ا ح - ١٦ ب ح$

(٢١) $٦ ا ب - \frac{٤}{٣} ا ح^{٢} - ٢ ا + \frac{١}{٨} ب^{٤} - ٣ د + \frac{٤}{٩} ح^{١}$

(٢٢) $ا^{٢} - ح^{٢} + ب^{٢} - د^{٢} + ٢ ا ب - ٢ ح د$

(٢٣) $٢ ا ب - \frac{٣}{٤} ب^{٣} + ٣ ا ح - ٢ ح - د + \frac{٤}{١٥} ا د$

(٢٤) $١٢٥ ب^{٤} ح - ٩ د^{٥} + ٣ ا ب ح^{٢} د$

إذا كانت $ا = ٢$ ، $ب = ١$ ، $ح = ٣$ ، $س = ٤$ ، $ص = ٦$ ، $ع =$ صفرا

فما قيمة كل من المقادير الآتية

(٢٥) $ح^{٢} (ص - س) - ب^{٢} (ح - ١)$

(٢٦) $(٢ ا - ح) (س + ٢ ص - ع)$

(٢٧) $\frac{٢}{٣} (ح^{٢} - ع^{٢}) + \frac{٣}{٥} (ص^{٢} - س^{٢})$

(٢٨) $\frac{٤}{٩} (ح ص - ٢ ح^{٢}) + \frac{٣}{٧} (س ص - ب ح)$

(٢٩) $\frac{ا^{٢}}{د^{٢}} + \frac{ب^{٢}}{ا^{٢}} - \frac{٢ص}{س^{٢}}$

(٣٠) $\frac{ا^{٢}}{ب^{٢}} . ح^{٢} + \frac{ا^{٢}}{ب^{٢}} + ح^{٢}$

(٣١) $\frac{(ا + ص)^{٢}}{(س - ع)^{٣}} - \frac{٦ (ح^{٢} - ١)}{٧ (ا^{٢} + س)}$

(٣٢) $\frac{ا^{٢} - ب^{٢}}{ا^{٢} ب^{٢}} - \frac{(ا + ب + ع)}{(ب + ح - ع)^{٢}}$

(٣٣) $\frac{(ا + ب)^{٢}}{(ص - ح)^{٢}} - \frac{ا (ص - ع)}{ح (س + ع)}$

(٣٤) $\frac{(ا + ب + ح)^{٢}}{ح (ص - ع)} - \frac{٤ (ح - ا)^{٣}}{٣ (ا + ص)}$

(تمارين ١ هـ)

(١) إذا كانت قيمة $س$ على التعاقب صفرا ، ٣ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ فما قيم $س^{٢} - ٩ س + ٢٠$

(٢) إذا كانت قيمة $س$ على التعاقب صفرا ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ فما قيم $٣ + ٢ س + \frac{س^{٢}}{٤}$

(٣) بين أن المقدار $ص^{٢} - ١٥ ص + ٥٦$ يساوى صفرا إذا كانت $ص = ٧$ أو ٨ ثم أوجد قيمته إذا كانت $ص = ١٠$

(٤) إذا كانت قيمة سـ على التعاقب ٢ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ فما قيم المقدار $\frac{س^{٣}}{١٠٠} + \frac{س^{٢}}{١٠} + ٢ س$

(٥) بيّن أن المقدارين

٤ (ا − ب) + ٣ (ا + ب) ، ٥ (ا + ب) + ٢ (ا − ٣ ب) يتساويان إذا كانت ا = ١٠ ، ب = ٣ ثم قارن بين المقدارين إذا كانت ا = ٦ ، ب = صفرا

(٦) بيّن أن المقدار $س^{٣} − ٦ س^{٢} + ١١ س − ٦$ يساوى صفرا إذا كانت س = ١ أو ٢ أو ٣ ثم أوجد قيمة ذلك المقدار إذا كانت س = ١٠

(٧) بيّن أن المقدار $س^{٣} − ١٣ س^{٢} + ٤٤ س$ يساوى ٣٢ إذا كانت س = ١ أو ٤ أو ٨

(٨) بيّن أن $س^{٣} + ١٠ س$ يساوى $٧ س^{٢}$ إذا كانت س = صفرا أو ٢ أو ٥ ثم إذا فرضنا أن س = ٦ فأى المقدارين أكبر وما الفرق بينهما

(٩) إذا كانت س = ٣ ، ص = ٢ فبيّن أن

$٦ س^{٣} + ٧ س^{٢} ص − ص^{٣} = (٢ س + ص) (٣ س − ص) (س + ص)$

(١٠) ما قيمة المقدار $٤ س^{٢} + ٤ س − ٣$ إذا كانت س تساوى ٢ وما قيمته إذا كانت $س = \frac{١}{٢}$

(١١) بيّن أن ٤ س + ٤ س − ٣ يساوى ٩ (س + ٨) إذا كانت س = ٥

(١٢) بيّن أنه إذا كانت $س = \frac{١}{٣}$ أو $\frac{٣}{٢}$ فالمقدار $٦ س^{٣} − ١١ س^{٢} + ٣ س$ يساوى صفرا ثم أوجد قيمة هذا المقدار بالكسر العشرى إذا كانت $س = \frac{١}{١٠}$

(أمثلة للاعادة شفهيا)

(١) ما الفرق بين ٦٣ ، ٣ × ٦

(٢) ما معنى ٤٥ س ص ، ٥ × ٤ س ص وما القيمة العددية لكل من المقدارين إذا كانت س = ٤ ، ص = ٥

(٣) أى الكميتين أكبر ٢٤٥ أو ٥ × ٤ × ٢ وما الفرق بينهما

(٤) بيّن حاصل ضرب ط فى ل بثلاثة أوضاع مختلفة

(٥) خمسة أولاد مع كل منهم ك من الكرات فما مقدار ما معهم جميعا مبينا بالجبر و إذا كانت ك = ٢٥ كرة فما قيمة ذلك المقدار الرقمية

(٦) إذا قسم مقدار س من التفاح على ستة أولاد بالتساوى فما نصيب كل منهم مبينا بالجبر وما مقدار ذلك النصيب إذا كانت س = ٤٢

(٧) إذا وزع ٥٤ كتابا على حـ من الأولاد بالتساوى فما نصيب كل منهم مبينا بالجبر وما مقدار ذلك النصيب إذا كانت حـ = ٦

(٨) ما الفرق بين ضعف ٣ و مربع ٣

(٩) اكتب المقدارين الجبريين اللذين يساوى أحدهما ثلاثة أمثال ء والآخر مكعب ء وأوجد قيمة كل منهما إذا كانت ء = ٢

(١٠) ما الفرق بين أربعة أمثال سـ ، سـ أس اربعة وما قيمة كل منهما إذا كانت سـ = ٣

(١١) إذا أريد ضرب حـ فى سـ فبأى كيفية يبيّن ذلك جبريا وما حاصل الضرب إذا كانت حـ = ٧ ، سـ = ٣

(١٢) إذا أريد ضرب سـ من العوامل بعضها فى بعض وكان كل منها يساوى حـ فكيف يبيّن ذلك جبريا وما قيمة حاصل الضرب إذا كانت سـ = ٣ والعامل حـ = ٧

(١٣) يراد جمع ا ، ب ، حـ فبيّن ذلك بالجبر وأوجد حاصل الجمع إذا كانت ا = ٥ ، ب = ٧ ، حـ = ١١

(١٤) يراد طرح الكمية ر من الكمية سـ فبيّن ذلك بالجبر وأوجد باقى الطرح إذا كانت ر = ٢٧ ، سـ = ٤١

(١٥) لعب ولد بكرات (بليات) وكان معه سـ منها وربح ص فما مجموع ما معه بعد اللعب مبينا بالجبر وما مقدار ذلك بالعدد إذا كانت سـ = ٢٥ ، ص = ٩

(١٦) بعد أن ربح الولد (المذكور فى السؤال ١٥) ما ربح خسر ع من الكرات فما مقدار ما بقى معه مبينا بالجبر وما مقدار ذلك بالعدد إذا كانت ع = ١٧

(١٧) أخذ فلاح ء من الشياه للسوق وباع منها حـ فكم بقى منها مبينا بالجبر وما مقدار ذلك بالعدد إذا كانت ء = ٦٤ ، حـ = ٤٨

(١٨) أخذ فلاح هـ من الشياه للسوق وعاد بعدد منها مقداره ل فما مقدار ما باعه مبينا بالجبر وما مقدار ذلك بالعدد إذا كانت هـ = ٧٥ ، ل = ٣٢

(١٩) اكتب حاصل جمع وحاصل ضرب الكميات ا ، ب ، حـ وأوجد مقدار كل من الحاصلين بالعدد إذا كانت ا = ٥ ، ب = ٧ ، حـ = ٦

(٢٠) إذا مشيت صـ من الساعات وقطعت فى كل منها صـ من الكيلومترات فما طول المسافة التى قطعتها مبينا بالجبر وإذا كانت صـ = ٤ فما مقدار تلك المسافة بالعدد

الباب الثانى — الكميات السالبة وجمع الحدود المتشابهة

بند ١٦ — فى الأمثلة المتقدمة لم يكن حاصل جمع الحدود المسبوقة بعلامة — أكبر من حاصل جمع الحدود المسبوقة بعلامة + بمعنى أنه أمكن بيان نتيجة كل عملية بالوضع الحسابى ولكن قد تكون للعملية نتيجة مثل ٤ — ٩ فلا يمكن حينئذ إجراء عملية الطرح حسابيا ولكن يمكننا بواسطة الجبر فهم هذه النتيجة كما أنه يمكننا أيضا بواسطة هذا العلم أن نستعمل حدودا مسبوقة بعلامة — واقعة منفردة وأن نفهم ما تدل عليه فهما تاما

بند ١٧ — تسمى الكميات الجبرية المسبوقة بعلامة + موجبة والمسبوقة بعلامة — سالبة . فان لم تسبق الكمية علامة عدّت موجبة

وتستعمل هاتان العلامتان كثيرا للدلالة على معان خاصة للكميات التى تلحق بها كما سيظهر لك من الأمثلة الآتية

(مثال ١) إذا كسب تاجر ١٠٠ جنيه ثم خسر ٧٠ جنيها فنتيجة متاجرته أنه كسب ٣٠ جنيها أى أن + ١٠٠ جنيه — ٧٠ جنيها = + ٣٠ جنيها وهذه الكمية + ٣٠ جنيها تدل على أن التاجر زادت ثروته بمقدار ٣٠ جنيها ولكن إذا كان ربحه ٧٠ جنيها وخسارته ٧٠ جنيها تتكافأ الخسارة والربح أى أن + ٧٠ جنيها — ٧٠ جنيها = صفرا من الجنيهات فثروته بعد المتاجرة ثروته قبلها

أما إذا ربح أولا سبعين جنيها ثم خسر مائة جنيه فنتيجة متاجرته خسارة قدرها ثلاثون جنيها أى أن + ٧٠ جنيها — ١٠٠ جنيه = — ٣٠ جنيها وهذه الكمية — ٣٠ جنيها تدل على أن ثروة التاجر نقصت بمقدار ٣٠ جنيها أو أنه مدين بمبلغ ٣٠ جنيها ونستنتج مما سبق أن + ٣٠ جنيها ، — ٣٠ جنيها تدلان على كميتين متساويتين فى المقدار ولكن لكل منهما معنى خاصا بها تباين الأخرى فيه

(مثال ٢) إفرض أن رجلا ركب زورقا من نقطة معينة فى نهر النيل وسار به ٦٠ مترا ضدّ التيار ثم ارجعته قوة التيار ٤٠ مترا فموضعه بالنسبة للنقطة التى ابتدأ منها يتعين بواسطة المقدار + ٦٠ مترا — ٤٠ مترا = + ٢٠ مترا ، + ٢٠ مترا فى هذه الحالة تدل على أنه سار من النقطة التى ابتدأ منها ٢٠ مترا فى اتجاه مضادّ للتيار فلو أنه سار ٤٠ مترا من النقطة نفسها متجها ضدّ التيار أيضا ثم دفعه التيار القهقرى ٦٠ مترا فموضعه بالنسبة للنقطة التى ابتدأ منها يتعين بواسطة المقدار + ٤٠ مترا — ٦٠ مترا = — ٢٠ مترا ، — ٢٠ مترا فى هذه الحالة تدل أيضا على أنه على بعد عشرين مترا من النقطة التى ابتدأ منها ولكن فى اتجاه غير الاتجاه السابق فى الحالة الأولى أى فى اتجاه التيار

ونستنتج إذن أن — ٢٠ مترا تدل على مسافة تساوى + ٢٠ مترا فى المقدار غير أن الاتجاهين مختلفان

(مثال ٣) فى مقاييس الحرارة المئوية تدل + ١٥° على ١٥ درجة فوق درجة تجمد الماء و — ١٥° على ١٥ درجة تحت درجة تجمد الماء فالدلالة من حيث عدد الدرجات واحدة فى الحالتين ولكن المعنيين متباينان

فنستخلص من الأمثلة المتقدّمة أن + ٥ مثلا تدل على كمية أكبر من الصفر بخمس وحدات ، — ٥ تدل على كمية أقل من الصفر بخمس وحدات أيضا فالقيمة المطلقة للكميتين واحدة إلا أن المؤدّى فى إحداهما مباين له فى الأخرى

(تمارين ١٢)

(١) كسب تاجر ٢٠ جنيها ثم خسر ٤٢ جنيها ثم كسب ١٠ جنيهات فبين بالجبر نتيجة اتجاره

(٢) فريقان لعب كل منهما الكرة مع آخرين ١٦ مرة ففريق فاز ١٠ مرات وخسر ٦ مرات والآخر فاز ٧ مرات وخسر ٩ مرات بيّن نتيجة كل من الفريقين معتبرا فوز المرة بزائد واحد وهزيمة المرة بناقص واحد

(٣) انخفضت الحرارة بمقياس الحرارة المئوى إلى — ٨° فى الليل ثم صعدت فى النهار إلى + ١٢° فما الفرق بين الحالتين مقدّرا بالدرجات

(٤) ارتفعت الحرارة بمقياس الحرارة المئوى إلى ٩° نهارا ثم هبطت ١٥ درجة أثناء الليل . فما النهاية الصغرى التى وصلت إليها درجة الحرارة بالليل

(٥) زحفت قوقعة فى اتجاه رأسى من نقطة معينة على جدار فصعدت مترين ثم هبطت ٥ أمتار ثم أعادت الكرة فارتفعت مترين آخرين بيّن بالجبر موقعها الأخير بالنسبة للنقطة التى ابتدأت منها

(٦) أطلق كل من رجلين ٢٠ عيارا ناريا على هدف واتفقا على أن يكون للمصيب ٤ درجات فى كل إصابة وأن يخسر المخطئ ٣ درجات فى كل مرة فأصاب أحدهما المرمى ١٢ مرة والآخر ٨ مرات بيّن بالجبر ما نال كل منهما من الدرجات

(٧) لعب كل من المدارس الخديوية والتوفيقية والسعيدية الكرة ٢٠ مرة فى السنة ففازت الخديوية ٩ مرات وخسرت ٥ مرات وفازت التوفيقية ٦ مرات وخسرت ٨ مرات وفازت السعيدية ٩ مرات وخسرت ٩ مرات وتكافأت كل منها فى المرات الباقية رتب المدارس الثلاث بحسب مبلغ نجاح كل منها معتبرا فوز المرة بزائد واحد وهزيمة المرة بناقص واحد وضع أمام كل مدرسة نتيجتها فى اللعب كله مبينة بالوضع الجبرى

جمع الحدود المتشابهة

بند ١٨ — تعريف : إذا لم تختلف الحدود فى شىء مّا أو كان اختلافها محصورا فى المعامل الرقمى فقط سميت حدودا متشابهة وإلا فتسمى غير متشابهة

فعلى ذلك ٣ا ، ٧ا وكذلك ٥ $ا^{٢}$ ب ، ٢ $ا^{٢}$ ب وأيضا ٣ $ا^{٣}$ $ب^{٢}$ ، — ٤ $ا^{٣}$ $ب^{٢}$ أزواج من حدّين متشابهين أما ٤ا ، ٣ب وكذلك ٧ $ا^{٢}$ ، ٩ $ا^{٢}$ ب فزوجان من حدّين غير متشابهين

قواعد جمع الحدود المتشابهة هى

القاعدة الأولى : حاصل جمع جملة حدود متشابهة حد يشابهها

القاعدة الثانية : إذا كانت جميع الحدود موجبة تضم المعاملات

(مثلا) لايجاد قيمة ٨ ا + ٥ ا

نقول إن جمع ٨ ا ، ٥ ا معناه إضافة ٨ أشياء من نوع واحد إلى ٥ أشياء مشابهة لها أى من نوعها فالحاصل إذن ١٣ شيئا من النوع نفسه

(مثلا) ٨ أرطال + ٥ أرطال = ١٣ رطلا فاذن ٨ ا + ٥ ا = ١٣ ا

وعلى هذا النسق يكون ٨ ا + ٥ ا + ا + ٢ ا + ٦ ا = ٢٢ ا

القاعدة الثالثة : إذا كانت جميع الحدود سالبة تضم المعاملات عدديا وتوضع علامة ناقص قبل حاصل الجمع

(مثلا) لجمع — ٣ س ، — ٥ س ، — ٧ س ، — س

نقول إن المراد هنا التعبير بكمية سالبة واحدة عن مجموع أربع كميات سالبة متشابهة . فطرح ٣ أشياء ثم ٥ ثم ٧ ثم شيء واحد من النوع نفسه هو عين طرح ٣ + ٥ + ٧ + ١ أى ١٦ من هذه الأشياء نفسها دفعة واحدة

فاذن حاصل جمع — ٣ س ، — ٥ س ، — ٧ س ، — س هو — ١٦ س

القاعدة الرابعة : إذا لم تكن الحدود كلها متحدة العلامات تضم معاملات جميع الحدود الموجبة على حدة ومعاملات جميع الحدود السالبة على حدة والفرق بين المجموعين مسبوقا بعلامة أكبرهما هو معامل حاصل الجمع

(مثال ١) ما حاصل جمع ١٧ س ، — ٨ س

هذا المثال يمكن تفسيره هكذا : ربح رجل ١٧ جنيها ثم خسر ٨ جنيهات فالنتيجة أن الرجل ربح ٩ جنيهات لأن الفرق بين ١٧ ، ٨ هو ٩ والمكسب أى الكمية الموجبة أكبر من الخسارة أى الكمية السالبة فيكون حاصل جمع ١٧ س ، — ٨ س هو ٩ س

(مثال ٢) حاصل جمع — ١٧ س ، ٨ س هو — ٩ س

(مثال ٣) لايجاد حاصل جمع ٨ ب ، — ٩ ب ، — ب ، ٣ ب ، ٤ ب ، — ١١ ب ، ب

نقول إن مجموع معاملات الحدود الموجبة ١٦

ومجموع « « السالبة ٢١

فالفرق بين المجموعين ٥ والسالب الأكبر لحاصل الجمع المطلوب إذن — ٥ ب

وإذا وجدت عدّة كميات منفصلة بعضها عن بعض بالعلامتين + ، — تبقى قيمتها ثابتة مهما تغير ترتيبها

(مثلا) نتيجة أىّ اتجار تبقى ثابتة مهما تغير ترتيب الأرباح والخسائر التى لحقته

فلنا حينئذ أن نجمع الحدود ونطرحها على أى ترتيب نستحسنه وأحسن ترتيب عادة هو المبين بالقاعدة الرابعة ويسمى هذا العمل اختصار الحدود المتشابهة

بند ١٩ — حينما تتصل الكميات بعضها ببعض بالعلامتين + و — فما ينتج من اختصارها يسمى حاصل الجمع الجبرى

فمثلا ١١ ب — ٢٧ ب + ١٣ ب = — ٣ ب معناه أن حاصل الجمع الجبرى للقادير ١١ ب و — ٢٧ ب و ١٣ ب هو — ٣ ب

(ملاحظة) حاصل جمع كميتين متساويتين عدّا ومسبوقتين باشارتين متضادتين يساوى صفرا فمثلا حاصل جمع ٥ ب و — ٥ ب يساوى صفرا

(تمارين ٢ ب)

ما حاصل جمع كل من المقادير الآتية

(١) ٥ ا و ١٧ ا و ١١ ا و ١ ا و ٢٣ ا
(٢) ٤ س و س و ٣ س و ٧ س و ٩ س
(٣) ٧ ب و ١٠ ب و ١١ ب و ٩ ب و ٢ ب
(٤) ٦ ح و ٨ ح و ٢ ح و ١٥ ح و ١٩ ح و ١٠٠ ح و ح
(٥) — ٣ س و — ٥ س و — ١١ س و — ٧ س
(٦) — ٥ ب و — ٦ ب و — ١١ ب و — ١٨ ب
(٧) — ٣ ص و — ٧ ص و — ص و — ٢ ص و — ٤ ص
(٨) — ح و — ٢ ح و — ٥٠ ح و — ١٣ ح
(٩) — ١١ ب و — ٥ ب و — ٣ ب و — ب
(١٠) ٥ س و — س و — ٣ س و ٢ س و — س
(١١) ٢٦ ص و — ١١ ص و — ١٥ ص و ص و — ٣ ص و ٢ ص
(١٢) ٥ ب و — ٩ ب و — ٣ ب و ٢١ ب و — ٣٠ ب
(١٣) ٢ ه و — ٣ ه و ه و — ه و — ٥ ه و ٥ ه
(١٤) ٧ ص و — ١١ ص و ١٦ ص و — ٣ ص و — ٢ ص
(١٥) ٥ س و — ٧ س و — ٢ س و ٧ س و ٢ س و — ٥ س
(١٦) ٧ اب و — ٣ اب و — ٥ اب و ٢ اب و اب

ما قيمة كل من المقادير الآتية

(١٧) — ٩ س^{٢} + ١١ س^{٢} + ٣ س^{٢} — ٤ س^{٢} = — س^{٢}

(١٨) ٣ ا^{٢} س — ١٨ ا^{٢} س + ا^{٢} س = — ١٤ ا^{٢} س

(١٩) ٣ ا^{٣} — ٧ ا^{٣} — ٨ ا^{٣} + ٢ ا^{٣} — ١١ ا^{٣} = ١٢ ا^{٣}

(٢٠) ٤ س^{٣} — ٥ س^{٣} — ٨ س^{٣} — ٧ س^{٣} = — ١٦ س^{٣}

(٢١) ٤ ا^{٢} ب^{٢} — ا^{٢} ب^{٢} — ٧ ا^{٢} ب^{٢} + ٥ ا^{٢} ب^{٢} — ا^{٢} ب^{٢} صفر

(٢٢) — ٩ س^{٤} — ٤ س^{٤} — ١٢ س^{٤} + ١٣ س^{٤} — ٧ س^{٤} ١٩ س^{٤}

(٢٣) ٧ ا ب حـ ء — ١١ ا ب حـ ء — ٤١ ا ب حـ ء + ٢ ا ب حـ ء

(٢٤) $\frac{١}{٢}$ س — $\frac{١}{٣}$ س + س + $\frac{٢}{٣}$ س

(٢٥) $\frac{٣}{٢}$ ا + $\frac{٣}{٥}$ ا — $\frac{١}{٢}$ ا

(٢٦) — ٥ ب + $\frac{١}{٤}$ ب — $\frac{٣}{٢}$ ب + ٢ ب — $\frac{١}{٢}$ ب + $\frac{٧}{٤}$ ب

(٢٧) — $\frac{٥}{٣}$ س^{٢} — ٢ س^{٢} — $\frac{٢}{٣}$ س^{٢} + س^{٢} + $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + $\frac{١١}{٦}$ س^{٢}

(٢٨) — ا ب — $\frac{١}{٢}$ ا ب — $\frac{١}{٣}$ ا ب — $\frac{١}{٤}$ ا ب — $\frac{١}{٦}$ ا ب + ا ب + $\frac{٥}{١٢}$ ا ب

(٢٩) $\frac{٢}{٣}$ س — $\frac{٣}{٤}$ س + $\frac{٥}{٦}$ س — ٢ س + $\frac{١١}{٦}$ س — $\frac{١}{٣}$ س + س

(٣٠) — $\frac{٥}{٣}$ س^{٢} — $\frac{٣}{٤}$ س^{٢} — $\frac{٤}{٣}$ س^{٢} — $\frac{١}{٤}$ س^{٢} — س^{٢}

الباب الثالث — الأقواس البسيطة ، الجمع

بند ٢٠ — إذا ارتبطت جملة كميات حسابيـة بعلامتى + ، — لا يتغير الحاصل مهما بدلنا فى مواضع تلك الكميات . ويسرى هذا أيضا على الكميات الجبرية فالمقدار ا — ب + حـ يساوى المقدار ا + حـ — ب لأننا فى الحالة الأولى نطرح ب من ا ثم نضم حـ إلى البـاقى وفى الحالة الثانيـة نضم حـ إلى ا ثم نطرح ب من حاصـل الجمع فالنتيجة يجب أن تكون واحدة فى الحالتين وبالطريقـة عينها يمكننا أن نثبت صحة ما قلناه بالنسـبة لأىّ مقدار جبرى آخر وعلى ذلك يمكن أن نكتب حدود أى مقدار جبرىّ بأىّ ترتيب نشاء . فمثلا يمكننا كتابة ا — ب بالصورة — ب + ا وكلتا الصورتين واحدة فى القيمة

ولزيادة الايضاح نفرض (كما فى بند ١٧) أن ا تدل على مكسب قدره ا من الجنيهات ، — ب تدل على خسارة قدرها ب من الجنيهات فمن البديهى أنه يستوى تقديم مايدل على المكسب على ما يدل على الخسارة والعكس

بند ٢١ — القوسان ( ) يستعملان للدلالة على أن الحدود المحصورة بينهما تعتبر كمية واحدة وسنأتى فى الباب السابع بالشرح الوافى للأقواس واستعمالها . أما هنا فنقتصر على البسيط منها

٨ + (١٣ + ٥) معناه أن ١٣ ، ٥ تجمعان ويضم حاصل جمعهما إلى ٨ وواضح أنه من الممكن أن نضيف إلى الثمانية ١٣ ، ٥ كلا على انفراده أو مجموعهما بدون ان يحدث تغيرما فى النتيجة

فعلى هذا يكون ٨ + (١٣ + ٥) = ٨ + ١٣ + ٥ = ٢٦

وكذلك ا + (ب + حـ) معناه أن نضم إلى ا حاصل جمع ب ، حـ

فيكون ا + (ب + حـ) = ا + ب + حـ

وكذلك ٨ + (١٣ — ٥) معناه أن نضيف إلى ٨ فرق الخمسة من ١٣ فاذا أضفنا إلى الثمانية ١٣ كان الناتج أكبر من الحقيقة بمقدار ٥ فينبغى حينئذ أن نطرح ٥ من هذا الناتج للحصول على الناتج الحقيقى

فيكون ٨ + (١٣ — ٥) = ٨ + ١٣ — ٥ = ١٦

وكذلك ا + (ب — حـ) معناه أن نضم إلى ا فرق حـ من ب

فيكون ا + (ب — حـ) = ا + ب — حـ ... ... (١)

وأيضا ا + ب — حـ + (ء — هـ — و) = ا + ب — حـ + ء — هـ — و ... (٢)

وبالعكس ا + ب — حـ + ء — هـ — و

= ا + ب — حـ + (ء — هـ — و) ... ... (٣)

وأيضا ا — ب + حـ = ا + حـ — ب [بند ٢٠]

= حاصل جمع ا ، حـ — ب

= حاصل جمع ا ، — ب + حـ [بند ٢٠]

فاذن ا — ب + حـ = ا + (— ب + حـ) ... ... (٤)

وبالتأمل فى النتائج ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ نستنتج القاعدة الآتية

إذا سبقت علامة + مقدارا جبريا محصورا بين قوسين امكن إزالة القوسين أو رفعهما بلا تغيير فى المقدار

وبالعكس كل مقدار جبرى يمكن حصرى جزء منه بين قوسين مسبوق أولهما بعلامة + مع بقاء علامة كل حدّ واقع داخل القوسين على ما كانت عليه قبل الحصر

فاذن يمكن كتابة المقدار الجبرى ا — ب + حـ — ء + هـ بأى الطرق الآتية

ا + (— ب + حـ — ء + هـ)

، ا — ب + (حـ — ء + هـ)

، ا — ب + حـ + (— ء + هـ)

بند **٢٢** — المقدار الجبرى ا — (ب + ج) معناه أن نطرح من ا حاصل جمع ب ، ج وباقى الطرح لايتغير سواء طرحنا حاصل جمع ب ، ج من ا أو طرحنا أولا ب من ا ثم طرحنا ج من باقى الطرح

فاذن ا — (ب + ج) = ا — ب — ج

وأيضا ا — (ب — ج) معناه أن نطرح من ا مقدار زيادة ب على ج فاذا طرحنا ب كلها من ا يكون الناتج وهو ا — ب أقل من الحقيقة بمقدار ج فالحصول على باقى الطرح الحقيقى تجب إضافة ج الى ا — ب

فاذن ا — (ب — ج) = ا — ب + ج

وكذلك ا — ب — (ج — د — هـ) = ا — ب — ج + د + هـ

ومن ذلك نستنتج القاعدة الآتية

إذا سبقت علامة — مقدارا جبريا محصورا بين قوسين أمكن إزالة القوسين أو رفعهما على شرط أن تغير علامة كل حدّ كان محصورا بين القوسين

وبالعكس كل مقدار جبرى يمكن حصر أى جزء منه بين قوسين مسبوق أوّلهما بعلامة (—) مع تغيير علامة كل حدّ داخل بين القوسين

فاذن يمكن كتابة المقدار الجبرى ا — ب + ج + د — هـ بأى الطرق الآتية

ا — (+ ب — ج — د + هـ)

، ا — ب — (— ج — د + هـ)

، ا — ب + ج — (— د + هـ)

ومما سبق نستنتج ما يأتى

(أولا) عمليات الجمع والطرح تعمل على أى ترتيب كان

مثلا ا + ب — ج + د — هـ — و = ا — ج + ب + د — هـ — و

= ا — ج — و + د + ب — هـ

ويسمى هذا القانون بالقانون التبادلى للجمع والطرح

(ثانيا) يمكن وضع حدود أى مقدار جبرى من حيث ضم بعضها إلى بعض على أى كيفية كانت مثلا

ا + ب — ج + د — هـ — و = (ا + ب) — ج + (د — هـ) — و

= ا + (ب — ج) + (د — هـ) — و

= ا + ب — (ج — د) — (هـ + و)

ويسمى هذا القانون بقانون تنسيق الحدود للجمع والطرح

جمع الحدود غير المتشابهة

بند **٢٣** — رأينا فيما تقدّم أنه عند جمع عدّة حدود متشابهة يكون حاصل الجمع حدّا يشابه تلك الحدود اما إذا كانت الحدود غير متشابهة فلا يمكن اختصارها فمثلا لجمع ا ، ب نقول بما أنهما كميتان غير متشابهتين فكل ما يمكننا عمله أن نضع الكميتين مفصولتين إحداهما عن الاخرى بعلامة + ويقال إن حاصل جمعهما ا + ب

وعلى حسب قواعد رفع الأقواس نجد أن ا + (— ب) = ا — ب اى أن حاصل الجمع الجبرى للكميتين ا ، — ب يكتب هكذا ا — ب ومن هنا يتضح ان لكلمة حاصل جمع فى الجبر معنى أوسع من مدلولها فى الحساب ففى الحساب ا — ب لا معنى لها سوى طرح ب من ا أما فى الجبر فتعتبر إما عملية طرح كما فى الحساب أو عملية جمع كميتين إحداهما ا والأخرى — ب بقطع النظر عن كون ب أكبر أو أصغر من ا

(مثال ١) ما حاصل جمع ٣ا — ٥ب + ٢حـ ، ٢ا + ٣ب — ء ، — ٤ا + ٢ب

حاصل الجمع

= (٣ا — ٥ب + ٢حـ) + (٢ا + ٣ب — ء) + (— ٤ا + ٢ب)

= ٣ا — ٥ب + ٢حـ + ٢ا + ٣ب — ء — ٤ا + ٢ب

= ٣ا + ٢ا — ٤ا — ٥ب + ٣ب + ٢ب + ٢حـ — ء

= ا + ٢حـ — ء وذلك باختصار الحدود المتشابهة

ولكن يمكننا إجراء هذه العملية بطريقة أحسن من السابقة بمراعاة القاعدة الآتية

قاعدة : رتب المقادير الجبرية فى سطور بحيث يكون كل نوع من الحدود المتشابهة فى عمود رأسى ثم اجمع الاعمدة الرأسية مبتدئا من اليمين

٣ا	— ٥ب	+ ٢حـ	
٢ا	+ ٣ب		— ء
— ٤ا	+ ٢ب		
ا		+ ٢حـ	— ء

فحاصل الجمع الجبرى للعمود الأول ا وللثانى صفر اما الحدود المنفردة فى العمودين الثالث والرابع فتوضع فى الحاصل كما هى

(مثال ٢) اجمع — ٥اب + ٦ب حـ — ٧احـ ، ٨اب + ٣احـ — ٢اء ، — ٢اب + ٤احـ + ٥اء ، ب حـ — ٣اب + ٤اء

— ٥اب	+ ٦ب حـ	— ٧احـ	
٨اب		+ ٣احـ	— ٢اء
— ٢اب		+ ٤احـ	+ ٥اء
— ٣اب	+ ب حـ		+ ٤اء
— ٢اب	+ ٧ب حـ		+ ٧اء

يلزم هنا أيضا ترتيب المقادير حتى يصير كل نوع من الحدود المتشابهة فى عمود رأسى ثم جمع كل عمود على حدته

(تمارين ١٣)

أوجد حاصل جمع كل من المقادير الآتية

(١) ا + ٢ب − ٣حـ ، −٣ا + ب + ٢حـ ، ٢ا − ٣ب + حـ

(٢) ٣ا + ٢ب − حـ ، −ا + ٣ب + ٢حـ ، ٢ا − ب + ٣حـ

(٣) −٣س + ٢ص + ع ، س − ٣ص + ٢ع ، ٢س + ص − ٣ع

(٤) −س + ٢ص + ٣ع ، ٣س − ص + ٢ع ، ٢س + ٣ص − ع

(٥) ٤ا + ٣ب + ٥حـ ، −٢ا + ٣ب − ٨حـ ، ا − ب + حـ

(٦) −١٥ا − ١٩ب − ١٨حـ ، ١٤ا + ١٥ب + ٨حـ ، ا + ٥ب + ٩حـ

(٧) ٢٥ا − ١٥ب + حـ ، ١٣ا − ١٠ب + ٤حـ ، ا + ٢٠ب − حـ

(٨) −١٦ا − ١٠ب + ٥حـ ، ١٠ا + ٥ب + حـ ، ٦ا + ٥ب − حـ

(٩) ٥اس − ٧ب ص + حـ ع ، اس + ٢ب ص − حـ ع ، −٣اس + ٢ب ص + ٣حـ ع

(١٠) ٢٠ط + ك − م ، ط − ٢٠ك + م ، ط + ك − ٢٠م

(١١) −٥اب + ٦ب حـ − ٧حـ ا ، ٨اب − ٤ب حـ + ٣حـ ا ، −٢اب − ٢ب حـ + ٤حـ ا

(١٢) ١٥اب − ٢٧ب حـ − ٦حـ ا ، ١٤اب − ١٨ب حـ + ١٠حـ ا ، ٤٥ب حـ − ٣حـ ا − ٤٩اب

(١٣) ٥اب + ب حـ − ٣حـ ا ، اب − ب حـ + حـ ا ، − اب + ٢حـ ا + ب حـ

(١٤) ط ك + ك م − م ط ، − ط ك + ك م + م ط ، ط ك − ك م + م ط

(١٥) س + ص + ع ، ٢س + ٣ص − ٢ع ، ٣س − ٤ص + ع

(١٦) ٢ا − ٣ب + حـ ، ١٥ا − ٢١ب − ٨حـ ، ٢٤ب + ٧حـ + ٣ا

(١٧) ٤س ص − ٩ص ع + ٢ع س ، −٢٥س ص + ٢٤ص ع − ع س ، ٢٣س ص − ١٥ص ع + ع س

(١٨) ١٧اب − ١٣ب حـ + ٨حـ ا ، −٥اب + ٩ب حـ − ٧حـ ا ، −٧ب حـ − حـ ا + ٢اب

(١٩) ٤٧س − ٦٣ص + ع ، −٢٥س + ١٥ص − ٣ع ، −٢٢س + ١٥ع + ٤٨ص

(٢٠) −١٧ب − ٢حـ + ٢٣ا ، −٩ا + ١٥ب + ٧حـ ، −١٣ا + ٣ب − ٤حـ

ركن الحد ودرجته — القوى الصاعدة والقوى النازلة

بند ٢٤ — كل حرف من الحروف الداخلة فى تركيب حدّ يسمى ركنًا له ودرجة الحدّ عدد الحروف الداخلة فيه أى عدد أركانه

(مثلا) يسمى ا ب ح حدّا ذا ثلاثة أركان أو حدّا من الدرجة الثالثة ، ا $س^{٤}$ يسمى حدّا من الدرجة الخامسة أو حدّا ذا خمسة أركان

ولا دخل للعاملات الرقمية فى حساب درجة الحدّ وعدد أركانه فكل من ٨ $ا^{٢}$ $ب^{٥}$ ، $ا^{٢}$ $ب^{٥}$ حدّ من الدرجة السابعة

درجة المقدار الجبرى هى درجة الحدّ الذى تكون درجته أكبر من درجة غيره من الحدود المكوّن منها المقدار فدرجة المقدار $ا^{٤}$ − ٨ $ا^{٣}$ + ١٣ ا − ٥ هى الرابعة أما المقدار $ا^{٢}$ س − ٧ $ب^{٢}$ $س^{٢}$ فدرجته الخامسة ويحسن أحيانا أن نبين درجة المقدار بالنسبة لحرف واحد من الحروف الداخلة فيه مثلا ا $س^{٣}$ − ب $س^{٢}$ + ح س − ى يسمى مقدارا جبريا من الدرجة الثالثة بالنسبة إلى الحرف س

يسمى المقدار الجبرى المركب متجانسا إذا اتحدت حدوده فى الدرجة مثلا ٨ $ا^{٦}$ − $ا^{٤}$ $ب^{٢}$ + ١٩ ا $ب^{٥}$ مقدار متجانس من الدرجة السادسة

بند ٢٥ — القوى المختلفة لحرف واحد تكوّن حدودا غير متشابهة فلا يمكن اختصارها لحاصل جمع ٢ $س^{٣}$ ، ٣ $س^{٢}$ لا يمكن اختصاره فى حدّ بل يلزم أن يكتب هكذا ٢ $س^{٣}$ + ٣ $س^{٢}$ ويترك كما هو

وكذلك حاصل الجمع الجبرى للحدود ٥ $ا^{٢}$ $ب^{٢}$ ، − ٣ ا $ب^{٣}$ ، − $ب^{٤}$ هو ٥ $ا^{٢}$ $ب^{٢}$ − ٣ ا $ب^{٣}$ − $ب^{٤}$ ولا يقبل الاختصار ولا يتأتى وضعه بشكل أبسط من هذا

يحسن فى جمع عدة مقادير جبرية مركبة من حدود متحدة فى حرف ذى قوى مختلفة فيها أن ترتب تلك المقادير بالنسبة للقوى الصاعدة أو النازلة لذاك الحرف ولايضاح ذلك نأتى بالمثالين الآتيين

(مثال ١) اجمع ٣ $س^{٣}$ + ٧ + ٦ س − ٥ $س^{٢}$ ، ٢ $س^{٢}$ − ٨ − ٩ س ، ٤ س − ٢ $س^{٣}$ + ٣ $س^{٢}$ ، ٣ $س^{٣}$ − ٩ س − $س^{٢}$ ، س − $س^{٢}$ − $س^{٣}$ + ٤

٣ $س^{٣}$ − ٥ $س^{٢}$ + ٦ س + ٧
٢ $س^{٢}$ − ٩ س − ٨
− ٢ $س^{٣}$ + ٣ $س^{٢}$ + ٤ س
٣ $س^{٣}$ − $س^{٢}$ − ٩ س
− $س^{٣}$ − $س^{٢}$ + س + ٤

٣ $س^{٣}$ − ٢ $س^{٢}$ − ٧ س + ٣

فلكتابة أول مقدار نبدأ بالحدّ المشتمل على أكبر قوة للحرف س ثم الحدّ الذى يليه فى الدرجة بالنسبة لذلك الحرف عينه وهكذا إلى الحدّ الأخير الذى ليس فيه الحرف س أصلا . ثم نضع المقادير الجبرية الأخرى بالطريقة عينها بحيث يكون كل عمود عبارة عن الحدود المتحدة الحروف والأسس معا ى الحدود المتشابهة

(مثال ٢) اجمع ٣ ا ب^{٢} − ٢ ب^{٣} + ا^{٣} ، ٥ ا^{٢} ب − ا ب^{٢} − ٣ ا^{٣} ، ٨ ا^{٣} + ٥ ب^{٣} ، ٩ ا^{٢} ب − ٢ ا^{٣} + ا ب^{٢}

− ٢ ب^{٣} + ٣ ا ب^{٢} + ا^{٣}
− ا ب^{٢} + ٥ ا^{٢} ب − ٣ ا^{٣}
٥ ب^{٣} + ٨ ا^{٣}
ا ب^{٢} + ٩ ا^{٢} ب − ٢ ا^{٣}
٣ ب^{٣} + ٣ ا ب^{٢} + ١٤ ا^{٢} ب + ٤ ا^{٣}

يلاحظ هنا أن المقادير مكوّنة من قوى حرفين ا ، ب فترتب المقادير على حسب القوى النازلة للحرف ب والقوى الصاعدة للحرف ا

(تمارين ٣ ب)

ما حاصل جمع كل من المقادير الآتية

(١) ٢ ا ب + ٣ ا حـ + ٦ ا ب حـ ، − ٥ ا ب + ٢ ب حـ − ٥ ا ب حـ ، ٣ ا ب − ٢ ب حـ − ٣ حـ ا

(٢) ٢ س^{٢} − ٢ س ص + ٣ ص^{٢} ، ٤ ص^{٢} + ٥ س ص − ٢ س^{٢} ، س^{٢} − ٢ س ص − ٦ ص^{٢}

(٣) ٣ ا^{٢} − ٧ ا ب − ٤ ب^{٢} ، − ٦ ا^{٢} + ٩ ا ب − ٣ ب^{٢} ، ٤ ا^{٢} + ا ب + ٥ ب^{٢}

(٤) س^{٢} + س ص − ص^{٢} ، − ع^{٢} + ص ع + ص^{٢} ، − س^{٢} + س ع + ع^{٢}

(٥) − س^{٢} − ٣ س ص + ٣ ص^{٢} ، ٣ س^{٢} + ٤ س ص − ٥ ص^{٢} ، س^{٢} + س ص + ص^{٢}

(٦) س^{٣} − س^{٢} + س − ١ ، ٢ س^{٢} − ٢ س + ٢ ، − ٣ س^{٣} + ٥ س + ١

(٧) ٢ س^{٣} − س^{٢} − س ، ٤ س^{٣} + ٨ س^{٢} + ٧ س ، − ٦ س^{٣} − ٦ س^{٢} + س

(٨) ٩ س^{٢} − ٧ س + ٥ ، − ١٤ س^{٢} + ١٥ س − ٦ ، ٢٠ س^{٢} − ٤٠ س − ١٧

(٩) ١٠ س^{٣} + ٥ س + ٨ ، ٣ س^{٣} − ٤ س^{٢} − ٦ ، ٢ س^{٣} − ٢ س − ٣

(١٠) ا^{٣} − ا ب + ب حـ ، ا ب + ب^{٣} − حـ ا ، ا حـ − ب حـ + حـ^{٣}

(١١) ٥ ا^{٣} − ٣ حـ^{٣} + ء^{٣} ، ب^{٣} − ٢ ا^{٣} + ٣ ء^{٣} ، ٤ حـ^{٣} − ٢ ا^{٣} − ٣ ء^{٣}

(١٢) ٦ س^{٣} − ٢ س + ١ ، ٢ س^{٣} + س + ٦ ، س^{٣} − ٧ س^{٣} + ٢ س − ٤

(١٣) ا^{٣} − ا^{٢} + ٣ ا ، ٣ ا^{٣} + ٤ ا^{٢} + ٨ ا ، ٥ ا^{٣} − ٦ ا^{٢} − ١١ ا

(١٤) س^{٢} + ص^{٢} − ٢ س ص ، ٢ ع^{٢} − ٣ ص^{٢} − ٤ ص ع ، ٢ س^{٢} − ٢ ع^{٢} − ٣ س ع

(١٥) س^{٣} − ٢ ص^{٣} + س ، ص^{٣} − ٢ س^{٣} + ص ، س^{٢} + ٢ ص^{٢} − س + ص^{٣}

(١٦) س^{٣} + ٣ س^{٢} ص + ٣ س ص^{٢} ، − ٣ س^{٢} ص − ٦ س ص^{٢} − س^{٣} ، ٣ س^{٢} ص + ٤ س ص^{٢}

(١٧) ا^{٣} + ٥ ا ب^{٢} + ب^{٣} ، ب^{٣} − ١٠ ا ب^{٢} − ا^{٣} ، ٥ ا ب^{٢} − ٢ ب^{٣} + ٢ ا^{٢} ب

(١٨) س^{٥} − ٤ س^{٤} ص − ٥ س^{٣} ص^{٢} ، ٣ س^{٤} ص + ٢ س^{٣} ص^{٢} − ٦ س ص^{٤} ، ٣ س^{٣} ص^{٢} + ٦ س ص^{٤} − ص^{٥}

(١٩) ا^{٣} − ٤ ا^{٢} ب + ٦ ا ب حـ ، ا^{٢} ب − ١٠ ا ب حـ + حـ^{٣} ، ب^{٣} + ٣ ا^{٢} ب + ا ب حـ

(٢٠) س^{٣} − ٤ س^{٢} ص + ٦ س ص^{٢} ، ٢ س^{٢} ص − ٣ س ص^{٢} + ٢ ص^{٣} ، ص^{٣} + ٣ س^{٢} ص + ٤ س ص^{٢}

(٢١) $\frac{1}{2}$ ا − $\frac{1}{3}$ ب ، − ا + $\frac{2}{3}$ ب ، $\frac{3}{4}$ ا − ب

(٢٢) − $\frac{1}{3}$ ا − $\frac{1}{4}$ ب ، − $\frac{2}{3}$ ا + $\frac{3}{4}$ ب ، − ٢ ا − ب

(٢٣) − ٢ ا + $\frac{5}{2}$ حـ ، − $\frac{1}{3}$ ا − ٢ ب ، $\frac{8}{3}$ ب − ٣ حـ

(٢٤) − $\frac{13}{8}$ ا − $\frac{11}{4}$ حـ ، ٢ ا − ٣ ب ، $\frac{11}{5}$ ب − حـ

(٢٥) $\frac{2}{3}$ س^{٢} + $\frac{1}{3}$ س ص − $\frac{1}{4}$ ص^{٢} ، − س^{٢} − $\frac{2}{3}$ س ص + ٢ ص^{٢} ، $\frac{2}{3}$ س^{٢} − س ص − $\frac{5}{4}$ ص^{٢}

(٢٦) ٣ ا^{٢} − $\frac{2}{5}$ ا ب − $\frac{1}{2}$ ب^{٢} ، − $\frac{3}{2}$ ا^{٢} + ٢ ا ب − $\frac{2}{3}$ ب^{٢} ، − $\frac{2}{3}$ ا^{٢} − ا ب + ب^{٢}

(٢٧) $\frac{5}{8}$ س^{٢} − $\frac{1}{3}$ س ص + $\frac{3}{10}$ ص^{٢} ، − $\frac{3}{4}$ س^{٢} + $\frac{14}{15}$ س ص − ص^{٢} ، $\frac{1}{2}$ س^{٢} − س ص + $\frac{1}{5}$ ص^{٢}

(٢٨) − $\frac{3}{4}$ س^{٣} + ٥ ا س^{٢} − $\frac{5}{8}$ ا^{٢} س ، س^{٣} − $\frac{37}{8}$ ا س^{٢} + $\frac{1}{2}$ ا^{٢} س ، − $\frac{1}{2}$ س^{٣} + $\frac{3}{4}$ ا^{٢} س

(٢٩) $\frac{3}{8}$ س^{٢} − $\frac{5}{3}$ س ص − ٧ ص^{٢} ، $\frac{2}{3}$ س ص + $\frac{18}{5}$ ص^{٢} ، − $\frac{5}{8}$ س^{٢} + ٤ ص^{٢}

(٣٠) $\frac{1}{2}$ ا^{٣} − ٢ ا^{٢} ب − $\frac{3}{2}$ ب^{٣} ، $\frac{3}{2}$ ا^{٢} ب − $\frac{3}{4}$ ا ب^{٢} + ٢ ب^{٣} ، − $\frac{3}{2}$ ا^{٣} + ا ب^{٢} + $\frac{1}{2}$ ب^{٣}

الباب الرابع – الطرح

بند ٢٦ – شرحنا أبسط حالات الطرح فيما سبق تحت عنوان جمع الحدود المتشابهة التى بعضها سالب (راجع بند ١٨)

فمن المعلوم أن ٥ا – ٣ا = ٢ا

وأن ٣ا – ٧ا = – ٤ا

وأن – ٣ا – ٦ا = – ٩ا

وعلمنا أيضا من قاعدة رفع الأقواس (بند ٢٢)

أن ٣ا – (– ٨ا) = ٣ا + ٨ا
= ١١ا

وأن – ٣ا – (– ٨ا) = – ٣ا + ٨ا
= ٥ا

طرح الحدود غير المتشابهة

بند ٢٧ – يتبين من المثال الآتى عملية طرح الحدود غير المتشابهة

(مثال) اطرح ٣ا – ٢ب – ح من ٤ا – ٣ب + ٥ح

باقى الطرح = ٤ا – ٣ب + ٥ح – (٣ا – ٢ب – ح)
= ٤ا – ٣ب + ٥ح – ٣ا + ٢ب + ح
= ٤ا – ٣ا – ٣ب + ٢ب + ٥ح + ح
= ا – ب + ٦ح

يوضع المطروح بين قوسين مسبوق أولهما بعلامة – ثم يرفع القوسان وتضم الحدود المتشابهة بعضها إلى بعض بموجب القواعد المذكورة فى بند (١٨)

وأحسن من هذا أن نضع المطروح تحت المطروح منه بعد تغيير علامة كل حدّ فى المطروح ثم تجمع كما سبق فى مبحث الجمع هكذا

٤ا – ٣ب + ٥ح
– ٣ا + ٢ب + ح
―――――――――
ا – ب + ٦ح

نكتب الحدود المتشابهة فى عمود رأسى ثم نجمع كل عمود على حدته

قاعدة الطرح : تغير علامة كل حدّ فى المطروح ثم يجمع هو والمطروح منه

(ملاحظة) ليس من الضرورى أن يكون تغيير علامات حدود المطروح بالكتابة دائما بل يحسن تغييرها عقليا

(مثال ١) إطرح ٢ س^{٢} + ٨ س ص − ٧ ص^{٢} من ٥ س^{٢} + س ص

٥ س^{٢} + س ص

٢ س^{٢} + ٨ س ص − ٧ ص^{٢}

---

٣ س^{٢} − ٧ س ص + ٧ ص^{٢}

نبدأ من اليمين فنجمع عقليا ٥ س^{٢} و − ٢ س فحاصل جمعهما الجبرى ٣ س^{٢} وكذلك الحال فى العمود الثانى ويجب تغيير علامة الحدّ الأخير وهو − ٧ ص^{٢} قبل وضعه فى باقى الطرح

(مثال ٢) إطرح ٣ س^{٢} − ٢ س من ١ − س^{٣}

بما أن الحدود المشتملة على حرف واحد بقوى مختلفة حدود غير متشابهة فتوضع فى أعمدة مختلفة هكذا

− س^{٣} + ١

٣ س^{٢} − ٢ س

− س^{٣} − ٣ س^{٢} + ٢ س + ١

وبما أن المطروح خلو من الحدود فى العمودين الأول والأخير نضع فى الباقى حدى المطروح منه فى هذين العمودين بدون تغيير علامتيهما

أما حدا المطروح فى العمودين الثانى والثالث فيجب تغيير علامة كل منهما

وليس من الضرورى أن يبتدأ فى وضع حدود المطروح منه وإنما يحسن التبديل لكى يصير الباقى مرتبا على حسب القوى النازلة للحرف س

(تمارين ١٤)

إطرح

(١) ٤ أ − ٣ ب + ح من ٢ أ − ٣ ب − ح

(٢) أ − ٣ ب + ٥ ح من ٤ أ − ٨ ب + ح

(٣) ٢ س − ٨ ص + ع من ١٥ س + ١٠ ص − ١٨ ع

(٤) ١٥ أ − ٢٧ ب + ٨ ح من ١٠ أ + ٣ ب + ٤ ح

(٥) − ١٠ س − ١٤ ص + ١٥ ع من س − ص − ع

(٦) − ١١ أ ب + ٦ ح د من − ١٠ ب ح + أ ب − ٤ ح د

(٧) ٤ أ − ٣ ب + ١٥ ح من ٢٥ أ − ١٦ ب − ١٨ ح

(٨) − ١٦ س − ١٨ ص − ١٥ ع من − ٥ س + ٨ ص + ٧ ع

(٩) أ ب + ح د − أ ح − ب د من أ ب + ح د + أ ح + ب د

(١٠) − أ ب + ح د − أ ح + ب د من أ ب − ح د + أ ح − ب د

(١١) من ٣ ا ب + ٥ حـ د − ٤ ا حـ − ٦ ب د اطرح ٣ ا ب + ٦ حـ د − ٣ ا حـ − ٥ ب د

(١٢) من صـ ع − ع س + س صـ اطرح − س صـ + صـ ع − ع س

(١٣) من − ٢ س^{٣} − س^{٢} − ٣ س + ٢ اطرح س^{٣} − س + ١

(١٤) من − ٨ س^{٢} صـ + ١٥ س صـ^{٢} + ١٠ س صـ ع اطرح ٤ س^{٢} صـ − ٦ س صـ^{٢} − ٥ س صـ ع

(١٥) من $\frac{١}{٢}$ ا − ب + $\frac{١}{٣}$ حـ اطرح $\frac{١}{٣}$ ا + $\frac{١}{٢}$ ب − $\frac{١}{٢}$ حـ

(١٦) من $\frac{٣}{٤}$ س + صـ − ع اطرح $\frac{١}{٢}$ س − $\frac{١}{٢}$ صـ − $\frac{١}{٣}$ ع

(١٧) من − ا − ٣ ب اطرح $\frac{٣}{٢}$ ا + $\frac{١}{٣}$ ب − $\frac{١}{٢}$ حـ .

(١٨) من $\frac{١}{٢}$ س − $\frac{٣}{٧}$ صـ + $\frac{١}{١٠}$ ع اطرح − $\frac{١}{٢}$ س + $\frac{٤}{٧}$ صـ − $\frac{١}{١٠}$ ع

(١٩) من − $\frac{٢}{٣}$ س − $\frac{٣}{٥}$ صـ − ٥ ع اطرح $\frac{٢}{٣}$ س − $\frac{٣}{٥}$ صـ − $\frac{١١}{٣}$ ع

(٢٠) من − $\frac{١}{٢}$ س + $\frac{٢}{٣}$ صـ − $\frac{١}{٦}$ اطرح $\frac{١}{٣}$ س − $\frac{٣}{٢}$ صـ − $\frac{١}{٦}$

(تمارين ٤ ب)

(١) من ٣ س صـ − ٥ صـ ع + ٨ ع س اطرح − ٤ س صـ + ٢ صـ ع − ١٠ ع س

(٢) من − ٨ س^{٢} صـ^{٢} + ١٥ س^{٣} صـ + ١٣ س صـ^{٣} اطرح ٤ س^{٢} صـ^{٢} + ٧ س^{٣} صـ − ٨ س صـ^{٣}

(٣) من − ٨ + ٦ ا ب + ا^{٢} ب^{٢} اطرح ٤ − ٣ ا ب − ٥ ا^{٢} ب^{٢}

(٤) من ا^{٢} ب حـ + ب^{٢} حـ ا + حـ^{٢} ا ب اطرح ٣ ا^{٢} ب حـ − ٥ ب^{٢} حـ ا − ٤ حـ^{٢} ا ب

(٥) من − ٧ ا^{٢} ب + ٨ ا ب^{٢} + حـ د اطرح ٥ ا^{٢} ب − ٧ ا ب^{٢} + ٦ حـ د

(٦) من − ٨ س^{٢} صـ + ٥ س صـ^{٢} − س^{٢} صـ^{٢} اطرح ٨ س^{٢} صـ − ٥ س صـ^{٢} + س صـ

(٧) من ١٠ ا^{٢} ب^{٢} + ١٥ ا ب^{٢} + ٨ ا^{٢} ب اطرح − ١٠ ا^{٢} ب^{٢} + ١٥ ا ب^{٢} − ٨ ا^{٢} ب

(٨) من ٤ س^{٢} − ٣ س + ٢ اطرح − ٥ س^{٢} + ٦ س − ٧

(٩) من س^{٣} + ١١ س^{٢} + ٤ اطرح ٨ س^{٢} − ٥ س − ٣

(١٠) من − ٨ ا^{٢} س^{٢} + ٥ س^{٢} + ١٥ اطرح ٩ ا^{٢} س^{٢} − ٨ س^{٢} − ٥

إطرح

(١١) س^{٣} − س^{٢} + س + ١ من س^{٣} + س^{٢} − س + ١

(١٢) ٣ س صـ^{٢} − س^{٢} صـ + س^{٣} − صـ^{٣} من س^{٣} + ٣ س^{٢} صـ + ٣ س صـ^{٢} + صـ^{٣}

(١٣) ب^{٣} + ح^{٣} − ٢ ا ب ح من ا^{٣} + ب^{٣} − ٣ ا ب ح

(١٤) ٧ س ص^{٢} − ص^{٣} − ٣ س^{٢} ص + ٥ س^{٣} من ٨ س^{٣} + ٧ س^{٢} ص − ٣ س ص^{٢} − ص^{٣}

(١٥) س^{٤} + ٥ + س − ٣ س^{٣} من ٥ س^{٤} − ٨ س^{٣} − ٢ س^{٢} + ٧

(١٦) ا^{٣} + ب^{٣} + ح^{٣} − ٣ ا ب ح من ٧ ا ب ح − ٣ ا^{٣} + ٥ ب^{٣} − ح^{٣}

(١٧) ١ − س + س^{٥} − س^{٤} − س^{٣} من س^{٤} − ١ + س − س^{٢}

(١٨) ٧ ا^{٤} − ٨ ا^{٢} + ٣ ا^{٥} + ١ من ا^{٢} − ٥ ا^{٣} − ٧ + ٧ ا^{٥}

(١٩) ١٠ ا^{٢} ب + ٨ ا ب^{٢} − ٨ ا^{٣} ب^{٣} − ب^{٤} من ٥ ا^{٢} ب − ٦ ا ب^{٢} − ٧ ا^{٣} ب^{٣}

(٢٠) ا^{٣} − ب^{٣} + ٨ ا ب^{٢} − ٧ ا^{٢} ب من − ٨ ا ب^{٢} + ١٥ ا^{٢} ب + ب^{٣}

(٢١) من $\frac{١}{٢}$ س^{٢} − $\frac{١}{٣}$ س ص − $\frac{٣}{٢}$ ص^{٢} اطرح − $\frac{٣}{٢}$ س^{٢} + س ص − ص^{٢}

(٢٢) من $\frac{٢}{٣}$ ا^{٢} − $\frac{٥}{٢}$ ا − ١ اطرح − $\frac{٢}{٣}$ ا^{٢} + ا − $\frac{١}{٢}$

(٢٣) من $\frac{١}{٣}$ س^{٢} − $\frac{١}{٢}$ س + $\frac{١}{٦}$ اطرح $\frac{١}{٣}$ س − ١ + $\frac{١}{٢}$ س^{٢}

(٢٤) من $\frac{٣}{٨}$ س^{٢} − $\frac{٢}{٣}$ ا س اطرح $\frac{١}{٣}$ − $\frac{١}{٤}$ س^{٢} − $\frac{٥}{٦}$ ا س

(٢٥) من $\frac{٣}{٤}$ س^{٣} − $\frac{١}{٣}$ س ص^{٢} − ص^{٢} اطرح س^{٢} ص − $\frac{٥}{٦}$ ص^{٢} − $\frac{١}{٣}$ س ص^{٢}

(٢٦) من $\frac{١}{٨}$ ا^{٣} − ٢ ا س^{٢} − $\frac{١}{٣}$ ا^{٢} س اطرح $\frac{١}{٣}$ ا س + $\frac{١}{٤}$ ا^{٣} − $\frac{٣}{٢}$ ا س^{٢}

أسئلة متنوعة (١)

(١) إختصر

(١) ٤ س − ٢ س^{٢} − (٢ س − ٣ س^{٢})

(٢) ٣ ا − ٤ ب − (٣ ب + ا) − (٥ ا − ٨ ب)

(٢) ضم إلى حاصل جمع ٢ ا − ٣ ب − ٢ ح ، ٢ ب − ا + ٧ ح حاصل جمع ا − ٤ ح + ٧ ب ، ح − ٦ ب

(٣) إذا كانت س = ٣ ، ص = ٢ ، ع = صفرا فما قيمة

(١) س^{٢} + $\frac{٣}{٢}$ ص^{٣} − س ص ع^{٣}

(٢) $\frac{١}{٤}$ س^{٣} ص^{٤} + $\frac{٥ ع^{٢}}{٦}$

(٤) عرف الأس والمعامل — ما حاصل جمع الأسس والمعاملات كل على حدته فى المقادير الجبرية الاتية

٤ س^{٢} + ٣ س ، ٢ س^{٣} + س^{٢} ، س^{٢} + ٧ س

(٥) من ٥ سـ^{٣} + ٣ سـ – ١ اطرح حاصل جمع ٢ سـ – ٥ + ٧ سـ^{٢} ، ٣ سـ^{٢} + ٤ – ٢ سـ^{٣} + سـ .

(٦) اطرح ٣ أ – ٧ أ^{٣} + ٥ أ^{٢} من حاصل جمع ٢ + ٨ أ^{٢} – أ^{٣} ، ٢ أ^{٣} – ٣ أ^{٢} + أ – ٢

(٧) ما الفرق بين الحدود المتشابهة وغير المتشابهة وما الحدود المتشابهة فى المقدار الآتى

أ^{٣} – ٣ أب + ب^{٢} – ٢ أ^{٣} – أ^{٢} + ٣ ب^{٢} + ٥ أب + ٧ أ^{٢}

(٨) أكتب حاصل جمع سـ ، صـ ، ع بكل الكيفيات الممكنة

(٩) إطرح ٥ سـ^{٢} + ٣ سـ – ١ من ٢ سـ^{٣} وضم باقى الطرح إلى ٣ سـ^{٢} + ٣ سـ – ١

(١٠) إذا كان عدد الجنيهات التى أملكها + ١ فما معنى – ١ من الجنيهات

(١١) بيّن جبريا نتيجة نقص ٢ أ بمقدار مجموع ٣ ب ، ٥ حـ

(١٢) إذا كانت سـ = ١ ، صـ = ٢ ، ع = ٣ فما قيمة حاصل جمع ٥ سـ^{٢} – ٢ سـ^{٣} ع ، ٣ صـ^{٤} وما قيمة ٢ ع^{صـ} – ٣ صـ^{سـ} أيضا

(١٣) ضم حاصل جمع ٢ صـ – ٣ صـ^{٢} ، ١ – ٥ صـ^{٣} إلى باقى طرح ١ – ٢ صـ^{٢} + صـ من ٥ صـ^{٣}

(١٤) أذكر بعبارة واضحة السبب فى أن سـ – (صـ – ع) = سـ – صـ + ع

(١٥) إذا كانت سـ = ٤ ، صـ = ٣ ، ع = ٢ ، أ = صفرا فما قيمة

٣ سـ^{٢} – ٢ صـ ع – أ سـ + ٥ أ سـ^{٢} صـ

(١٦) إختصر ٢ أ – ب – (٣ أ – ٢ ب) + (٢ أ – ٣ ب) – (أ – ٢ ب)

(١٧) ما المجموع الجبرى للحدود المتشابهة فى المقدار الجبرى

٥ أ^{٣} – ٤ أ^{٢} ب + ب^{٣} + ٦ أ^{٣} ب + ٧ أ ب^{٢} – ٣ أ^{٢} ب + ٤ أ ب^{٣} + ٨ أ ب

(١٨) عمل تلميذ تمارين مقدارها سـ + صـ ووجد أن صـ – ٢ ع منها صحيحة فما عدد التمارين غير الصحيحة

(١٩) بيّن فى المقدار الجبرى ٣ أ^{٣} – ٧ أ^{٢} ب + ب^{٤} أعلى قوة وأدناها والحدود الموجبة ومعامل أ^{٢}

(٢٠) إطرح سـ – صـ^{٢} من ٣ سـ صـ – ٤ صـ^{٢} وضم الباقى إلى حاصل جمع

٤ سـ صـ – سـ^{٢} – ٣ صـ^{٢} ، ٢ سـ^{٢} + ٦ صـ^{٢}

(٢١) إذا كانت سـ = ١ ، صـ = ٣ ، ع = ٥ ، و = صفرا فما قيمة

√٣ سـ صـ + √٥ سـ ع + √٣ صـ و

(٢٢) ما معنى درجة الحد فى مقدار جبرى وما درجة الحد السالب فى المقدار الجبرى

٤ سـ^{٦} – ٣ سـ^{٥} أ^{٢} + ٩

(٢٣) اجمع ٥ أ − ٧ ب + ح على ٣ ب − ٩ أ واطرح حاصل الجمع من ح − ٤ ب

(٢٤) إذا كانت س = ٣ ، ص = ٤ ، ك = ٨ ، ن = ١٠

فما قيمة س ص ك + $\frac{٢ ص}{ك − ص}$ + ٢ ن

(٢٥) إذا كانت س تدل على السنة العاشرة بعد الميلاد فما معنى − ٣ س

(٢٦) ضم ٣ $س^{٢}$ − ٧ س + ٥ إلى ٢ $س^{٣}$ + ٥ س − ٣ وأنقص ٣ $س^{٢}$ + ٢ من حاصل الجمع

(٢٧) بيّن الحدود المتشابهة والحدود المتجانسة فى المقدار الجبرى الآتى ثم اذكر درجته

٤ $أ^{٢}$ $ب^{٣}$ − $ب^{٤}$ + ٣ $أ^{٣}$ $ب^{٢}$ + ٥ $ب^{٥}$ − أ $ب^{٣}$ س + ٢ $س^{٣}$ أ ب + أ ب $س^{٤}$ − أ $ب^{٣}$

(٢٨) بيّن جبريا مقدار زيادة حاصل جمع أ ، ب على باقى طرح ى من ح

(٢٩) رجل سار من نقطة ثابتة (و) فمشى ٢ أ − ب من الكيلومترات شمالا ثم مشى ٣ أ + ٢ ب من الكيلومترات جنوبا فما موضعه الأخير بالنسبة لنقطة و .

(٣٠) ما المقدار الجبرى الذى إذا أضيف إلى ٥ $س^{٢}$ − ٧ س + ٢ كان الناتج ٧ س − ١

الباب الخامس – الضرب

بند ٢٨ – الضرب فى الأصل معناه تكرار عملية الجمع

فمثلا ٣ × ٤ = ٣ مكررة ٤ مرات

= ٣ + ٣ + ٣ + ٣

ترى أن المضروب فيه فى هذا المثال يحتوى على أربع وحدات وأن عدد مرات تكرار الثلاثة هو عدد الوحدات الموجودة فى ٤ فكذلك أ × ب = أ مكررة مرات قدرها ب

= أ + أ + أ + ... وعدد الحدود = ب

وسبق لنا أيضا أن ٣ × ٤ = ٤ × ٣ ومن السهل إثبات أن أ × ب = ب × أ ما دام كل من أ ، ب رمزا لعدد صحيح موجب

بند ٢٩ – إذا لم يكن كل من المضروب والمضروب فيه عددا صحيحا موجبا يمكننا أن نعرّف الضرب بأنه عملية تجرى فى كمية بحيث لو أجريت فى الواحد لنتجت الكمية الأخرى ولبيان ذلك نمثل بضرب $\frac{٤}{٥} \times \frac{٣}{٧}$ فنقول لضرب $\frac{٤}{٥}$ فى $\frac{٣}{٧}$ نجرى فى الكمية $\frac{٤}{٥}$ العملية التى لو أجريناها فى الواحد لنتج $\frac{٣}{٧}$ أى نقسم $\frac{٤}{٥}$ إلى سبعة أجزاء متساوية ونأخذ ثلاثة منها فكل جزء من سبعة الأجزاء المتساوية يساوى $\frac{٤}{٥ \times ٧}$ ونتيجة أخذ ثلاثة منها تبين هكذا $\frac{٤ \times ٣}{٥ \times ٧}$

فاذن $\frac{٤}{٥} \times \frac{٣}{٧} = \frac{٤ \times ٣}{٥ \times ٧}$

ونرى على مقتضى بند ٢٨ أن $\frac{٣\times٤}{٧\times٥}=\frac{٤\times٣}{٥\times٧}=\frac{٣}{٧}\times\frac{٤}{٥}$

∴ $\frac{٤}{٥}\times\frac{٣}{٧}=\frac{٣}{٧}\times\frac{٤}{٥}$

نستنتج من ذلك أن حاصل الضرب لا يتغير بتغيير موضع العوامل سواء كانت تلك العوامل أعدادا صحيحة أو كسورا أى أن ا × ب = ب × ا سواء كان ا ، ب عددين صحيحين موجبين أو كسرين موجبين

على نحو ما تقدّم يتضح بسهولة أن

ا ب ح = ا × ب × ح

= (ا × ب) × ح = (ب × ا) × ح = ب ا ح

= ب × (ا × ح) = ب × ح × ا = ب ح ا

ومعنى كل ذلك أن عوامل أى حاصل ضرب يمكن وضعها بأى ترتيب مّا وهذا ما يعبر عنه بالقانون التبادلى للضرب

مثلا ٢ ا × ٣ ب × ح = ٢ × ٣ × ا × ب × ح = ٦ ا ب ح

بند ٣٠ — يمكن تنسيق عوامل أى حاصل ضرب بأى كيفية

مثلا ا ب ح د = ا × ب × ح × د

= (ا ب) × (ح د)

= ا × (ب ح) × د

= ا × (ب ح د)

وهذا ما يعبر عنه بقانون تنسيق عوامل الضرب

بند ٣١ — بما أن ا^{٣} = ا × ا × ا ، ا^{٥} = ا × ا × ا × ا × ا كما سبق بيانه فى تعريف القوّة

∴ ا^{٣} × ا^{٥} = ااا × ااااا = اااااااا = ا^{٨} = ا$^{٣+٥}$ أى أن أس الحرف فى حاصل الضرب هو مجموع أسسه فى عوامل حاصل الضرب ويسمى هذا القانون بقانون الأسس للضرب

وأيضا ٥ ا^{٢} = ٥ اا ، ٧ ا^{٣} = ٧ ااا

∴ ٥ ا^{٢} × ٧ ا^{٣} = ٥ × ٧ × ااااا = ٣٥ ا^{٥}

وفى حالة ما إذا كان المضروب والمضروب فيه يشتملان على عدّة حروف ذات قوى مختلفة يتبع فى عملية الضرب الطريقة السابقة

مثلا ٥ ا^{٣} ب^{٢} × ٨ ا^{٢} ب س^{٣} = ٥ ااا ب ب × ٨ اا ب س س س = ٤٠ ا^{٥} ب^{٣} س^{٣}

(ملاحظة) على المبتدئ أن يلاحظ أنه فى عملية الضرب هذه لا يمكن خلط قوى حرف بقوى حرف آخر فالمقدار الجبرى ٤٠ ا^{٥} د^{٣} س^{٣} لا يمكن وضعه بشكل أبسط

بند **٣٢** — قاعدة : لضرب مقدارين جبريين بسيطين أحدهما فى الآخر نضرب معامل أحدهما فى معامل الثانى ونجعل حاصل ضرب المعاملين معاملا لحاصل ضرب الحروف التى يكون أس كل منها مجموع أسسه فى المقدارين

وتجرى هذه القاعدة فى الأحوال التى يراد فيها ضرب أكثر من مقدارين جبريين

(مثال ١) ما حاصل ضرب $س^{٢}$ ، $س^{٣}$ ، $س^{٨}$

حاصل الضرب $= س^{٢} \times س^{٣} \times س^{٨} = س^{٢+٣} \times س^{٨} = س^{٢+٣+٨} = س^{١٣}$

حاصل ضرب ثلاثة مقادير أو أكثر بعضها فى بعض يسمى حاصل الضرب المتسلسل

(مثال ٢) ما حاصل الضرب المتسلسل للمقادير $٥ س^{٢} ص^{٣}$ ، $٨ ص^{٢} ع^{٥}$ ، $٣ س ع^{٤}$

الحاصل المطلوب $= ٥ س^{٢} ص^{٣} \times ٨ ص^{٢} ع^{٥} \times ٣ س ع$

$= ١٢٠ س^{٣} ص^{٥} ع^{٥}$

ضرب المقدار الجبرى المركب فى المقدار الجبرى البسيط

بند **٣٣** — نعلم من تعريف الضرب أن

$(ا + ب) م = م + م + م + \dots$ مكررة مرات عددها $(ا + ب)$

$= (م + م + م + \dots)$ مكررة مرات عددها (ا)

مضمومة إلى $(م + م + م + \dots)$ مكررة مرات عددها (ب)

$= ا م + ب م$ .... (١)

وكذا $(ا - ب) م = م + م + م + \dots$ مكررة مرات عددها $(ا - ب)$

$= (م + م + م + \dots)$ مكررة مرات عددها (ا)

مطروحا منها $(م + م + م + \dots)$ مكررة مرات عددها (ب)

$= ا م - ب م$ .... (٢)

وكذلك $(ا - ب + ح) م = ا م - ب م + ح م$

وينتج من ذلك أن حاصل ضرب أى مقدار جبرى مركب فى عامل واحد هو حاصل الجمع الجبرى للحواصل الجزئية الناتجة من ضرب كل حدّ من حدود المقدار المركب فى ذلك العامل وهذا مايسمى بقانون التوزيع للضرب

(ملاحظة) ينبغى أن يلاحظ أنه مفروض أن الكميات ا ، ب ، ح تدل على أعداد صحيحة موجبة وأن ا أكبر من ب

مثالان : (١) $٣ (٢ ا + ٣ ب - ٤ ح) = ٦ ا + ٩ ب - ١٢ ح$

(٢) $(٤ س^{٢} - ٧ ص - ٨ ع^{٣}) \times ٣ س ص^{٢} = ١٢ س^{٣} ص^{٢}$

$- ٢١ س ص^{٣} - ٢٤ س ص^{٢} ع^{٣}$

(تمارين ١٥)

أوجد قيمة كل من المقادير الآتية

(١) ٥ $س^{٢}$ × ٧ $س^{٥}$

(٢) ٤ $أ^{٣}$ × ٥ $أ^{٨}$

(٣) ٧ أ ب × ٨ $أ^{٣}$ $ب^{٢}$

(٤) ٦ س $ص^{٢}$ × ٥ $س^{٣}$

(٥) ٨ $أ^{٣}$ ب × $ب^{٥}$

(٦) ٢ أ ب حـ × ٣ أ $حـ^{٣}$

(٧) ٢ $أ^{٣}$ $ب^{٣}$ × ٢ $أ^{٣}$ $ب^{٣}$

(٨) ٥ $أ^{٢}$ ب × ٢ أ

(٩) ٤ أ $ب^{٣}$ × ٧ $أ^{٥}$

(١٠) ٥ $أ^{٤}$ $ب^{٣}$ × $س^{٢}$ ص

(١١) $س^{٣}$ $ص^{٣}$ × ٦ $أ^{٢}$ $س^{٤}$

(١٢) أ ب حـ × س ص ع

(١٣) ٣ $أ^{٤}$ $ب^{٧}$ $س^{٣}$ × ٥ $أ^{٣}$ ب س

(١٤) ٤ $أ^{٣}$ ب س × ٧ $ب^{٢}$ $س^{٤}$

(١٥) ٥ $أ^{٢}$ س × ٨ حـ س

(١٦) ٥ $س^{٣}$ $ص^{٣}$ × ٦ $أ^{٣}$ $س^{٣}$

(١٧) ٢ $س^{٢}$ ص × $س^{٥}$ $ص^{٧}$

(١٨) ٣ $أ^{٣}$ $س^{٤}$ $ص^{٧}$ × $أ^{٢}$ $س^{٥}$ $ص^{٩}$

(١٩) إضرب أ ب + ب حـ فى $أ^{٣}$ ب

(٢٠) « ٥ أ ب − ٧ ب س فى ٤ $أ^{٢}$ ب $س^{٣}$

(٢١) « ٥ س + ٣ ص فى ٢ $س^{٢}$

(٢٢) « $أ^{٢}$ + $ب^{٢}$ − حـ فى $أ^{٣}$ ب

(٢٣) « ب حـ + حـ أ − أ ب فى أ ب حـ

(٢٤) « ٥ $أ^{٢}$ + ٣ $ب^{٢}$ − ٢ $حـ^{٢}$ فى ٤ $أ^{٢}$ ب $حـ^{٣}$

(٢٥) إضرب ٥ $س^{٢}$ ص + س $ص^{٢}$ − ٧ $س^{٢}$ ص فى ٣ $س^{٣}$

(٢٦) « ٦ $س^{٣}$ − ٥ $س^{٢}$ ص + ٧ س $ص^{٢}$ فى ٨ $س^{٢}$ $ص^{٣}$

(٢٧) « ٦ $أ^{٣}$ ب حـ − ٧ أ $ب^{٢}$ $حـ^{٢}$ فى $أ^{٢}$ $ب^{٢}$

ضرب المقادير الجبرية المركبة بعضها فى بعض

بند ٣٤ — إذا وضعنا فى النتيجة ١ بند ٣٣ المقدار حـ + ء بدلا من م نجد أن

(أ + ب) (حـ + ء) = أ (حـ + ء) + ب (حـ + ء)

= (حـ + ء) أ + (حـ + ء) ب   (بند ٢٩)

= أ حـ + أ ء + ب حـ + ب ء .... (٣)

ونستنتج من النتيجة (٢) أن

(أ − ب) (حـ + ء) = أ (حـ + ء) − ب (حـ + ء)

= (حـ + ء) أ − (حـ + ء) ب

= أ حـ + أ ء − (ب حـ + ب ء)

= أ حـ + أ ء − ب حـ − ب ء .... (٤)

وكذا إذا وضعنا حـ ــ ى بدل م فى النتيجة (١)

نجد أن (ا + ب) (حـ ــ ى) = ا(حـ ــ ى) + ب (حـ ــ ى)

= (حـ ــ ى) ا + (حـ ــ ى) ب

= ا حـ ــ ا ى + ب حـ ــ ب ى ... ... (٥)

ونستنتج أيضا من النتيجة (٢) ان

(ا ــ ب) (حـ ــ ى) = ا(حـ ــ ى) ــ ب (حـ ــ ى)

= (حـ ــ ى) ا ــ (حـ ــ ى) ب

= ا حـ ــ ا ى ــ (ب حـ ــ ب ى)

= ا حـ ــ ا ى ــ ب حـ + ب ى ... ... (٦)

وبالتأمل فى الطرف الأيسر من النتيجة (٦) وكيف نتج كل حدّ من حدودها

نرى أن (+ ا) × (+ حـ) = + ا حـ

(ــ ب) × (ــ ى) = + ب ى

(ــ ب) × (+ حـ) = ــ ب حـ

(+ ا) × (ــ ى) = ــ ا ى

ومن الأمثلة المتقدّمة نستخلص قانون العلامات فى الضرب وهو

قانون العلامات

حاصل ضرب حدّين مسبوقين بعلامتين من نوع واحد موجب وحاصل ضرب حدّين مسبوقين بعلامتين مختلفتين سالب

بند ٣٥ ــ قد يلاقى المبتدئ بعض الصعوبة فى استعمال قانون العلامات سيما إذا كان المضروب فيه سالبا فلزيادة الايضاح نأتى بأمثلة حسابية يظهر منها معنى الضرب فى كمية سالبة

لضرب ٣ فى ــ ٤ يلزم ان نجرى فى ٣ العملية التى لو أجريناها فى الواحد لنتج ــ ٤ ومعلوم أن ــ ٤ تدل على أن الواحد كرر ٤ مرات وجعلت النتيجة سالبة . وإذن ٣ × (ــ ٤) تدل على أن ٣ كررت ٤ مرات وجعلت النتيجة سالبة و٣ مكررة ٤ مرات = + ١٢

∴ ٣ × (ــ ٤) = ــ ١٢

وكذا ــ ٣ × ــ ٤ تدل على أن ــ ٣ كررت ٤ مرات ثم غيرت العلامة

فالعملية الأولى تنتج ــ ١٢ والثانية تنتج + ١٢

فيكون (ــ ٣) × (ــ ٤) = + ١٢

ونستخلص من هذا أن الضرب فى كمية سالبة يجرى كما لو كان فى كمية موجبة ثم تغير علامة حاصل الضرب

كلمة فى الفرق بين الجبر الرمزى والجبر الحسابى

بند ٣٦ — الجبر الحسابى فرع من الجبر يبحث فيه عن الرموز والعمليات الميسور فهمها حسابيا . فاذا ابتدأنا بالتعاريف الحسابية المحضة تمكنا من إثبات بعض القوانين الاساسية للجبر الحسابى . أما فى الجبر الرمزى فنفرض أن هذه القوانين صحيحة فى جميع الاحوال وبناء على هذا الفرض نبحث عن المعانى التى تستلزمها تلك الرموز والعمليات التى لاتكون بعد ذلك مقيدة بمعان حسابية . وقد ثبتت النتائج المبينة فى البندين ٣٣ ، ٣٤ بواسطة التعاريف الحسابية التى تستلزم أن تكون الرموز دالة على أعداد صحيحة موجبة وأن تكون ا > ب ، ح > د ولكن بمقتضى قواعد الجبر الرمزى يفرض أن هذه النتائج صحيحة على وجه عام بلا شرط ولا قيد ثم يستخلص من هذا الفرض كل ما يمكن استخلاصه من المعانى الجبرية

فيمكننا من الآن فصاعدا أن نطبق قانون التوزيع وقاعدة العلامات على فرض ان الرموز المستعملة غير مقيدة بقيد ما (راجع الملاحظة الواردة ببند ٣٣)

بند ٣٧ — ولكى ترسخ فى ذهن الطالب القواعد التى سبق شرحها نورد هنا بعض أمثلة نضع فيها أعدادا سالبة بدل الرموز

(مثال ١) إذا كانت ا = — ٤ فما قيمة ا^{٣}

نقول إن ا^{٣} = (— ٤)^{٣} = (— ٤) (— ٤) (— ٤) = — ٦٤

وبتكرار تطبيق قانون العلامات يسهل علينا أن نستنتج أن القوى الفردية لكمية سالبة تكون سالبة وأن القوى الزوجية لكمية سالبة تكون موجبة

(مثال ٢) إذا كانت ا = — ١ ، ب = ٣ ، ح = — ٢ فما قيمة — ٣ ا^{٤} ب ح^{٣}

نقول إن — ٣ ا^{٤} ب ح^{٣} = — ٣ × (— ١)^{٤} × ٣ × (— ٢)^{٣}

= — ٣ × (+ ١) × ٣ × (— ٨)

= ٧٢

بما أن قوة (— ١) زوجية وقوة (— ٢) فردية نضع فى الحال قيمة كل منهما هكذا

(— ١)^{٤} = + ١ ، (— ٢)^{٣} = — ٨

(تمارين ٥ ب)

إذا كانت ا = — ٢ ، ب = ٣ ، ح = — ١ ، س = — ٥ ، ص = ٤ فما قيمة كل من المقادير الآتية

(١) ٣ ا^{٢} ب	(٣) — ٥ ح^{٣}	(٥) ٤ ح^{٣} ص
(٢) ٨ ا ب ح^{٢}	(٤) ١٦ ا ح^{٢}	(٦) ٣ ا^{٢} ح

(٧) — $ب^{٢} ح^{٢}$
(٨) ٣ $ا^{٣} ح^{٢}$
(٩) — ٧ $ا^{٣}$ ب ح
(١٠) — ٢ $ا^{٤}$ ب س
(١١) — ٤ $ا^{٢} ح^{٤}$

(١٢) ٣ $ح^{٣} س^{٣}$
(١٣) ٥ $ا^{٢} س^{٢}$
(١٤) — ٧ $ح^{٤}$ س ص
(١٥) — ٨ ا $س^{٣}$
(١٦) ٤ $ح^{٥} س^{٣}$

(١٧) — ٥ $ا^{٢} ب^{٢} ح^{٢}$
(١٨) — ٧ $ا^{٣} ص^{٣}$
(١٩) ٨ $ح^{٤} س^{٣}$
(٢٠) ٧ $ا^{٥} ح^{٤}$

إذا كانت ا = — ٤ ، ب = — ٣ ، ح = — ١ ، ر = ضفرا ، س = ٤ ، ص = ١ فما قيمة كل من المقادير الآتية

(٢١) ٣ $ا^{٢}$ + ب س — ٤ ح ص
(٢٢) ٢ ا $ب^{٢}$ — ٣ ب $ح^{٢}$ + ٢ ر س
(٢٣) ر $ا^{٢}$ — ٢ $ب^{٣}$ — ح $س^{٣}$

(٢٤) ٣ $ا^{٢} ص^{٣}$ — ٥ $ب^{٢}$ س — ٢ ح
(٢٥) ٢ $ا^{٣}$ — ٣ $ب^{٣}$ + ٧ ح $ص^{٤}$
(٢٦) ٣ $ب^{٢} ص^{٤}$ — ٤ $ب^{٢}$ ر — ٦ $ح^{٤}$ س

(٢٧) ٢ $\sqrt{ا ح}$ — ٣ $\sqrt{س ص}$ + $\sqrt{ب^{٢} ح^{٤}}$

(٢٨) ٣ $\sqrt{ا ح س}$ — ٢ $\sqrt{ب^{٢} ص}$ — ٦ $\sqrt{ح^{٢} ص}$

(٢٩) ٧ $\sqrt{ا^{٢} س}$ — ٣ $\sqrt{ب^{٤} ح^{٢}}$ + ٥ $\sqrt{ر^{٢} س}$

(٣٠) ٣ ح $\sqrt{٣ ب ح}$ — ٥ $\sqrt{٤ ح^{٢} ص}$ — ٢ ح ص $\sqrt{٣ ب ح^{٥}}$

بند ٣٨ — الأمثلة الآتية تبين قاعدة العلامات وقانون الأساس على وجه أوضح

(مثال ١) لضرب ٤ ا فى — ٣ ب

نقول إن حاصل الضرب سالب كما يؤخذ من قاعدة العلامات ومعلوم أن ٤ ا × ٣ ب = ١٢ ا ب

∴ ٤ ا × (— ٣ ب) = — ١٢ ا ب

(مثال ٢) لضرب — ٥ ا $ب^{٣}$ س فى — ا $ب^{٣}$ س

نقول إن القيمة المطلقة لحاصل الضرب هى ٥ $ا^{٢} ب^{٦} س^{٢}$ وعلى مقتضى قاعدة العلامات يجب أن يكون حاصل الضرب موجبا

∴ (— ٥ ا $ب^{٣}$ س) × (— ا $ب^{٣}$ س) = ٥ $ا^{٢} ب^{٦} س^{٢}$

(مثال ٣) ماحاصل الضرب المتسلسل للمقادير الجبرية ٣ $ا^{٢}$ ب ، — ٢ $ا^{٣} ب^{٢}$ ، — ا $ب^{٤}$

لذلك نقول إن ٣ $ا^{٢}$ ب × (— ٢ $ا^{٣} ب^{٢}$) = — ٦ $ا^{٥} ب^{٣}$

، (— ٦ $ا^{٥} ب^{٣}$) × (— ا $ب^{٤}$) = + ٦ $ا^{٦} ب^{٧}$ فحاصل الضرب الاخير إذن ٦ $ا^{٦}$ ب

يمكن وضع الجواب المطلوب على الفور لان ٣ $ا^{٢}$ ب × ٢ $ا^{٣} ب^{٢}$ × ا $ب^{٤}$ = ٦ $ا^{٦}$ ب وعلى حسب قاعدة العلامات يجب أن يكون حاصل الضرب المطلوب موجبا

(مثال ٤) لضرب $٦ ا^٣ - \frac{٥}{٣} ا^٢ ب - \frac{٤}{٥} ا ب^٢$ فى $- \frac{٣}{٤} ا ب^٢$

نقول إن الحاصل المطلوب هو حاصل الجمع الجبرى لحواصل الضرب الجزئية التى تتكون حسبما جاء ببند ٣٧ فيكون

$$(٦ ا^٣ - \frac{٥}{٣} ا^٢ ب - \frac{٤}{٥} ا ب^٢) \times (- \frac{٣}{٤} ا ب^٢) = - \frac{٩}{٢} ا^٤ ب^٢ + \frac{٥}{٤} ا^٣ ب^٣ + \frac{٣}{٥} ا^٢ ب^٤$$

(تمارين ٥ حـ)

إضرب

(١) ا س فى - ٣ ا س

(٢) - ٢ ا ب س فى - ١٧ ا ب س

(٣) $ا^٢ ب$ فى $- ا ب^٢$

(٤) $٦ س^٢ ص$ فى $- ١٠ س ص$

(٥) - ا ب حـ ى فى $- ٣ ا^٢ ب^٣ حـ^٤ ى$

(٦) س ص ع فى $- ٥ س^٢ ص^٣ ع$

(٧) ٣ س ص + ٤ ص ع فى - ١٢ س ص ع

(٨) ا ب - ب حـ فى $ا^٢ ب حـ^٢$

(٩) - س - ص - ع فى - ٣ س

(١٠) $ا^٢ - ب^٢ + حـ^٢$ فى ا ب حـ

(١١) - ا ب + ب حـ - حـ ا فى - ا ب حـ

(١٢) $- ٢ ا^٢ ب - ٤ ا ب^٢$ فى $- ٧ ا^٢ ب^٢$

(١٣) $٥ س^٢ ص - ٦ س ص^٢ + ٨ س^٢ ص^٢$ فى ٣ س ص

(١٤) $- ٧ س^٢ ص - ٥ س ص^٣$ فى $- ٨ س^٣ ص^٣$

(١٥) $- ٥ س ص^٢ ع + ٣ س ص ع^٢ - ٨ س^٢ ص ع$ فى س ص ع

(١٦) $٤ س^٢ ص^٢ ع^٢ - ٨ س ص ع$ فى $- ١٢ س^٣ ص ع^٢$

(١٧) $- ١٣ س ص^٢ - ١٥ س^٢ ص$ فى $- ٧ س^٣ ص^٣$

(١٨) $٨ س ص ع - ١٠ س^٣ ص ع^٣$ فى - س ص ع

(١٩) $ا ب حـ - ا^٢ ب حـ - ا ب^٢ حـ$ فى - ا ب حـ

(٢٠) $- ا^٢ ب حـ + ب^٢ حـ ا - حـ^٢ ا ب$ فى - ا ب

ماحاصل ضرب

(٢١) ٢ ا - ٣ ب + ٤ حـ فى $- \frac{٣}{٢} ا$

(٢٢) ٣ س - ٢ ص - ٤ فى $- \frac{٥}{٦} س$

(٢٣) $\frac{٢}{٣} ا - \frac{١}{٦} ب - حـ$ فى $\frac{٣}{٨} ا س$

(٢٤) $\frac{٦}{٧} ا^٢ س^٢ - \frac{٣}{٢} ا س^٣$ فى $- \frac{٧}{٣} ا^٣ س$

(٢٥) $- \frac{٥}{٣} ا^٢ س$ فى $- \frac{٣}{٢} ا^٢ + ا س - \frac{٣}{٥} س^٢$

(٢٦) $- \frac{٧}{٢} س ص$ فى $- ٣ س^٢ + \frac{٢}{٧} س ص$

(٢٧) $- \frac{٣}{٢} س^٣ ص^٢$ فى $- \frac{١}{٣} س^٢ + ٢ ص^٢$

(٢٨) $- \frac{٤}{٧} س^٥ ص^٣$ فى $\frac{٧}{٤} س^٢ - \frac{٤}{٧} ص^٢$

بند ٣٩ — ما قيل فى البند ٣٣ يسرى على الأحوال التى يكون فيها كل من المضروب والمضروب فيه مشتملا على أكثر من حدّ

مثلا (ا − ب + ح) م = ا م − ب م + ح م

فاذا وضعنا بدل م الكمية (س − ص) نجد أن

(ا − ب + ح) (س − ص) = ا (س − ص) − ب (س − ص) + ح (س − ص)

= (ا س − ا ص) − (ب س − ب ص) + (ح س − ح ص)

= ا س − ا ص − ب س + ب ص + ح س − ح ص

وبناء على ماتقدّم يمكننا أن نضع قاعدة ضرب المقدار الجبرى المركب فى مثله على الوجه الآتى

قاعدة : نضرب كل حدّ من حدود المضروب فى كل حدّ من حدود المضروب فيه . واذا كان الحدّان المضروبان مسبوقين بعلامتين متحدتين فعلامة حاصل ضربهما تكون + واذا كانت العلامتان مختلفتين فعلامة الحاصل تكون − وحاصل الجمع الجبرى لحواصل الضرب الجزئية الناتجة على هذه الكيفية هو حاصل الضرب المطلوب ويسمى هذا العمل فى الجبر توزيع الحاصل

بند ٤٠ — ينبغى ان يلاحظ أن أبسط شكل لحاصل ضرب المقدار ا + ب فى المقدار س − ص هو (ا + ب) (س − ص) والأقواس هنا تدل على ان (ا + ب) المعتبرة كمية واحدة تضرب فى (س − ص) المعتبرة كمية واحدة أيضا وعلى مقتضى القاعدة المتقدّمة حاصل ضرب (ا + ب) فى (س − ص) هو المجموع الجبرى للحواصل الجزئية + ا س ، + ب س ، − ا ص ، − ب ص وقد وضعت علامة كل حاصل بمراعاة ما جاء فى قانون العلامات

(مثال ١) لضرب س + ٨ فى س + ٧

نقول إن الحاصل = (س + ٨) (س + ٧)

= س^{2} + ٨ س + ٧ س + ٥٦

= س^{2} + ١٥ س + ٥٦

والأحسن أن ترتب العملية كما يأتى

س + ٨
س + ٧
―――――
س^{2} + ٨ س
+ ٧ س + ٥٦
―――――
س^{2} + ١٥ س + ٥٦

نبدأ من اليمين ونضع أول حاصل من حواصل الصف الثانى تحت الحدّ الثانى من الصف الأوّل لتكون الحدود المتشابهة فى عمود رأسى ثم نجمع الحدود المتشابهة

(مثـال ٢) لضرب ٢ س − ٣ ص فى ٤ س − ٧ ص تجرى العمل هكذا

٢ س − ٣ ص
٤ س − ٧ ص
---
٨ س^{٢} − ١٢ س ص
− ١٤ س ص + ٢١ ص^{٢}
---
٨ س^{٢} − ٢٦ س ص + ٢١ ص^{٢}

(تمـارين ٥ د)

ما حاصل ضرب

(١) س + ٥ ، س + ١٠
(٢) س + ٥ ، س − ٥
(٣) س − ٧ ، س − ١٠
(٤) س − ٧ ، س + ١٠
(٥) س + ٧ ، س − ١٠
(٦) س + ٧ ، س + ١٠
(٧) س + ٦ ، س − ٦
(٨) س + ٨ ، س − ٤
(٩) س − ١٢ ، س − ١
(١٠) س + ١٢ ، س − ١
(١١) س − ١٥ ، س + ١٥
(١٢) س − ١٥ ، − س + ٣
(١٣) − س − ٢ ، − س − ٣
(١٤) − س + ٧ ، س − ٧
(١٥) − س + ٥ ، − س − ٥
(١٦) س − ١٣ ، س + ١٤
(١٧) س − ١٧ ، س + ١٨
(١٨) س + ١٩ ، س − ٢٠
(١٩) − س − ١٦ ، − س + ١٦
(٢٠) − س + ٢١ ، س − ٢١
(٢١) ٢ س − ٣ ، س + ٨
(٢٢) ٢ س + ٣ ، س − ٨
(٢٣) س − ٥ ، ٢ س − ١
(٢٤) ٢ س − ٥ ، س − ١
(٢٥) ٣ س − ٥ ، ٢ س + ٧
(٢٦) ٣ س + ٥ ، ٢ س − ٧
(٢٧) ٥ س − ٦ ، ٢ س + ٣
(٢٨) ٥ س + ٦ ، ٢ س − ٣
(٢٩) ٣ س − ٥ ص ، ٣ س + ٥ ص
(٣٠) ٣ س − ٥ ص ، ٣ س − ٥ ص
(٣١) ا − ٢ ب ، ا + ٣ ب
(٣٢) ا − ٧ ب ، ا + ٨ ب
(٣٣) ٣ ا − ٦ ب ، ا − ٨ ب
(٣٤) ا − ٩ ب ، ا + ٥ ب
(٣٥) س + ا ، س − ب
(٣٦) س − ا ، س + ب
(٣٧) س − ٢ ا ، س + ٣ ب
(٣٨) ا س − ب ص ، ا س + ب ص
(٣٩) س ص − ا ب ، س ص + ا ب
(٤٠) ٢ ط ن − ٣ ر ، ٢ ط ن + ٣ ر

بند ٤١ — لنأت الآن بأمثلة أصعب من المتقدمة

(مثال ١) ما حاصل ضرب $٣ س^{٢} - ٢ س - ٥$ و $٢ س - ٥$

$$٣ س^{٢} - ٢ س - ٥$$
$$٢ س - ٥$$
$$٦ س^{٣} - ٤ س^{٢} - ١٠ س$$
$$- ١٥ س^{٢} + ١٠ س + ٢٥$$
$$٦ س^{٣} - ١٩ س^{٢} + ٢٥$$

يضرب كل حدّ من المقدار الأول فى ٢ س وهو أول حدّ من المقدار الثانى ثم يضرب كل حدّ من المقدار الأول فى — ٥ ويوضع كل نوع من الحدود المتشابهة فى عمود رأسى ثم تجمع النواتج

(مثال ٢) ما حاصل ضرب $ا - ب + ٣ ح$ و $ا + ٢ ب$

$$ا - ب + ٣ ح$$
$$ا + ٢ ب$$
$$ا^{٢} - ا ب + ٣ ا ح$$
$$٢ ا ب \qquad - ٢ ب^{٢} + ٦ ب ح$$
$$ا^{٢} + ا ب + ٣ ا ح - ٢ ب^{٢} + ٦ ب ح$$

بند ٤٢ — حينما تكون المعاملات كسورا نتبع فيها القاعدة المعتادة فى الضرب ثم نجمع المعاملات الكسرية بالطريقة الحسابية

(مثال ١) لضرب $\frac{١}{٣} ا^{٢} - \frac{١}{٢} ا ب + \frac{٢}{٣} ب^{٢}$ فى $\frac{١}{٢} ا + \frac{١}{٣٤} ب$

نجرى العمل كما يأتى

$$\frac{١}{٣} ا^{٢} - \frac{١}{٢} ا ب + \frac{٢}{٣} ب^{٢}$$
$$\frac{١}{٢} ا + \frac{١}{٣} ب$$
$$\frac{١}{٦} ا^{٣} - \frac{١}{٤} ا^{٢} ب + \frac{١}{٣} ا ب^{٢}$$
$$+ \frac{١}{٩} ا^{٢} ب - \frac{١}{٦} ا ب^{٢} + \frac{٢}{٩} ب^{٣}$$
$$\frac{١}{٦} ا^{٣} - \frac{٥}{٣٦} ا^{٢} ب + \frac{١}{٦} ا ب^{٢} + \frac{٢}{٩} ب^{٣}$$

بند ٤٣ — إذا لم تكن المقادير مرتبة حسب القوى الصاعدة أو النازلة لحرف مشترك يحسن ترتيبها قبل الشروع فى العمل

(مثال ١) ماحاصل ضرب ٢ أ^{٢} + ٤ ب^{٢} − ٣ أ ب فى ٣ أ ب − ٥ أ^{٢} + ٤ ب^{٢}

٢ أ^{٢} − ٣ أ ب + ٤ ب^{٢}
− ٥ أ^{٢} + ٣ أ ب + ٤ ب^{٢}

− ١٠ أ^{٤} + ١٥ أ^{٣} ب − ٢٠ أ^{٢} ب^{٢}
+ ٦ أ^{٣} ب − ٩ أ^{٢} ب^{٢} + ١٢ أ ب^{٣}
+ ٨ أ^{٢} ب^{٢} − ١٢ أ ب^{٣} + ١٦ ب^{٤}

− ١٠ أ^{٤} + ٢١ أ^{٣} ب − ٢١ أ^{٢} ب^{٢} + ١٦ ب^{٤}

ليس الترتيب شرطا ضروريا فى الحل وإنما يسهل اختصار الحدود المتشابهة إذا روعى الترتيب قبل الشروع في العمل

(مثال ٢) ما حاصل ضرب ٢ س ع − ع^{٢} + ٢ س^{٢} − ٣ ص ع + س ص فى س − ص + ٢ ع

٢ س^{٢} + س ص + ٢ س ع − ٣ ص ع − ع^{٢}
س − ص + ٢ ع

٢ س^{٣} + س^{٢} ص + ٢ س^{٢} ع − ٣ س ص ع − س ع^{٢}
− ٢ س^{٢} ص − ٢ س ص ع − س ص^{٢} + ٣ ص^{٢} ع + ص ع^{٢}
٤ س^{٢} ع + ٢ س ص ع + ٤ س ع^{٢} − ٦ ص ع^{٢} − ٢ ع^{٣}

٢ س^{٣} − س^{٢} ص + ٦ س^{٢} ع − ٣ س ص ع + ٣ س ع^{٢} − س ص^{٢} + ٣ ص^{٢} ع − ٥ ص ع^{٢} − ٢ ع^{٣}

(تمارين ٥ هـ)

اضرب

(١) أ + ب + ح فى أ + ب − ح
(٢) أ − ٢ ب + ح فى أ + ٢ ب − ح
(٣) أ − أ ب + ب^{٢} فى أ^{٢} + أ ب + ب^{٢}
(٤) س^{٢} + ٣ ص^{٢} فى س + ٤ ص
(٥) س^{٣} − ٢ س^{٢} + ٨ فى س + ٢
(٦) س^{٤} − س^{٢} ص^{٢} + ص^{٤} فى س^{٢} + ص
(٧) س^{٢} + س ص + ص^{٢} فى س − ص
(٨) أ^{٢} − ٢ أ س^{٢} + ٤ س^{٢} فى أ^{٢} + ٢ أ س + ٤ س^{٢}
(٩) ١٦ أ^{٢} + ١٢ أ ب + ٩ ب^{٢} فى ٤ أ − ٣ ب

(١٠) ا^{٢} س − ا س^{٢} + س^{٣} − ا^{٣} في س + ا

(١١) س^{٢} + س − ٢ في س^{٢} + س − ٦

(١٢) ٢ س^{٣} − ٣ س^{٢} + ٢ س في ٢ س^{٢} + ٣ س + ٢

(١٣) − ا^{٥} + ا^{٤} ب − ا^{٣} ب^{٢} في − ا − ب

(١٤) س^{٣} − ٧ س + ٥ في س^{٢} − ٢ س + ٣

(١٥) ا^{٣} + ٢ ا^{٢} ب + ٢ ا ب^{٢} في ا^{٢} − ٢ ا ب + ٢ ب^{٢}

(١٦) ٤ س^{٢} + ٦ س ص + ٩ ص^{٢} في ٢ س − ٣ ص

(١٧) س^{٢} − ٣ س ص − ص^{٢} في − س^{٢} + س ص + ص

(١٨) ب^{٣} − ا^{٢} ب^{٢} + ا^{٣} في ا^{٣} + ا^{٢} ب^{٢} + ب^{٣}

(١٩) س^{٢} − ٢ س ص + ص^{٢} في س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢}

(٢٠) ا ب + حـ د + ا حـ + ب د في ا ب + حـ د − ا حـ − ب د

(٢١) − ٣ ا^{٢} ب^{٢} + ٤ ا ب^{٣} + ١٥ ا^{٣} ب في ٥ ا^{٢} ب^{٢} + ا ب^{٣} − ٣ ب^{٤}

(٢٢) ٢٧ س^{٣} − ٣٦ ا س^{٢} + ٤٨ ا^{٢} س − ٦٤ ا^{٣} في ٣ س + ٤ ا

(٢٣) ا^{٢} − ٥ ا ب − ب^{٢} في ا^{٢} + ٥ ا ب + ب^{٢}

(٢٤) س^{٢} − س ص + س + ص^{٢} + ص + ١ في س + ص − ١

(٢٥) ا^{٢} + ب^{٢} + حـ^{٢} − ب حـ − حـ ا − ا ب في ا + ب + حـ

(٢٦) − س^{٣} ص + ص^{٤} + س ص^{٢} + س^{٤} − س ص^{٣} في س + ص

(٢٧) س^{١٢} − س^{٩} ص^{٢} + س^{٦} ص^{٤} − س^{٣} ص^{٦} + ص^{٨} في س^{٣} + ص^{٢}

(٢٨) ٣ ا^{٢} + ٢ ا + ٢ ا^{٣} + ١ + ا^{٤} في ا^{٢} − ٢ ا + ١

(٢٩) − ا س^{٢} + ٣ ا س ص^{٢} − ٩ ا ص^{٤} في − ا س − ٣ ا ص

(٣٠) − ٢ س^{٣} ص + ص^{٤} + ٣ س^{٢} ص^{٢} + س^{٤} − ٢ س ص^{٣} في س^{٢} + ٢ س ص + ص

(٣١) $\frac{١}{٢}$ ا^{٢} + $\frac{١}{٣}$ ا + $\frac{١}{٤}$ في $\frac{١}{٢}$ ا − $\frac{١}{٣}$

(٣٢) $\frac{١}{٢}$ س^{٢} − ٢ س + $\frac{٣}{٢}$ في $\frac{١}{٢}$ س + $\frac{١}{٣}$

(٣٣) $\frac{٢}{٣}$ س^{٢} + س ص + $\frac{٣}{٢}$ ص^{٢} في $\frac{١}{٣}$ س − $\frac{١}{٢}$ ص

(٣٤) $\frac{٣}{٢}$ س^{٢} − ا س − $\frac{٢}{٣}$ ا^{٢} في $\frac{٣}{٤}$ س^{٢} − $\frac{١}{٢}$ ا س + $\frac{١}{٣}$ ا^{٢}

(٣٥) $\frac{١}{٢}$ س^{٢} − $\frac{٢}{٣}$ س − $\frac{٣}{٤}$ في $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + $\frac{٢}{٣}$ س^{٢} − $\frac{٣}{٤}$

(٣٦) $\frac{٢}{٣}$ ا س + $\frac{٢}{٣}$ س^{٢} + $\frac{١}{٣}$ ا^{٢} في $\frac{٣}{٤}$ ا^{٢} + $\frac{٣}{٢}$ س^{٢} − $\frac{٣}{٢}$ ا س

بند ٤٤ — كتابة حواصل الضرب بمجرد النظر

إنه وإن كان من الممكن دائمًا إيجاد حاصل ضرب مقدارين جبريين من ذوات الحدّين مثل $\text{س} + 8$ ، $\text{س} - 7$ بالطرق السابق شرحها فمن الضرورى جدًا أن يعتاد التلميذ كتابة حاصل الضرب بمجرّد النظر

ويتيسر هذا بملاحظة الكيفية التى بها تتولد معاملات الحدود فى حاصل الضرب وملاحظة ما بينها وبين المعاملات الرقمية فى المقدارين الجبريين من الارتباطات كما يتبين مما يأتى

$$(\text{س} + 8)(\text{س} + 7) = \text{س}^2 + 8\,\text{س} + 7\,\text{س} + 56$$
$$= \text{س}^2 + 15\,\text{س} + 56.$$
$$(\text{س} - 8)(\text{س} - 7) = \text{س}^2 - 8\,\text{س} - 7\,\text{س} + 56$$
$$= \text{س}^2 - 15\,\text{س} + 56$$
$$(\text{س} + 8)(\text{س} - 7) = \text{س}^2 + 8\,\text{س} - 7\,\text{س} - 56$$
$$= \text{س}^2 + \text{س} - 56$$
$$(\text{س} - 8)(\text{س} + 7) = \text{س}^2 - 8\,\text{س} + 7\,\text{س} - 56$$
$$= \text{س}^2 - \text{س} - 56$$

فيلاحظ فى كل حاصل من حواصل الضرب السابقة

(أولا) أن الحاصل مركب من ثلاثة حدود

(ثانيا) أن الحدّ الأول عبارة عن حاصل ضرب الحدّ الأول من المضروب فى الحدّ الأوّل من المضروب فيه

(ثالثا) أن الحدّ الثالث عبارة عن حاصل ضرب الحدّ الثانى من المضروب فى الحدّ الثانى من المضروب فيه

(رابعا) معامل الحدّ الأوسط هو حاصل الجمع الجبرى للعددين اللذين أحدهما الحدّ الثانى من المضروب والآخر الحدّ الثانى من المضروب فيه (بمراعاة علامة كل منهما)

بعد أن يلاحظ كل ذلك يمكن كتابة حاصل الضرب من أول وهلة بمجرد النظر لكل من المضروب والمضروب فيه كما فى الأمثلة الآتية

$$(\text{س} + 2)(\text{س} + 3) = \text{س}^2 + 5\,\text{س} + 6$$
$$(\text{س} - 3)(\text{س} + 4) = \text{س}^2 + \text{س} - 12$$
$$(\text{س} + 6)(\text{س} - 9) = \text{س}^2 - 3\,\text{س} - 54$$
$$(\text{س} - 4\,\text{ص})(\text{س} - 10\,\text{ص}) = \text{س}^2 - 14\,\text{س}\,\text{ص} + 40\,\text{ص}^2$$
$$(\text{س} - 6\,\text{ص})(\text{س} + 4\,\text{ص}) = \text{س}^2 - 2\,\text{س}\,\text{ص} - 24\,\text{ص}^2$$

ومن السهل التوسع فى تطبيق هذه القاعدة وجعلها صالحة لايجاد حاصل ضرب أى مقدارين من ذوات الحدّين بمجرد النظر اليهما

مثلا (٢ س + ٣ ص) (س − ص) = ٢ س^{٢} + ٣ س ص − ٢ س ص − ٣ ص^{٢}

= ٢ س^{٢} + س ص − ٣ ص^{٢}

و (٣ س − ٤ ص)(٢ س + ص) = ٦ س^{٢} − ٨ س ص + ٣ س ص − ٤ ص^{٢}

= ٦ س^{٢} − ٥ س ص − ٤ ص^{٢}

و (س + ٤) (س − ٤) = س^{٢} + ٤ س − ٤ س − ١٦

= س^{٢} − ١٦

و (٢ س + ٥ ص) (٢ س − ٥ ص) = ٤ س^{٢} + ١٠ س ص − ١٠ س ص − ٢٥ ص^{٢}

= ٤ س^{٢} − ٢٥ ص^{٢}

(تمارين ٥ و)

أكتب حاصل ضرب كل من الكميات الآتية بدون إجراء عملية الضرب

(١) (س + ٨) (س − ٥)
(٢) (س + ٦) (س − ١)
(٣) (س − ٣) (س + ١٠)
(٤) (س − ١) (س + ٥)
(٥) (س + ٧) (س − ٩)
(٦) (س − ١٠) (س − ٨)
(٧) (س − ٤) (س + ١١)
(٨) (س − ٢) (س + ٤)
(٩) (س + ٢) (س − ٢)
(١٠) (ا − ١) (ا + ١)
(١١) (ا + ٩) (ا − ٥)
(١٢) (ا − ٣) (ا + ١٢)
(١٣) (ا − ٨) (ا + ٤)
(١٤) (ا − ٨) (ا + ٨)
(١٥) (ا − ٦) (ا + ١٣)
(١٦) (ا + ٣) (ا + ٣)
(١٧) (ا − ١١) (ا + ١١)
(١٨) (ا − ٨) (ا − ٨)
(١٩) (س − ٣ ا) (س + ٢ ا)
(٢٠) (س + ٦ ا) (س − ٥ ا)
(٢١) (س + ٣ ا) (س − ٣ ا)
(٢٢) (س + ٤ ص) (س − ٢ ص)
(٢٣) (س + ٧ ص) (س − ٧ ص)
(٢٤) (س − ٣ ص) (س − ٣ ص)
(٢٥) (ا + ٣ ب) (ا + ٣ ب)
(٢٦) (ا − ٥ ب) (ا + ١٠ ب)
(٢٧) (ا − ٩ ب) (ا − ٨ ب)
(٢٨) (٢ س − ٥) (س + ٢)
(٢٩) (٢ س − ٥) (س − ٢)
(٣٠) (٢ س + ٣) (س − ٣)
(٣١) (٣ س − ١) (س + ١)
(٣٢) (٢ س + ٥) (٢ س − ١)
(٣٣) (٣ س + ٧) (٢ س − ٣)
(٣٤) (٤ س − ٣) (٢ س + ٣)
(٣٥) (٣ س + ٨) (٣ س − ٨)
(٣٦) (٢ س − ٥) (٢ س − ٥)
(٣٧) (٣ س − ٢ ص) (٣ س + ص)
(٣٨) (٣ س + ٢ ص) (٣ س + ٢ ص)
(٣٩) (٢ س + ٧ ص) (٢ س − ٥ ص)
(٤٠) (٥ س + ٣ ا) (٥ س − ٣ ا)
(٤١) (٢ س − ٥ ا) (س + ٥ ا)
(٤٢) (٢ س + ا) (٢ س + ا)

طريقة المعاملات المنعزلة

بند ٤٥ — إذا أريد ضرب مقدار مركب فى آخر واشتمل كل منهما على حرف واحد ذى قوى مختلفة فمن الممكن اختصار عملية ضربهما كثيرا باتباع الطريقة المسماة بطريقة المعاملات المنعزلة أى بكتابة المعاملات فقط مجردة عن الحروف وضربها بالطريقة المعتادة ووضع الحروف بعد انتهاء العملية ويلزم فى استعمال هذه الطريقة أن نرتب كلا من المقدارين حسب القوى الصاعدة أو النازلة للحرف المشترك فيهما وأن نضع معاملات صفرية (أى أصفارا) محل القوى غير الموجودة

(مثلا) لضرب ٢ سـ^{٣} — ٤ سـ^{٢} — ٥ و ٣ سـ^{٢} + ٤ سـ — ٢ نجرى العمل على الكيفية الآتية

٢ — ٤ + ٠ — ٥

٣ + ٤ — ٢

٦ — ١٢ + ٠ — ١٥

٨ — ١٦ + ٠ — ٢٠

— ٤ + ٨ — ٠ + ١٠

٦ — ٤ — ٢٠ — ٧ — ٢٠ + ١٠

وليلاحظ أنه وُضع معامل صفرى فى المضروب ليقوم مقام الحدّ الناقص فيه وهو المحتوى على القوة الأولى للحرف سـ وأكبر قوة فى حاصل الضرب هى بداهة سـ^{٥} وباقى الحدود تشتمل على الحرف سـ مرتبا ترتيبا تنازليا بالنسبة لقوى سـ

وعليه يكون حاصل الضرب المطلوب

٦ سـ^{٥} — ٤ سـ^{٤} — ٢٠ سـ^{٣} — ٧ سـ^{٢} — ٢٠ سـ + ١٠

وتستعمل طريقة المعاملات المنعزلة أيضا فى ضرب مقدارين جبريين مركبين إذا كانا متجانسين وشاملين لقوى حرفين

(مثلا) لضرب المقدار ٣ ا^{٤} + ٢ ا^{٣} ب + ٤ ا ب^{٣} + ٢ ب^{٤} فى المقدار ٢ ا^{٢} — ب^{٢}

٣ + ٢ + ٠ + ٤ + ٢

٢ + ٠ — ١

٦ + ٤ + ٠ + ٨ + ٤

— ٣ — ٢ — ٠ — ٤ — ٢

٦ + ٤ — ٣ + ٦ + ٤ — ٤ — ٢

نعوض عن الحدّ الناقص المحتوى على ا^{٢} ب^{٢} فى المضروب معاملا صفريا وكذلك عن الحدّ الناقص المحتوى على ا ب فى المضروب فيه

ومن السهل فهم كيفية وضع قوى ا و ب فى الحدود المتتالية فى حاصل الضرب وهو

٦ ا^{٦} + ٤ ا^{٥} ب — ٣ ا^{٤} ب^{٢} + ٦ ا^{٣} ب^{٣} + ٤ ا^{٢} د^{٤} — ٤ ا ب^{٥} — ٢ ب^{٦}

(ملاحظة) يحذر بالمبتدئ أن لا يستعمل طريقة المعاملات المنعزلة حتى يتمكن من معرفة طريقة الضرب العادية

الباب السادس — القسمة

بند ٤٦ — خارج قسمة ا على ب هو الكمية التى لو ضربت فى ب تنتج ا ونستدل على القسمة بأحد الوضعين ا ÷ ب ، ا/ب وتسمى ا مقسوما ، ب مقسوما عليه فالقسمة إذن عكس الضرب ، (ا ÷ ب) × ب = ا أى أن خارج القسمة × المقسوم عليه = المقسوم

ولكون القسمة عكس الضرب تجرى قوانين الضرب فى القسمة أيضا وهذه القوانين هى القانون التبادلى وقانون التنسيق لعوامل الضرب وقانون التوزيع

بند ٤٧ — قانون العلامات يجرى أيضا فى القسمة

مثلا اب ÷ ا = اب/ا = ا × ب/ا = ب

– اب ÷ ا = –اب/ا = ا × (–ب)/ا = – ب

اب ÷ (– ا) = ب/–ا = (–ا) × (–ب)/–ا = – ب

– اب ÷ (– ا) = –اب/–ا = –ا × ب/–ا = ب

إذن فى القسمة كما فى الضرب

العلامات المتحدة أى التى من نوع واحد تنتج +

والعلامات المختلفة أى التى من نوعين مختلفين تنتج –

قسمة المقدار الجبرى البسيط على مثله

بند ٤٨ — تظهر القاعدة من الأمثلة الآتية

(مثال ١) لكون حاصل ضرب ٤ فى س هو ٤ س فبقسمة ٤ س على س يكون الخارج ٤ أو بعبارة أخرى ٤ س ÷ س = ٤

(مثال ٢) لقسمة ٢٧ ا^{٥} على ٩ ا^{٣}

نقول إن الخارج = ٢٧ ا^{٥}/٩ ا^{٣} = ٢٧ ااااا/٩ ااا = ٣ اا = ٣ ا^{٢}

وذلك بحذف العوامل المشتركة فى المقسوم والمقسوم عليه كما فى الحساب

∴ ٢٧ ا^{٥} ÷ ٩ ا^{٣} = ٣ ا^{٢}

(مثال ٣) لقسمة ٣٥ ا^{٣} ب^{٢} ح^{٣} على ٧ ا ب^{٢} ح^{٢}

نقول إن الخارج = ٣٥ ااا . بب . ححح/٧ ا . بب . حح = ٥ اا . ح = ٥ ا^{٢} ح

فنرى دائما أن أس أى حرف فى الخارج عبارة عن باقى طرح أسه فى المقسوم عليه من أسه فى المقسوم وهذا قانون الأسس للقسمة وعلى ذلك يمكننا أن نضع القاعدة الآتية

قاعدة : للحصول على أس حرف فى خارج القسمة نطرح أس ذلك الحرف فى المقسوم عليه من أسه فى المقسوم فباقى الطرح أس الحرف فى الخارج

معامل خارج القسمة عبارة عن خارج قسمة معامل المقسوم على معامل المقسوم عليه مع مراعاة قاعدة العلامات

(مثال ٤) لقسمة ٤٥ $ا^{٦}$ $ب^{٢}$ $س^{٤}$ على — ٩ $ا^{٣}$ ب $س^{٢}$

نقول إن الخارج = (— ٥) × $ا^{٦-٣}$ $ب^{٢-١}$ $س^{٤-٢}$

= — ٥ $ا^{٣}$ ب $س^{٢}$

(مثال ٥) — ٢١ $ا^{٢}$ $ب^{٣}$ ÷ (— ٧ $ا^{٢}$ $ب^{٢}$) = ٣ ب

(ملاحظة) إذا طبقنا القاعدة السابقة على قسمة قوة حرف على تلك القوة لذلك الحرف نحصل على نتيجة غريبة

فبناء على القاعدة المتقدمة $ا^{٣}$ ÷ $ا^{٣}$ = $ا^{٣-٣}$ = $ا^{٠}$

ولكن $ا^{٣}$ ÷ $ا^{٣}$ = $\frac{ا^{٣}}{ا^{٣}}$ = ١

∴ $ا^{٠}$ = ١

وربما يدهش المبتدئ لهذه النتيجة ولكن حقيقتها تظهر له جليا عند دراسة نظريات الأسس فى المبحث الخاص بها

قسمة المقدار المركب على المقدار البسيط

بند ٤٩ — قاعدة : لقسمة مقدار مركب على عامل واحد نقسم كل حدّ من حدود المقدار المركب على انفراده على ذلك العامل وحاصل الجمع الجبرى لخوارج القسمة الجزئية هو خارج القسمة المطلوب

وتستنتج هذه القاعدة بسهولة من بند ٣٣ فليراجع

(مثال ١) : (٩ س — ١٢ ص + ٣ ع) ÷ — ٣ = — ٣ س + ٤ ص — ع

(مثال ٢) : (٣٦ $ا^{٣}$ $ب^{٢}$ — ٢٤ $ا^{٢}$ $ب^{٣}$ — ٢٠ $ا^{٤}$ $ب^{٢}$) ÷ ٤ $ا^{٢}$ب = ٩ ا ب — ٦ $ب^{٢}$ — ٥ $ا^{٢}$ ب

(مثال ٣) : (٢ $س^{٢}$ — ٥ س ص + $\frac{٣}{٢}$ $س^{٢}$ $ص^{٣}$) ÷ — $\frac{١}{٢}$ س = — ٤ س + ١٠ ص — ٣ س $ص^{٣}$

(تمارين ١٦)

إقسم

(١) ٣ $س^{٣}$ على $س^{٢}$	(٥) $س^{٣}$ $ص^{٣}$ على $س^{٢}$ ص
(٢) ٢٧ $س^{٤}$ على — ٩ $س^{٣}$	(٦) $ا^{٤}$ $س^{٣}$ على — $ا^{٢}$ $س^{٣}$
(٣) — ٣٥ $س^{٦}$ على ٧ $س^{٣}$	(٧) ٤ $ا^{٢}$ $ب^{٢}$ $ح^{٣}$ على ا $ب^{٢}$ $ح^{٢}$
(٤) ا ب $س^{٢}$ على — ا س	(٨) ١٢ $ا^{٦}$ $ب^{٦}$ $ح^{٦}$ على — ٣ $ا^{٤}$ $ب^{٢}$ ح

(٩) — ا^{٩} ح^{٩} على — ا ح^{٣}

(١٠) ١٥ س^{٥} ص^{٧} ع^{٤} على ٥ س^{٢} ع^{٢} ص^{٢}

(١١) — ١٦ س^{٣} ص^{٢} على — ٤ س ص^{٢}

(١٢) — ٤٨ ا^{٩} على — ٨ ا^{٣}

(١٣) ٣٥ ا^{١١} على ٧ ا^{٧}

(١٤) ٦٣ ا^{٧} ب^{٨} ح^{٣} على ٩ ا^{٥} ب^{٥} ح^{٣}

(١٥) ٧ ا^{٢} ب ح على — ٧ ا^{٢} ب ح

(١٦) ٢٨ ا^{٤} ب^{٣} على — ٤ ا^{٣} ب

(١٧) ١٦ ب^{٢} ص س^{٢} على — ٢ س ص

(١٨) — ٥٠ ص^{٣} س^{٣} على — ٥ س^{٣} ص

(١٩) س^{٢} — ٢ س ص على س

(٢٠) س^{٣} — ٣ س^{٢} + س على س

(٢١) س^{٦} — ٧ س^{٥} + ٤ س^{٤} على س^{٢}

(٢٢) ١٠ س^{٧} — ٨ س^{٦} + ٣ س^{٤} على س^{٣}

(٢٣) ١٥ س^{٥} — ٢٥ س^{٤} على — ٥ س^{٣}

(٢٤) ٢٧ س^{٦} — ٣٦ س^{٥} على ٩ س^{٥}

(٢٥) — ٢٤ س^{٦} — ٣٢ س^{٤} على — ٨ س^{٣}

(٢٦) ٣٤ س^{٣} ص^{٢} — ٥١ س^{٢} ص^{٣} على ١٧ س ص

(٢٧) ا^{٢} — ا ب — ا ح على — ا

(٢٨) ا^{٣} — ا^{٢} ب — ا^{٢} ب^{٢} على ا^{٢}

(٢٩) ٣ س^{٣} — ٩ س^{٢} ص — ١٢ س ص^{٢} على — ٣ س

(٣٠) ٤ س^{٤} ص^{٤} — ٨ س^{٣} ص^{٢} + ٦ س ص^{٣} على — ٢ س ص

(٣١) — ٣ ا^{٢} + ٩/٢ ا ب — ١٦ ا ح على — ٣/٢ ا

(٣٢) ١/٢ س^{٥} ص^{٢} — ٣ س^{٣} ص^{٤} على — ٣/٢ س^{٢} ص^{٢}

(٣٣) — ٥/٢ س^{٢} + ٥/٣ س ص + ١٠/٣ س على — ٥/٦ س

(٣٤) — ٢ ا^{٥} س^{٣} + ٧/٢ ا^{٤} س^{٤} على ٧/٣ ا^{٣} س

(٣٥) ١/٤ ا^{٢} س — ١/١٦ ا ب س — ٣/٨ ا ح س على ٣/٨ ا س

قسمة المقدار المركب على مثله

بند ٥٠ — لقسمة مقدار مركب على مثله

(١) رتب كلا من المقسوم والمقسوم عليه حسب القوى الصاعدة أو النازلة لحرف مشترك فيهما

(٢) إقسم الحد الذى على يمين المقسوم على الحد الذى على يمين المقسوم عليه وضع الناتج فى خارج القسمة

(٣) إضرب الناتج فى جميع حدود المقسوم عليه وضع حاصل الضرب تحت المقسوم

(٤) إطرح ثم ضم إلى باقى الطرح ماتراه لازما من الحدود الباقية فى المقسوم وكرر العملية حتى تنفد كل حدود المقسوم

(مثال ١) اقسمة س^{٢} + ١١ س + ٣٠ على س + ٦ نجرى العمل على الكيفية الآتية

س^{٢} + ١١ س + ٣٠ | س + ٦

فنقسم س^{2} وهو أول حدّ من المقسوم على س وهو أول حدّ من المقسوم عليه ثم نضرب الخارج س في جميع حدود المقسوم عليه ونضع حاصل الضرب وهو س + ٦ س تحت المقسوم هكذا .

المقسوم	المقسوم عليه / الخارج
س + ١١ س + ٣٠	س + ٦
س^{2} + ٦ س	س

وبالطرح يكون الباقي ٥ س + ٣٠

وبتكرار هذا العمل نجد أن الحدّ الثاني من الخارج + ٥

وتوضع العملية بأكملها على الكيفية الآتية

المقسوم	المقسوم عليه / الخارج
س^{2} + ١١ س + ٣٠	س + ٦
س^{2} + ٦ س	س + ٥
٥ س + ٣٠	
٥ س + ٣٠	

والسبب في وضع القاعدة على هذه الكيفية إنما هو إمكان تجزئة المقسوم إلى أجزاء بقدر الحاجة ثم يحصل على الخارج الكلي بجمع الخوارج الجزئية جمعا جبريا . ففي المثال السابق جزئت الكمية س^{2} + ١١ س + ٣٠ إلى جزأين س^{2} + ٦ س و ٥ س + ٣٠ وقسم كل منهما على س + ٦ للحصول على الخارج الكلي س + ٥

(مثال ٢) لقسمة ٢٤ س^{2} − ٦٥ س ص + ٢١ ص^{2} على ٨ س − ٣ ص نجرى العمل كما يأتي

المقسوم	المقسوم عليه / الخارج
٢٤ س^{2} − ٦٥ س ص + ٢١ ص^{2}	٨ س − ٣ ص
٢٤ س^{2} − ٩ س ص	٣ س − ٧ ص
− ٥٦ س ص + ٢١ ص^{2}	
− ٥٦ س ص + ٢١ ص^{2}	

(تمارين ٦ ب)

إقسم

(١) س^{2} + ٣ س + ٢ على س + ١

(٢) س^{2} − ٧ س + ١٢ على س − ٣

(٣) أ^{2} − ١١ أ + ٣٠ على أ − ٥

(٤) أ^{2} − ٤٩ أ + ٦٠٠ على أ − ٢٥

(٥) ٣ س^{2} + ١٠ س + ٣ على س + ٣

(٦) ٢ س^{2} + ١١ س + ٥ على ٢ س + ١

(٧) ٥ س^{2} + ١١ س + ٢ على س + ٢

(٨) ٢ س^{2} + ١٧ س + ٢١ على ٢ س + ٣

(٩) ٥ س^{2} + ١٦ س + ٣ على س + ٣

(١٠) ٣ س^{2} + ٣٤ س + ١١ على ٣ س + ١

(١١) ٤ س^{2} + ٢٣ س + ١٥ على ٤ س + ٣

(١٢) ٦ س^{2} − ٧ س − ٣ على ٢ س − ٣

(١٣) ٣ س^{2} + س − ١٤ على س − ٢

(١٤) ٣ س^{2} − س − ١٤ على س + ٢

(١٥) ٦ س^{٢} — ٣١ س + ٣٥ على ٢ س — ٧

(١٦) ٤ س^{٢} + س — ١٤ على س + ٢

(١٧) ١٢ ا^{٢} — ٧ ا س — ١٢ س^{٢} على ٣ ا — ٤ س

(١٨) ١٥ ا^{٢} + ١٧ ا س — ٤ س^{٢} على ٣ ا + ٤ س

(١٩) ١٢ ا^{٢} — ١١ ا ح — ٣٦ ح^{٢} على ٤ ا — ٩ ح

(٢٠) ٩ ا^{٢} + ٦ ا ح — ٣٥ ح^{٢} على ٣ ا + ٧ ح

(٢١) ٦٠ س^{٢} — ٤ س ص — ٤٥ ص^{٢} على ١٠ س — ٩ ص

(٢٢) ٩٦ س^{٢} — ١٥ ص — ٤ س ص على ١٢ س — ٥ ص

(٢٣) ٧ س^{٣} + ٩٦ س^{٢} — ٢٨ س على ٧ س — ٢

(٢٤) ١٠٠ س^{٣} — ٣ س^{٢} — ١٣ س^{٢} على ٣ + ٢٥ س

(٢٥) ٢٧ س^{٣} + ٩ س^{٢} — ٣ س — ١٠ على ٣ س — ٢

(٢٦) ١٦ ا^{٣} — ٤٦ ا^{٢} + ٣٩ ا — ٩ على ٨ ا — ٣

(٢٧) ١٥ + ٣ ا — ٧ ا^{٢} — ٤ ا^{٣} على ٥ — ٤ ا

(٢٨) ١٦ — ٩٦ س + ٢١٦ س^{٢} — ٢١٦ س^{٣} + ٨١ س^{٤} على ٢ — ٣ س

بند ٥١ — إذا اشتمل المقسوم عليه على أكثر من حدّين يمكن إجراء عملية القسمة بالطريقة عينها وهى المبينة بالبند ٥٠

(مثال ١) لقسمة ٦ س^{٥} — س^{٤} + ٤ س^{٣} — ٥ س^{٢} — س — ١٥ على ٢ س^{٢} — س + ٣ نجرى العمل كما يأتى

المقسوم	المقسوم عليه / الخارج
٦ س^{٥} — س^{٤} + ٤ س^{٣} — ٥ س^{٢} — س — ١٥	٢ س^{٢} — س + ٣
٦ س^{٥} — ٣ س^{٤} + ٩ س^{٣}	٣ س^{٣} + س^{٢} — ٢ س — ٥
٢ س^{٤} — ٥ س^{٣} — ٥ س^{٢}	
٢ س^{٤} — س^{٣} + ٣ س^{٢}	
— ٤ س^{٣} — ٨ س^{٢} — س	
— ٤ س^{٣} + ٢ س^{٢} — ٦ س	
— ١٠ س^{٢} + ٥ س — ١٥	
— ١٠ س^{٢} + ٥ س — ١٥	

(مثال ٢) لقسمة ٢ ا^{٣} + ١٠ — ١٦ ا — ٣٩ ا^{٢} + ١٥ ا^{٤} على ٢ — ٤ ا — ٥ ا^{٢} نرتب المقدارين حسب القوى الصاعدة للحرف ا ونستعمل طريقة المعاملات المنعزلة المذكورة فى بند ٥٤ هكذا

المقسوم	المقسوم عليه / الخارج
١٠ — ١٦ — ٣٩ + ٢ + ١٥	٢ — ٤ — ٥
١٠ — ٢٠ — ٢٥	٥ + ٢ — ٣
٤ — ١٤ + ٢	
٤ — ٨ — ١٠	
— ٦ + ١٢ + ١٥	
— ٦ + ١٢ + ١٥	

فالخارج إذن ٥ + ٢ ا — ٣ ا

بند ٥٢ — لنأت الآن على أمثلة محلوله أصعب من المتقدّمة

(مثال ١) لقسمة $س^{٤} + ٤ ا^{٤}$ على $س^{٢} + ٢ س ا + ٢ ا^{٢}$ نجرى العمل بالكيفية الآتية

المقسوم عليه: $س^{٢} + ٢ س ا + ٢ ا^{٢}$

خارج القسمة: $س^{٢} - ٢ س ا + ٢ ا^{٢}$

$$س^{٤} + ٤ ا^{٤}$$
$$س^{٤} + ٢ س^{٣} ا + ٢ س^{٢} ا^{٢}$$
$$- ٢ س^{٣} ا - ٢ س^{٢} ا^{٢}$$
$$- ٢ س^{٣} ا - ٤ س^{٢} ا^{٢} - ٤ س ا^{٣}$$
$$٢ س^{٢} ا^{٢} + ٤ س ا^{٣} + ٤ ا^{٤}$$
$$٢ س^{٢} ا^{٢} + ٤ س ا^{٣} + ٤ ا^{٤}$$

(مثال ٢) لقسمة $ا^{٣} + ب^{٣} + ح^{٣} - ٣ ا ب ح$ على $ا + ب + ح$ نجرى العمل على الكيفية الآتية

المقسوم عليه: $ا + ب + ح$

خارج القسمة: $ا^{٢} - ا ب - ا ح + ب^{٢} - ب ح + ح^{٢}$

$$ا^{٣} - ٣ ا ب ح + ب^{٣} + ح^{٣}$$
$$ا^{٣} + ا^{٢} ب + ا^{٢} ح$$
$$- ا^{٢} ب - ا^{٢} ح - ٣ ا ب ح$$
$$- ا^{٢} ب - ا ب^{٢} - ا ب ح$$
$$- ا^{٢} ح + ا ب^{٢} - ٢ ا ب ح$$
$$- ا^{٢} ح - ا ب ح - ا ح^{٢}$$
$$ا ب^{٢} - ا ب ح + ا ح^{٢} + ب^{٣}$$
$$ا ب^{٢} + ب^{٣} + ب^{٢} ح$$
$$- ا ب ح + ا ح^{٢} - ب^{٢} ح$$
$$- ا ب ح - ب^{٢} ح - ب ح^{٢}$$
$$ا ح^{٢} + ب ح^{٢} + ح^{٣}$$
$$ا ح^{٢} + ب ح^{٢} + ح^{٣}$$

(ملاحظة) فى المثال السابق كان كل من المقسوم وبواقى الطرح المتتالية مرتبا على حسب القوى النازلة للحرف ا وسنرجع فيما يلى إلى خارج قسمة هذه العملية لأنه مهم

بند ٥٣ — إذا كانت المعاملات كسورا تجرى القسمة بالطريقة المعتادة أيضا

مثلا لقسمة $\frac{١}{٤} س^{٣} + \frac{١}{٧٢} س ص^{٢} + \frac{١}{١٢} ص^{٣}$ على $\frac{١}{٢} س + \frac{١}{٣} ص$ نجرى العمل هكذا

المقسوم عليه: $\frac{١}{٢} س + \frac{١}{٣} ص$

خارج القسمة: $\frac{١}{٢} س^{٢} - \frac{١}{٣} س ص + \frac{١}{٤} ص^{٢}$

$$\frac{١}{٤} س^{٣} + \frac{١}{٧٢} س ص^{٢} + \frac{١}{١٢} ص^{٣}$$
$$\frac{١}{٤} س^{٣} + \frac{١}{٦} س^{٢} ص$$
$$- \frac{١}{٦} س^{٢} ص + \frac{١}{٧٢} س ص^{٢}$$
$$- \frac{١}{٦} س^{٢} ص - \frac{١}{٩} س ص^{٢}$$
$$\frac{١}{٨} س ص^{٢} + \frac{١}{١٢} ص^{٣}$$
$$\frac{١}{٨} س ص^{٢} + \frac{١}{١٢} ص^{٣}$$

بند ٥٤ — كانت القسمة فى جميع الأمثـلة المتقدمة صحيحة أى أن المقسوم اشتمل على المقسوم عليه مرات صحيحة أما إذا كانت القسمة غير صحيحة فيجب الاستمرار فى العملية حتى نصل إلى باق تكون درجته اقل من درجة المقسوم عليه (راجع بند ٢٤)

(تمرين ٦ حـ)

(يمكن أن تعمل العشرون تمرينـا الأولى بطريقة المعاملات المنعزلة المبينة بالبند ٥١)

أجر عمليات القسمة الآتية

(١) سـ^{٣} — سـ^{٢} — ٩ سـ — ١٢ على سـ^{٢} + ٣ سـ + ٣

(٢) ٢ صـ^{٣} — ٣ صـ^{٢} — ٦ صـ — ١ على ٢ صـ^{٢} — ٥ صـ — ١

(٣) ٦ م^{٣} — م^{٢} — ١٤ م + ٣ على ٣ م^{٢} + ٤ م — ١

(٤) ٦ ا^{٩} — ١٣ ا^{٤} + ٤ ا^{٣} + ٣ ا^{٢} على ٣ ا^{٣} — ٢ ا^{٢} — ١

(٥) سـ^{٤} + سـ^{٣} + ٧ سـ^{٢} — ٦ سـ + ٨ على سـ^{٢} + ٢ سـ + ٨

(٦) ا^{٤} — ا^{٣} — ٨ ا^{٢} + ١٢ ا — ٩ على ا^{٢} + ٢ ا — ٣

(٧) ا^{٤} + ٦ ا^{٣} + ١٣ ا^{٢} + ١٢ ا + ٤ على ا^{٢} + ٣ ا + ٢

(٨) ٢ سـ^{٤} — سـ^{٣} + ٤ سـ^{٢} + ٧ سـ + ١ على سـ^{٢} — سـ + ٣

(٩) سـ^{٥} — ٥ سـ^{٤} + ٩ سـ^{٣} — ٦ سـ^{٢} — سـ + ٢ على سـ^{٢} — ٣ سـ + ٢

(١٠) سـ^{٥} — ٤ سـ^{٤} + ٣ سـ^{٣} + ٣ سـ^{٢} — ٣ سـ + ٢ على سـ^{٢} — سـ — ٢

(١١) ٣٠ سـ^{٤} + ١١ سـ^{٣} — ٨٢ سـ^{٢} — ٥ سـ + ٣ على ٢ سـ — ٤ + ٣ سـ^{٢}

(١٢) ٣٠ صـ + ٩ — ٧١ صـ^{٣} + ٢٨ صـ^{٤} — ٣٥ صـ^{٢} على ٤ صـ^{٢} — ١٣ صـ + ٦

(١٣) ٦ ك^{٥} — ١٥ ك^{٤} + ٤ ك^{٣} + ٧ ك^{٢} — ٧ ك + ٢ على ٣ ك^{٣} — ك + ١

(١٤) ١٥ + ٢ م^{٤} — ٣١ م + ٩ م^{٢} + ٤ م^{٣} + م^{٥} على ٣ — ٢ م — م^{٢}

(١٥) ٢ سـ^{٣} — ٨ سـ + سـ^{٤} + ١٢ — ٧ سـ^{٢} على سـ^{٢} + ٢ — ٣ سـ

(١٦) سـ^{٥} — ٢ سـ^{٤} — ٤ سـ^{٣} + ١٩ سـ^{٢} على سـ^{٣} — ٧ سـ + ٥

(١٧) ١٩٢ — سـ^{٤} + ١٢٨ سـ + ٤ سـ^{٢} — ٨ سـ^{٣} على ١٦ — سـ^{٢}

(١٨) ١٤ سـ^{٤} + ٤٥ سـ^{٣} صـ + ٧٨ سـ^{٢} صـ^{٢} + ٤٥ سـ صـ^{٣} + ١٤ صـ^{٤} على ٢ سـ^{٢} + ٥ سـ صـ + ٧ صـ^{٢}

(١٩) سـ^{٥} — سـ^{٤} صـ + سـ^{٣} صـ^{٢} — سـ^{٣} + سـ^{٢} — صـ^{٣} على سـ^{٢} — سـ — صـ

(٢٠) سـ^{٥} + سـ^{٤} صـ — سـ^{٣} صـ^{٢} + سـ^{٣} — ٢ سـ صـ^{٢} + صـ^{٣} على سـ^{٢} + سـ صـ — صـ^{٢}

(٢١) ا^{٩} — ب على ا^{٣} — ب^{٣}

(٢٢) سـ^{٩} — صـ^{٩} على سـ^{٢} + سـ صـ + صـ^{٢}

(٢٣) سـ^{٧} — ٢ صـ^{١٤} — ٧ سـ^{٥} صـ — ٧ سـ صـ^{١٢} + ١٤ سـ صـ^{٨} على سـ — ٢ صـ

(٢٤) ا^{٣} + ٣ ا^{٢} ب + ب^{٣} — ١ + ٣ ا ب^{٢} على ا + ب — ١

(٢٥) $س^{٨} - ص^{٨}$ على $س^{٣} + س^{٢} ص + س ص^{٢} + ص^{٣}$

(٢٦) $ا^{١٢} - ب^{١٢}$ على $ا^{٢} - ب^{٢}$

(٢٧) $ا^{١٢} + ٢ ا^{٦} ب^{٦} + ب^{١٢}$ على $ا^{٤} + ٢ ا^{٢} ب^{٢} + ب^{٤}$

(٢٨) $١ - ا^{٣} - ٨ س^{٣} - ٦ ا س$ على $١ - ا - ٢ س$

ما خارج قسمة

(٢٩) $\frac{١}{٨} ا^{٣} - \frac{٩}{٤} ا^{٢} س + \frac{٢٧}{٢} ا س^{٢} - ٢٧ س^{٣}$ على $\frac{١}{٢} ا - ٣ س$

(٣٠) $\frac{١}{٢٧} ا^{٣} - \frac{١}{١٢} ا^{٢} + \frac{١}{١٦} ا - \frac{١}{٦٤}$ على $\frac{١}{٣} ا - \frac{١}{٤}$

(٣١) $\frac{٣}{٤} ا^{٢} ح^{٣} + \frac{٦}{١٢٥} ا^{٥}$ على $\frac{١}{٥} ا^{٢} + \frac{١}{٢} ا ح$

(٣٢) $\frac{٩}{١٦} ا^{٤} - \frac{٣}{٤} ا^{٣} - \frac{٧}{٤} ا^{٢} + \frac{٤}{٣} ا + \frac{١٦}{٩}$ على $\frac{٣}{٢} ا^{٢} - \frac{٨}{٣} - ا$

(٣٣) $٣٦ س^{٢} + \frac{١}{٩} ص^{٢} + \frac{١}{٤} - ٤ س ص - ٦ س + \frac{١}{٣} ص$ على $٦ س - \frac{١}{٣} ص - \frac{١}{٢}$

(٣٤) $\frac{٨}{٢٧} ا^{٥} - \frac{٢٤٣}{٥١٢} ا س^{٤}$ على $\frac{٢}{٣} ا - \frac{٣}{٤} س$

بند ٥٥ — يسهل تحقيق أمثلة القسمة الآتية وهي من الأهمية بمكان فيجب الالتفات اليها بنوع خاص

أولا

$$\frac{س^{٢} - ص^{٢}}{س - ص} = س + ص$$

$$\frac{س^{٣} - ص^{٣}}{س - ص} = س^{٢} + س ص + ص^{٢}$$

$$\frac{س^{٤} - ص^{٤}}{س - ص} = س^{٣} + س^{٢} ص + س ص^{٢} + ص^{٣}$$ وهكذا

ففى كل حالة نرى أن المقسوم عليه $س - ص$ وحدود خارج القسمة دائما موجبة وأسس حدود المقسوم فى كل حالة إما زوجية أو فردية

ثانيا

$$\frac{س^{٣} + ص^{٣}}{س + ص} = س^{٢} - س ص + ص^{٢}$$

$$\frac{س^{٥} + ص^{٥}}{س + ص} = س^{٤} - س^{٣} ص + س^{٢} ص^{٢} - س ص^{٣} + ص^{٤}$$

$$\frac{س^{٧} + ص^{٧}}{س + ص} = س^{٦} - س^{٥} ص + س^{٤} ص^{٢} - س^{٣} ص^{٣} + س^{٢} ص^{٤} - س ص^{٥} + ص^{٦}$$

وهكذا ففى كل حالة نرى أن المقسوم عليه دائما $س + ص$ وحدود خارج القسمة موجبة وسالبة بالتبادل وأسس المقسوم دائما فردية

ثالثا

$$\frac{س^{٢} - ص^{٢}}{س + ص} = س - ص$$

$$\frac{س^{٤} - ص^{٤}}{س + ص} = س^{٣} - س^{٢} ص + س ص^{٢} - ص^{٣}$$

$$\frac{س^{٦} - ص^{٦}}{س + ص} = س^{٥} - س^{٤} ص + س^{٣} ص^{٢} - س^{٢} ص^{٣} + س ص^{٤} - ص^{٥}$$

وهكذا ففى كل حالة نرى أن المقسوم عليه دائما $س + ص$ وحدود خارج القسمة موجبة وسالبة بالتبادل وأسس حدود المقسوم دائما زوجية

رابعا : المقادير الجبرية س^٢ + ص^٢ ، س^٤ + ص^٤ ، س^٦ + ص^٦ ... التى فيها الأسس زوجية وحدا كل منها موجبان لاتقبل القسمة أبدا على س + ص ولا على س − ص

ويمكن تلخيص كل ما سبق فيما يلى

(أولا) س^ن − ص^ن تقبل القسمة على س − ص إذا كانت ن أى عدد صحيح

(ثانيا) س^ن + ص^ن تقبل القسمة على س + ص إذا كانت ن اى عدد صحيح فردى

(ثالثا) س^ن − ص^ن تقبل القسمة على س + ص إذا كانت ن أى عدد صحيح زوجى

(رابعا) س^ن + ص^ن لاتقبل القسمة على س + ص ولا على س − ص إذا كانت ن أى عدد صحيح زوجى

الباب السابع — إزالة الاقواس وإدخالها

بند ٥٦ — تحصر الكميات بين قوسين للدلالة على أنه يلزم أن نجرى فى جميعها عملية واحدة . ففى المقدار ٢ا − ٣ب − (٤ا − ٢ب) مثلا يدل القوسان على أن ٤ا − ٢ب تعتبر كمقدار واحد يجب طرحه من ٢ا − ٣ب والمقدار الجبرى المحصور بين قوسين يجوز أن يحصر جزء منه بين قوسين آخرين وانما يستعمل فى ذلك أقواس مخالفة فى الصورة للأقواس الأصلية والأقواس المستعملة عادة هى ( ) ، { } ، [ ]

وقد يرسم أحيانا خط افقى فوق المقدار المراد حصره بين قوسين فالمقدار ا − ب + حـ هو عين المقدار ا − (ب + حـ) وعليه يكون ا − ب + حـ = ا − ب − حـ

إزالة الأقواس

بند ٥٧ — يحسن فى إزالة الأقواس عادة أن نبدأ بالداخلة منها ثم بالتى تليها من الداخل ثم بالتى تلى الأخيرة وهكذا متبعين فى العمل ماجاء بالبندين ٢١ ، ٢٢

(مثال ١) لاختصار ما يأتى بواسطة إزالة الأقواس

ا − ٢ب − [٤ا − ٦ب − {٣ا − حـ + (٥ا − ٢ب − ٣ا − حـ + ٢ب)}]

تزال الأقواس اثنين اثنين هكذا

ا − ٢ب − [٤ا − ٦ب − {٣ا − حـ + (٥ا − ٢ب − ٣ا + حـ − ٢ب)}]

= ا − ٢ب − [٤ا − ٦ب − {٣ا − حـ + ٥ا − ٢ب − ٣ا + حـ − ٢ب}]

= ا − ٢ب − [٤ا − ٦ب − ٣ا + حـ − ٥ا + ٢ب + ٣ا − حـ + ٢ب]

= ا − ٢ب − ٤ا + ٦ب + ٣ا − حـ + ٥ا − ٢ب − ٣ا + حـ − ٢ب

= ٢ا بعد اختصار الحدود المتشابهة

(مثال ٢) لاختصار المقدار

−[−٢س − {٣ص − (٢س − ٣ص) + (٣س − ٢ص)} + ٢س]

نقول إنه = −[−٢س − {٣ص − ٢س + ٣ص + ٣س − ٢ص} + ٢س]

= −[−٢س − ٣ص + ٢س − ٣ص − ٣س + ٢ص + ٢س]

= ٢س + ٣ص − ٢س + ٣ص + ٣س − ٢ص − ٢س

= س + ٤ص

(تمارين ١٧)

إختصر كلا من المقادير الآتية بواسطة إزالة الأقواس

(١) ا − (ب − ح) + ا + (ب − ح) + ب − (ح + ا)

(٢) ا − [ب + {ا − (ب + ا)}]

(٣) ا − [٢ا − {٣ب − (٤ح − ٢ا)}]

(٤) {ا − (ب − ح)} + {ب − (ح − ا)} − {ح − (ا − ب)}

(٥) ٢ا − (٥ب + [٣ح − ا]) − (٥ا − [ب + ح])

(٦) − { − [− (ا − ب − ح)]} (مع خط فوق ب − ح)

(٧) − [ا − {ب − (ح − ا)}] − [ب − {ح − (ا − ب)}]

(٨) − (− (− (− س))) − (− (− (− ص)))

(٩) − [− { − (ب + ح − ا)}] + [− { − (ح + ا − ب)}]

(١٠) − ٥س − [٣ص − {٢س − (٢ص − س)}]

(١١) − (− (− ا)) − (− (− (− س)))

(١٢) ٣ا − [ا + ب − {ا + ب + ح − (ا + ب + ح + د)}]

(١٣) − ٢ا − [٣س + {٣ح − (٤ص + ٣س + ٢ا)}]

(١٤) ٣س − [٥ص − {٦ع − (٤س − ٧ص)}]

(١٥) − [٥س − (١١ص − ٣س)] − [٥ص − (٣س − ٦ص)]

(١٦) − [١٥س − {١٤ص − (١٥ع + ١٢ص) − (١٠س − ١٥ع)}]

(١٧) ٨س − {١٦ص − [٣س − (١٢ص − س) − ٨ص] + س}

(١٨) − [س − {ع + (س − ع) − (ع − س) − ع} − س]

(١٩) − [ا + {ا − (ا − س) − (ا + س) − ا} − ا]

(٢٠) − [ا − {ا + (س − ا) − (ا − س) − ا} − ٢ا]

بند ٥٨ — يدل المعامل الموضوع قبل قوسين على ان كل حدّ داخلهما يضرب فيه

(ملاحظة) شرطة الكسر الاعتيادى التى تفصل البسط عن المقام نوع من أنواع الأقواس

فمثلا (س − ٥)/٣ يساوى ١/٣ (س − ٥)

وقد نكتب √(س + ص) (بخط ممدود فوق س + ص) بدل √ (س + ص) ويقوم الجزء الممدود من علامة الجذر فوق المقدار مقام قوسين لأنه يدل على جذر المقدار المركب س + ص بأجمعه كانه كمية واحدة

مثلا √(٢٥ + ١٤٤) = √١٦٩ = ١٣

اما √٢٥ + √١٤٤ = ٥ + ١٢ = ١٧

بند ٥٩ — يحسن فى بعض الأحيان أن تختصر المقادير أثناء السير فى العمل

مثلا إذا أريد معرفة قيمة المقدار

٨٤ − ٧ [− ١١ س − ٤ { − ١٧ س + ٣ (٨ − ٩ − ٥ س) }] (الخط فوق «٩ − ٥ س»)

نقول إن المقدار يساوى

= ٨٤ − ٧ [− ١١ س − ٤ { − ١٧ س + ٣ (٨ − ٩ + ٥ س) }]

= ٨٤ − ٧ [− ١١ س − ٤ { − ١٧ س + ٣ (٥ س − ١) }]

= ٨٤ − ٧ [− ١١ س − ٤ { − ١٧ س + ١٥ س − ٣ }]

= ٨٤ − ٧ [− ١١ س − ٤ { − ٢ س − ٣ }]

= ٨٤ − ٧ [− ١١ س + ٨ س + ١٢]

= ٨٤ − ٧ [− ٣ س + ١٢]

= ٨٤ + ٢١ س − ٨٤

= ٢١ س

ويمكن الطالب بعد تمرن قليل أن يقلل خطوات العمل كثيرا عما سبق

(تمارين ٧ ب)

إختصر ما يأتى بواسطة إزالة الأقواس

(١) ا − [٢ب + { ٣حـ − ٣ا − (ا + ب) } + ٢ا − (ب + ٣حـ)]

(٢) ا + ب − (حـ + ا − [ب + حـ − (ا + ب − {حـ + ا − (ب + حـ − ا)})])

(٣) ا − (ب − حـ) − [ا − ب − حـ − ٢ {ب + حـ − ٣ (حـ − ا) − د}]

(٤) ٢س − (٣ص − ٤ع) − {٢س − (٣ص + ٤ع)} − {٣ص − (٤ع + ٢س)}

(٥) ب + حـ − (ا + ب − [حـ + ا − (ب + حـ − {ا + ب − (حـ + ا − ب)})])

(٦) ٣ب − {٥ا − [٦ا + ٢ (١٠ا − ب)]}

(٧) ا − (ب − حـ) − [ا − ب − حـ − ٢ {ب + حـ}]

(٨) ٣ا^{٣} − [٦ا^{٢} − {٨ب^{٢} − (٩حـ^{٢} − ٢ا^{٢})}]

(٩) ب − (حـ − ا) − [ب − ا − حـ − ٢ {حـ + ا − ٣ (ا − ب) − د}]

(١٠) − ٢٠ (ا − د) + ٣ (ب − حـ) − ٢ [ب + حـ + د − ٣ {حـ + د − ٤ (د − ا)}]

(١١) − ٤ (ا + د) + ٢٤ (ب − حـ) − ٢ [حـ + د + ا − ٣ {د + ا − ٤ (ب + حـ)}]

(١٢) − ١٠ (ا + ب) − [حـ + ا + ب − ٣ {ا + ٢ب − (حـ + ا − ب)}] + ٤حـ

(١٣) ا − ٢ (ب − حـ) − [− { − (٤ا − ب − حـ − ٢ {ا + ب + حـ})}]

(١٤) ٨ (ب − حـ) − [− {ا − ب − ٣ (حـ − ب + ا)}]

(١٥) ٢ (٣ب − ٥ا) − ٧ [ا − ٦ {٢ − ٥ (ا − ب)}]

(١٦) ٦ {ا − ٢ [ب − ٣ (حـ + د)]} − ٤ {ا − ٣ [ب − ٤ (حـ − د)]}

(١٧) ٥ {ا − ٢ [ا − ٢ (ا + س)]} − ٤ {ا − ٢ [ا − ٢ (ا + س)]}

(١٨) − ١٠ {ا − ٦ [ا − (ب − ح)]} + ٦٠ {ب − (ح + ١)}

(١٩) − ٣ {− ٢ [− ٤ (− ١)]} + ٥ {− ٢ [− ٢ (− ١)]}

(٢٠) − ٢ {− [− (س − ص)]} + {− ٢ [− (س − ص)]}

(٢١) ١/٤ {ا − ٥ (ب − ١)} − ٣/٢ {١/٣ (ب − ١/٣) − ٢/٩ [ا − ٣/٤ (ب − ١٤/٥)]}

(٢٢) ٣٥ [(٣ س − ٤ ص)/٥ − ١/١٠ {٣ س − ٥/٧ (٧ س − ٤ ص)}] + ٨ (ص − ٢ س)

(٢٣) ٣/٨ {٤/٣ (ا − ب) − ٨ (ب − ح)} − {(ب − ح)/٢ − (ح − ا)/٣} − ١/٢ {ح − ا − ٢/٣ (ا − ب)}

(٢٤) ١/٢ س − ١/٢ (٢/٣ ص − ١/٢ ع) − [س − {١/٢ س − (١/٣ ص − ١/٤ ع)} − (٢/٣ ص − ١/٢ ع)]

إدخال الأقواس

بند ٦٠ — إدخال الأقواس عكس إزالتها وهو ذو أهميـة عظيمة وقد أوردنا قاعدتيه فى البندين ٢١ ، ٢٢ وسنعيدهما هنا لزيادة الفائدة

(١) يمكن حصر أى جزء من مقدار جبرى بين قوسين مسبوقين بعلامة + مع بقاء علامة كل حدّ داخل القوسين كما هى

(٢) يمكن حصر أى جزء من مقدار جبرى بين قوسين مسبوقين بعلامة — بشرط أن تغير علامة كل حدّ داخل القوسين

أمثلة : ا − ب + ح − ء − هـ = ا − ب + (ح − ء − هـ)

، ا − ب + ح − ء − هـ = ا − (ب − ح) − (ء + هـ)

، س^٢ − ا س + ب س − ا ب = (س^٢ − ا س) + (ب س − ا ب)

، س ص − ا س − ب ص + ا ب = (س ص − ب ص) − (ا س − ا ب)

بند ٦١ — يمكن حصر حدود أى مقدار جبرى داخل أقواس بكيفيات متنوّعة

فمثلا ا س − ب س + ح س − ا ص + ب ص − ح ص يمكن أن يكتب باحدى الكيفيات الآتية

(ا س − ب س) + (ح س − ا ص) + (ب ص − ح ص)

، (ا س − ب س + ح س) − (ا ص − ب ص + ح ص)

، (ا س − ا ص) − (ب س − ب ص) + (ح س − ح ص)

بند ٦٢ — إذا وجد عامل مشترك فى كل حدّ من الحدود المحصورة بين قوسين يمكن وضع ذلك العامل خارجهما باعتبار أنه معامل لجميع المقدار المحصور بينهما

(مثـال ١) إذا أدخلنـا فى

ا س^٢ − ح س + ٧ − ء س^٢ + ب س − ح − ء س^٣ + ب س^٢ − ٢ س

قوى س المتساوية كلا بين قوسين علامتهما موجبة

نجد أن المقدار

= (ا س^{٣} − ء س^{٣}) + (ب س^{٢} − ء س^{٢}) + (ب س − حـ س − ٢ س) + (٧ − حـ)

= س^{٣} (ا − ء) + س^{٢} (ب − ء) + س (ب − حـ − ٢) + (٧ − حـ)

= (ا − ء) س^{٣} + (ب − ء) س^{٢} + (ب − حـ − ٢) س + ٧ − حـ

وفى هذه النتيجة الأخيرة تعتبر المقادير المركبة ا − ء ، ب − ء ، ب − حـ − ٢ معاملات للحروف س^{٣} ، س^{٢} ، س على الترتيب

(مثال ٢) إذا وضعنا قوى ا المتساوية فى المقدار − ا^{٢} س − ٧ ا + ا^{٢} ص + ٣ − ٢ س − ا ب كلا بين قوسين مسبوقين بعلامة −

نجد أن المقدار = − (ا^{٢} س − ا^{٢} ص) − (٧ ا + ا ب) − (٢ س − ٣)

= − ا^{٢} (س − ص) − ا (٧ + ب) − (٢ س − ٣)

= − (س − ص) ا^{٢} − (٧ + ب) ا − (٢ س − ٣)

(تمارين ٧ حـ)

أدخل فى كل من المقادير الآتية قوى س المتساوية كلا بين قوسين مسبوقين بعلامة +

(١) ا س^{٤} + ب س^{٢} + ٥ + ٢ ب س − ٥ س^{٢} + ٢ س^{٤} − ٣ س

(٢) ٣ ب س^{٢} − ٧ − ٢ س + ا ب + ٥ ا س^{٣} + حـ س − ٤ س − ب س^{٣}

(٣) ٢ − ٧ س^{٣} + ٥ ا س^{٢} − ٢ حـ س + ٩ ا س^{٣} + ٧ س − ٣ س^{٢}

(٤) ٢ حـ س^{٥} − ٣ ا ب س + ٤ ء س − ٣ ب س^{٤} − ا^{٢} س^{٥} + س^{٤}

أدخل فى كل من المقادير الآتية قوى س المتساوية كلا بين قوسين مسبوقين بعلامة −

(٥) ا س^{٢} + ٥ س^{٣} − ا^{٢} س^{٤} − ٢ ب س^{٣} − ٣ س^{٢} − ب س^{٤}

(٦) ٧ س^{٣} − ٣ حـ^{٣} س − ا ب س^{٥} + ٥ ا س + ٧ س^{٥} − ا ب حـ س^{٣}

(٧) ا س^{٢} + ا^{٢} س^{٣} − ب س^{٢} − ٥ س^{٢} − حـ س^{٣}

(٨) ٣ ب^{٢} س^{٤} − ب س − ا س^{٤} − حـ س^{٤} − ٥ حـ^{٢} س − ٧ س^{٤}

إختصر كلا من المقادير الآتية ورتب نتيجة كل منها حسب قوى س

(٩) ا س^{٣} − ٢ حـ س − [ب س^{٢} − {حـ س − ء س − (ب س^{٣} + ٣ حـ س)}
− (حـ س^{٢} − ب س)]

(١٠) ٥ ا س^{٣} − ٧ (ب س − حـ س^{٢}) − {٦ ب س^{٢} − (٣ ا س^{٢} + ٢ ا س) − ٤ حـ س^{٣}}

(١١) ا س^{٢} − ٣ {− ا س^{٣} + ٣ ب س − ٤ [$\frac{١}{٦}$ حـ س^{٣} − $\frac{٢}{٣}$ (ا س − ب س^{٢})]}

(١٢) س^{٥} − ٤ ب س^{٤} − $\frac{١}{٦}$ [١٢ ا س − ٤ {٣ ب س^{٤} − ٩ ($\frac{\text{حـ س}}{٢}$ − ب س^{٥}) − $\frac{٣}{٢}$ ا س^{٤}}]

(١٣) س {س − ب − س (ا − ب س)} + ا س − س {س − س (ا س − ب)}

بند ٦٣ — يحسن أحيانا فى عمليات جمع المقادير المركبة من حدود ذات معاملات حرفية أو ضربها أو غير ذلك من العمليات أن ترتب الحدود حسب قوى حرف مشترك فيها وبذلك يسهل الحصول على النتيجة المطلوبة

(مثال ١) اجمع

ا س^{٣} — ٢ ب س^{٢} + ٣ ، ب س — ح س^{٣} — س^{٢} ، س^{٣} — ا س^{٢} + ح س

نقول إن حاصل الجمع

= ا س^{٣} — ٢ ب س^{٢} + ٣ + ب س — ح س^{٣} — س^{٢} + س^{٣} — ا س^{٢} + ح س

= ا س^{٣} — ح س^{٣} + س^{٣} — ا س^{٢} — ٢ ب س^{٢} — س^{٢} + ب س + ح س + ٣

= (ا — ح + ١) س^{٣} — (ا + ٢ ب + ١) س^{٢} + (ب + ح) س + ٣

(مثال ٢) لضرب ا س^{٢} — ٢ ب س + ٣ ح فى ن س — هـ

نقول إن حاصل الضرب

= (ا س^{٢} — ٢ ب س + ٣ ح) (ن س — هـ)

= ا ن س^{٣} — ٢ ب ن س^{٢} + ٣ ح ن س — ا هـ س^{٢} + ٢ ب هـ س — ٣ ح هـ

= ا ن س^{٣} — (٢ ب ن + ا هـ) س^{٢} + (٣ ح ن + ٢ ب هـ) س — ٣ ح هـ

(تمارين ٧ د)

إجمع المقادير الآتية ورتب حواصل الجمع حسب قوى س

(١) ا س^{٣} — ٢ ح س ، ب س^{٢} — ح س^{٣} ، ح س^{٢} — س

(٢) س^{٢} — س — ١ ، ا س^{٢} — ب س^{٢} ، ب س + س^{٣}

(٣) ا^{٢} س^{٣} — ٥ س ، ٢ ا س^{٢} — ١٥ س^{٣} ، ٢ س^{٣} — ب س^{٢} — ا س

(٤) ا س^{٢} + ب س — ح ، ن س — ر — ط س^{٢} ، س^{٢} + ٢ س + ٣

(٥) ط س^{٣} — ن س ، ن س^{٢} — ط س ، ن — س^{٣} ، ط س^{٢} + ن س^{٣}

إضرب المقادير الآتية ورتب حواصل الضرب حسب قوى س

(٦) ا س^{٢} + ب س + ١ فى ح س + ٢

(٧) ح س^{٢} — ٢ س + ٣ فى ا س — ب

(٨) ا س^{٢} — ب س — ح فى ء س + هـ

(٩) ٢ س^{٢} — ٣ س — ١ فى ب س + ح

(١٠) ا س^{٢} — ٢ ب س + ٣ ح فى س — ١

(١١) ء س^{٢} — ٢ س — هـ فى ا س — ٣

(١٢) س^{٣} + ا س^{٢} — ب س — ح فى س^{٣} — ا س^{٢} — ب س + ح

(١٣) ا س^{٣} — س^{٢} + ٣ س — ب فى ا س^{٣} + س^{٢} + ٣ س + ب

(١٤) س^{٤} — ا س^{٣} — ب س^{٢} + ح س + ء فى س^{٤} + ا س^{٣} — ب س^{٢} — ح س + ء

الباب الثامن ـ المعادلات البسيطة

بند ٦٤ ـ المعادلة عبارة عن وضع يدل على تساوى مقدارين جبريين

مثلا (١) س + ٣ + س + ٤ = ٢ س + ٧ } معادلتان
(٢) ٤ س + ٢ = ١٤

الجزءان اللذان تتركب منهما المعادلة أى المفصولان بعلامة التساوى يسميان طرفى المعادلة و يقال للجزء الأيمن الطرف الايمن وللأيسر الطرف الأيسر

بند ٦٥ ـ إذا تساوى طرفا المعادلة دائما مهما أعطينا من المقادير الرقمية للرموز المستعملة فيها سميت المعادلة متطابقة

فالمعادلة (١) المتقدمة متطابقة كما يتضح من اختصار الحدود التى بالطرف الأيمن

أما إذا كان الطرفان لا يتساويان إلا إذا كان للرموز الداخلة فيهما قيمة مخصوصة فالمعادلة تسمى معادلة شرطية أو بالاختصار معادلة فقط

وعلى هذا فالمتساوية ٤ س + ٢ = ١٤ التى لاتكون صحيحة إلا إذا كانت س = ٣ هى مما ينطبق عليها عادة اسم معادلة ويقال للعدد ٣ أنه يحقق المعادلة . والغرض من هذا الباب البحث فى الطرق التى توصلنا لايجاد القيم التى تحقق المعادلات البسيطة

بند ٦٦ ـ يسمى الحرف الذى يحث عن قيمته فى أى معادلة الكمية المجهولة أو المجهول وعملية إيجاد هذه القيمة تسمى عملية حل المعادلة والقيمة نفسها تسمى جذر المعادلة أو حلها

بند ٦٧ ـ إذا وضعت المعادلة فى أبسط أشكالها وكانت قوة المجهول فيها الأولى سميت معادلة بسيطة أو معادلة من الدرجة الأولى ويرمز للمجهول عادة بالحرف س

بند ٦٨ ـ حل المعادلات البسيطة يتوقف على معرفة البديهيات الآتية فقط

(١) إذا أضيفت أشياء متساوية إلى أخرى متساوية فحواصل الجمع متساوية
(٢) إذا طرحت أشياء متساوية من أخرى متساوية فبواقى الطرح متساوية
(٣) إذا ضربت أشياء متساوية فى أخرى متساوية فحواصل الضرب متساوية
(٤) إذا قسمت أشياء متساوية على أخرى متساوية فخوارج القسمة متساوية

(مثال ١) لحل المعادلة ٧ س = ١٤
نقسم الطرفين على ٧ (البديهى الرابع) فيحدث س = ٢

(مثال ٢) لحل المعادلة س/٢ = ـ ٦
نضرب الطرفين فى ٢ (البديهى الثالث) فيحدث س = ـ ١٢

(مثال ٣) لحل المعادلة ٧ س ـ ٢ س ـ س = ١٠ ـ ٢٣ ـ ١٥
نجد باختصار الحدود فى كل من الطرفين أن ٤ س = ـ ٢٨
وبالقسمة على ٤ (البديهى الرابع) يحدث س = ـ ٧

أمثلة تعمل شفهيا

ما القيمة التى تصح بها كل من المعادلات الآتية

(١) ٣ س = ١٨
(٢) ٤ س = ١٢
(٣) ٦ س = ١٢
(٤) ٧ س = − ٧
(٥) ٣ س = ٢١
(٦) ١١ س = ٥٥
(٧) ١٣ س = ٣٩
(٨) ١٤ س = − ٤٢
(٩) ٧ س = − ٣٥
(١٠) − ٥ س = ٣٠
(١١) − ٢ س = − ١٢
(١٢) − ٣ س = ٢١
(١٣) ٣ س = ٠
(١٤) − ٤ س = ٠
(١٥) ٢ س = ١١
(١٦) ٩ س = ١٥
(١٧) ٥١ س = ٣٩
(١٨) ٣ س = − ٧
(١٩) ٢٨ س = ٣٥
(٢٠) ٣٤ س = − ٥١
(٢١) س/٣ = ٧
(٢٢) س/٧ = − ٣
(٢٣) − س/٥ = ٤
(٢٤) س/٦ = ٠

(٢٥) ٨ س + ٥ س − ٣ س = ١٧ − ٩ + ٣٣ − ١١
(٢٦) ٥ س − ٧ س + ٨ س = ١٢ − ٥ + ٧ + ١٠
(٢٧) − ٣ س − ١٢ س + ٥ س = ٢٩ − ٢ + ٦ − ١٣
(٢٨) ٤ س − ١٥ س − ٩ س + ٢٧ س = − ٢٨ + ٨ − ٦٠ + ١٧

بند ٦٩ — فى كل من الأمثلة المتقدمة وضعت كل الحدود المشتملة على المجهول فى طرف والمشتملة على الأعداد فى الطرف الآخر ويمكننا دائما إجراء هذا الترتيب بتطبيق البديهيات المتقدمة

(مثلا) لحل المعادلة ٣ س − ٨ = س + ١٢

نطرح س من الطرفين فيحدث ٣ س − س − ٨ = ١٢ (البديهى الثانى)

ثم نضم ٨ للطرفين فيحدث ٣ س − س = ١٢ + ٨ (البديهى الأول)

ويكون ٢ س = ٢٠

وبالقسمة على ٢ يحدث س = ١٠ (البديهى الرابع)

بند ٧٠ — على المبتدئ أن يحقق المعادلة أى يختبر صحتها بوضع القيمة الناتجة بدل المجهول فى الطرفين

ففى المثال الأخير ٣ س − ٨ = س + ١٢

إذا كانت س = ١٠

يصير الطرف الأيمن ٣ × ١٠ − ٨ = ٢٢

والطرف الأيسر ١٠ + ١٢ = ٢٢

وبما أن الناتجين متساويان فالحل صحيح

بند ٧١ — يجب الاختصار فى الأمثلة الآتية قبل البدء فى الحل

(مثال ١) لحل المعادلة ٥ (س — ٣) — ٧ (٦ — س) = ٢٤ — ٣ (٨ — س) — ٣

نزيل الأقواس فنجد أن

٥ س — ١٥ — ٤٢ + ٧ س = ٢٤ — ٢٤ + ٣ س — ٣

ثم نختصر الحدود فيحدث أن ١٢ س — ٥٧ = ٣ س — ٣

ثم نطرح ٣ س من كل من الطرفين فينتج أن ٩ س — ٥٧ = — ٣ (البديهى الثانى)

وبضم ٥٧ إلى كل من الطرفين نجد أن ٩ س = ٥٤ (البديهى الأوّل)

و بالقسمة على ٩ ينتج أن س = ٦ (البديهى الرابع)

[التحقيق : إذا كانت س = ٦

فالطرف الأيمن = ٥ (٦ — ٣) — ٧ (٦ — ٦)

= ٥ × ٣ — ٠ = ١٥

والطرف الأيسر = ٢٤ — ٣ (٨ — ٦) — ٣

= ٢٤ — ٣ × ٢ — ٣

= ٢٤ — ٩ = ١٥

فالحل إذن صحيح]

(مثال ٢) لحل المعادلة ٤س/٥ — ٣/١٠ = س/٥ + س/٤

يحسن أن نبدأ بازالة المعاملات الكسرية من طرفى المعادلة وذلك بضرب كل حدّ من حدود طرفى المعادلة فى المضاعف المشترك البسيط للقامات (البديهى الثالث)

فبضرب كل حدّ فى ٢٠ ينتج ١٦ س — ٦ = ٤ س + ٥ س

ثم نطرح ٩ س من كل من الطرفين فيحدث أن

٧ س — ٦ = ٠

و بضم ٦ إلى كل من الطرفين نجد ٧ س = ٦

و بالقسمة على ٧ يحدث أن س = ٦/٧

التحقيق — إذا كانت س = ٦/٧

فالطرف الأيمن = ٤/٥ × ٦/٧ — ٣/١٠ = (٤٨ — ٢١)/٧٠ = ٢٧/٧٠

والطرف الأيسر = ١/٥ × ٦/٧ + ١/٤ × ٦/٧ = (٢٤ + ٣٠)/١٤٠ = ٥٤/١٤٠ = ٢٧/٧٠

فالحل إذن صحيح

بند ٧٢ — قد أسهبنا فى الأمثلة المتقدّمة وأوضحنا كل ما يمكن إيضاحه بتفصيل دقيق ليرى المتعلم بنفسه المراد من كل خطوة من خطوات الحل . وينبغى أن يراعى فى أثناء العمل أن تكون كل خطوة فى سطر جديد وأن تبنى على إحدى البديهيات الأساسية المتقدّم ذكرها و ينبغى أيضا أن يكون الغرض من كل خطوة اختصار المعادلة تدريجا حتى تؤول إلى حدّين أحدهما شامل للمجهول س فى طرف والآخر شامل لكمية معلومة فى طرف آخر وحينئذ نحصل على جذر المعادلة بقسمة الطرفين على معامل س

ولا بدّ من مراعاة النظام والترتيب فى تدوين كل خطوة كما أنه يجب أن توضع علامات التساوى إحداها تحت سابقتها فى صف رأسى على وجه واضح . ونورد التمارين الآتيـة فى حل المعـادلات وهى خالية من الصعوبات قريبة الحل والغرض منها تمرين المتعلم على مراعاة النظام وتعويده الترتيب واختيار الطرق المثلى فى حل المعادلات

(تمـارين ٨)

أوجد مقدار س فى كل من المعادلات الآتية وحقق النتيجة فى كل منها

(١) ٧ س − ٤ = ١٧

(٢) ٣ س − ٥ = ١٠

(٣) ٢ س + ١٥ = ٢٣

(٤) ٥ س − ٩ = ٢١

(٥) ٧ س = ١٨ − [illegible] س

(٦) ٣ س = ٢٥ − ٢ س

(٧) ٤ س − ٣ = ٢ س + ١

(٨) ٥ س + ٢ = ٦ س − ١

(٩) ٣ س + ٢ = ٤ س − ٣

(١٠) ٤ س − ٣ = ٣ س + ٤

(١١) ٨ س − ٩ = ٣٣ − ٤ س

(١٢) ٥ س + ٣ = ١٥ − س

(١٣) ٢ س + ١٥ = ٢٧ − ٤ س

(١٤) ٧ س + ١١ = ٣ س + ٢٧

(١٥) ١٥ − ٥ س = ٢٤ − ٨ س

(١٦) ٩ س + ٢١ − ٤ س = ٤٦

(١٧) ٥ س + ٧ + ٤ س + ١١ + ٣ س = ٢٤

(١٨) ٠ = ٩ − ٦ س − ١٩ + ١٠ س

(١٩) ٧ − ٣ س = ٥ + ٤ س + ١١ − ١٦ س

(٢٠) − ٣ س − ٥ = − ٧ س + ١

(٢١) ٦ س + ٧ − ١٩ = ٧ س + ١٣ − ٣ س − ٢١

(٢٢) ٣ س + ٤ + ١٠ س − ١٧ = ١٤ − ٢٣ س + ١٦ − ٧ س

حل المعادلات الآتية وأجر عملية تحقيق الناتج فى كل منها

(٢٣) $\frac{\text{س}}{٣} = \frac{٥}{٦}$

(٢٤) $\frac{\text{س}}{٥} = \frac{٤}{٣}$

(٢٥) $\frac{٢\,\text{س}}{٣} = \frac{٥}{١٢}$

(٢٦) $\frac{٤\,\text{س}}{٥} = \frac{٧}{١٠}$

(٢٧) $\frac{٧\,\text{س}}{٦} = \frac{٤}{٩}$

(٢٨) $\frac{٣\,\text{س}}{٨} = \frac{٥}{٩}$

(٢٩) $\frac{١}{٢}\,\text{س} - \frac{١}{٤}\,\text{س} = \text{س} - ٩$

(٣٠) $\frac{\text{س}}{٣} - \frac{١}{٢} = \frac{\text{س}}{٥} + ١\frac{١}{٢}$

(٣١) $\frac{\text{س}}{٣} - ٢\frac{١}{٢} = \frac{٤\,\text{س}}{٩} - \frac{٢\,\text{س}}{٣}$

(٣٢) $\frac{١}{٨}\,\text{س} + \frac{١}{٦}\,\text{س} - \text{س} = \frac{٥}{٦} - \frac{١}{٢}\,\text{س}$

بند ٧٣ — إذا كثر تمرّن التلميذ حتى ثبتت فى ذهنه الأسـباب الداعية لمراتب العمل المتعدّدة أمكن وضع الحل بطريقة مختصرة

نقل الحدّ عبارة عن تغيير موضعه من أحد طرفى المعادلة إلى الطرف الآخر

وسنبين فيما يأتى أن كل حدّ يمكن نقله من طرف إلى آخر بكتابته بعلامة تغاير علامته الأولى

ففى المعـادلة ٣ س — ٨ = س + ١٢ مثلا

إذا طرحنا س من الطرفين يحدث أن ٣ س — س — ٨ = ١٢

وبضم ٨ إلى الطرفين يحدث أن ٣ س — س = ١٢ + ٨

فنرى أن + س نقلت أى حوّلت من أحد الطرفين إلى الآخر بشكل — س وكذلك نرى أن — ٨ حوّلت من أحد الطرفين إلى الاخر بشكل + ٨ وهكذا الحال فى باقى الحدود

ومما تقدّم يستنتج أن المعادلة لا تتغير بتغيير علامات جميع حدودها لأن ذلك معناه نقل كل حدودها من طرف إلى آخر ثم جعل طرفها الأيمن أيسر والأيسر أيمن

مثـال ذلك — ٣ س — ١٢ = س — ٢٤

فبالنقل يحدث — س + ٢٤ = ٣ س + ١٢

وبتحويل كل من الطرفين إلى الجهة المضادّة للتى كان بها يحدث أن

٣ س + ١٢ = — س + ٢٤

وهى عين المعادلة الأولى مع تغيير علامة كل حدّ من حدودها

بند ٧٤ — الآن يمكن وضع القاعدة العامّة لحل المعادلات البسيطة ذات المجهول الواحد وهى أن تزال أولا الكسور إن وجدت ثم تنقل كل الحدود المشتملة على الكميـة المجهولة إلى طرف والكميات المعلومة إلى الطرف الآخر ثم تختصر الحدود المتشابهة فى كلا الطرفين وبعد هذا يقسم الطرفان على معامل المجهول فتنتج قيمته

(مثـال ١) لحل ٥ س — (٤ س — ٧)(٣ س — ٥) = ٦ — ٣ (٤ س — ٩)(س — ١)

نضرب (٤ س — ٧) فى (٣ س — ٥) و (٤ س — ٩) فى (س — ١) إما بالطريقة العادية أو بمجرّد النظر [راجع بند ٤٤] وهذا قبل إجراء عملية التحويل فنجد أن

٥ س — (١٢ س^٢ — ٤١ س + ٣٥) = ٦ — ٣ (٤ س^٢ — ١٣ س + ٩)

وبرفع الأقواس يحدث أن

٥ س — ١٢ س^٢ + ٤١ س — ٣٥ = ٦ — ١٢ س^٢ + ٣٩ س — ٢٧

فنطرح — ١٢ س^٢ من الطرفين وهو ما لا يترتب عليه شىء مّا من حيث صحة المعادلة

فيكون ٥ س + ٤١ س — ٣٥ = ٦ + ٣٩ س — ٢٧

وبالنقل يحدث أن ٥ س + ٤١ س — ٣٩ س = ٦ — ٢٧ + ٣٥

وبالاختصار يحدث أن ٧ س = ١٤

∴ س = ٢

(ملاحظة) بمـا أن علامة — قبل القوسين تؤثر فى كل حدّ داخل فيهما لا ترفع الأقواس فى أول سطر من الحل حتى تجرى عملية الضرب

(مثال ٢) لحل ٧ س − ٥ [س − { ٧ − ٦ (س − ٣) }] = ٣ س + ١

نرفع الأقواس فيحدث أن

٧ س − ٥ [س − { ٧ − ٦ س + ١٨ }] = ٣ س + ١

أى أن ٧ س − ٥ [س − ٢٥ + ٦ س] = ٣ س + ١

أى أن ٧ س − ٥ س + ١٢٥ − ٣٠ س = ٣ س + ١

وبالنقل يحدث أن ٧ س − ٥ س − ٣٠ س − ٣ س = ١ − ١٢٥

وباختصار الحدود يحدث أن − ٣١ س = − ١٢٤

∴ س = ٤

(تمارين ١٨)

[يحسن فى حل التمارين الآتية أن يكون حل الستة عشر الأولى منها بتفصيل وتطويل بحيث تبين كل خطوة فى العمل مع بيان البديهيات المبنية عليها أما باقى التمارين فيقتصر فيها على نقل الحدود من طرف إلى آخر ليختصر الحل]

حل المعادلات الآتية وحقق الحل فى التمارين من ١ إلى ٢٠

(١) ٣ س + ١٥ = س + ٢٥

(٢) ٢ س − ٣ = ٣ س − ٧

(٣) ٣ س + ٤ = ٥ (س − ٢)

(٤) ٢ س + ٣ = ١٦ − (٢ س − ٣)

(٥) ٨ (س − ١) + ١٧ (س − ٣) = ٤ (٤ س − ٩) + ٤

(٦) ١٥ (س − ١) + ٤ (س + ٣) = ٢ (٧ + س)

(٧) ٥ س − ٦ (س − ٥) = ٢ (س + ٥) + ٥ (س − ٤)

(٨) ٨ (س − ٣) − (٦ − ٢ س) = ٢ (س + ٢) − ٥ (٥ − س)

(٩) ٧ (٢٥ − س) − ٢ س = ٢ (٣ س − ٢٥)

(١٠) ٣ (١٦٩ − س) − (٧٨ + س) = ٢٩ س

(١١) ٥ س − ١٧ + ٣ س − ٥ = ٦ س − ٧ − ٨ س + ١١٥

(١٢) ٧ س − ٣٩ − ١٠ س + ١٥ = ١٠٠ − ٣٣ س + ٢٦

(١٣) ١١٨ − ٦٥ س − ١٢٣ = ١٥ س + ٣٥ − ١٢٠ س

(١٤) ١٥٧ − ٢١ (س + ٣) = ١٦٣ − ١٥ (٢ س − ٥)

(١٥) ١٧٩ − ١٨ (س − ١٠) = ١٥٨ − ٣ (س − ١٧)

(١٦) ٩٧ − ٥ (س + ٢٠) = ١١١ − ٨ (س + ٣)

(١٧) س − [٣ + { س − (٣ + س) }] = ٥

(١٨) ٥ س − (٣ س − ٧) − { ٤ − ٢ س − (٦ س − ٣) } = ١٠

(١٩) ١٤ س − (٥ س − ٩) − { ٤ − ٣ س − (٢ س − ٣) } = ٣٠

(٢٠) ٢٥ س − ١٩ − [٣ − {٤ س − ٥}] = ٣ س − (٦ س − ٥)

(٢١) (س + ١)(٢ س + ٣) = (س + ٣)(٢ س + ٣) − ١٤

(٢٢) (س + ١)^٢ − (س^٢ − ١) = س (٢ س + ١) − ٢ (س + ٢)(س + ١) + ٢٠

(٢٣) ٢ (س + ١)(س + ٣) + ٨ = (٢ س + ١)(س + ٥)

(٢٤) ٦ (س^٢ − ٣ س + ٢) − ٢ (س^٢ − ١) = ٤ (س + ١)(س + ٢) − ٢٤

(٢٥) ٢ (س − ٤) − (س^٢ + س − ٢٠) = ٤ س^٢ − (٥ س + ٣)(س − ٤) − ٦٤

(٢٦) (س + ١٥)(س − ٣) − (س^٢ − ٦ س + ٩) = ٣٠ − ١٥ (س − ١)

(٢٧) ٢ س − ٥ {٣ س − ٧ (٤ س − ٩)} = ٦٦

(٢٨) ٢٠ (٢ − س) + ٣ (س − ٧) − ٢ [س + ٩ − ٣ {٩ − ٤ (٢ − س)}] = ٢٢

(٢٩) س + ٢ − [س − ٨ − ٢ {٨ − ٣ (٥ − س) − س}] = ٠

(٣٠) ٣ (٥ − ٦ س) − ٥ [س − ٥ {١ − ٣ (س − ٥)}] = ٢٣

(٣١) (س + ١)(٢ س + ٣) = ٢ (س + ١)^٢ + ٨

(٣٢) (٣ س − ١)^٢ − ٣ (س^٢ − ١) = س − ١٥

(٣٣) (٣ س + ١)(٢ س − ٧) = ٦ (س − ٣)^٢ + ٧

(٣٤) س^٢ − ٨ س + ٢٥ = س (س − ٤) − ٢٥ (س − ٥) − ١٦

(٣٥) س (س + ١) + (س + ١)(س + ٢) = (س + ٢)(س + ٣) + س (س + ٤) − ٩

(٣٦) ٢ (س + ٢)(س − ٤) = س (٢ س + ١) − ٢١

(٣٧) (س + ١)^٢ + ٢ (س + ٣)^٢ = ٣ س (س + ٢) + ٣٥

(٣٨) ٤ (س + ٥)^٢ − (٢ س + ١)^٢ = ٣ (س − ٥) + ١٨٠

(٣٩) ٨٤ + (س + ٤)(س − ٣)(س + ٥) = (س + ١)(س + ٢)(س + ٣)

(٤٠) (س + ١)(س + ٢)(س + ٦) = س^٣ + ٩ س^٢ + ٤ (٧ س − ١)

بند ٧٥ — من الأمثلة الآتية يتضح أحسن الطرق لحل المعادلات التى تشتمل على معاملات كسرية

(مثال ١) لحل   ٤ − (س − ٩)/٨ = س/٢٢ − ١/٢

نضرب طرفى المعادلة فى ٨٨ وهو المضاعف المشترك البسيط للمقامات فيحدث أن

٣٥٢ − ١١ (س − ٩) = ٤ س − ٤٤

ثم نرفع الأقواس فيحدث أن

٣٥٢ − ١١ س + ٩٩ = ٤ س − ٤٤

وبالنقل يحدث أن   − ١١ س − ٤ س = − ٤٤ − ٣٥٢ − ٩٩

وباختصار الحدود المتشابهة وتغيير العلامات يحدث أن

١٥ س = ٤٩٥

∴ س = ٣٣

(ملاحظة) شرطة الكسر فى الحد − (س − ٩)/٨ تقوم مقام قوس لأن − (س − ٩)/٨ عين − ١/٨ (س − ٩) (راجع بند ٥٨)

بند ٧٦ — يحسن فى بعض الأحيان أن لا نضرب الطرفين فى المضاعف المشترك البسيط للمقامات وذلك متى أمكن إزالة الكسور فى خطوتين أو ثلاث خطوات كما فى المثال الآتى

(مثال ٢) حل (س − ٤)/٣ + (٢س − ٣)/٣٥ = (٥س − ٣٢)/٩ − (س + ٩)/٢٨

إضرب الطرفين فى ٩ فيحدث أن

٣س − ١٢ + (١٨س − ٢٧)/٣٥ = ٥س − ٣٢ − (٩س + ٨١)/٢٨

وبالنقل يحدث أن (١٨س − ٢٧)/٣٥ + (٩س + ٨١)/٢٨ = ٢س − ٢٠

ثم نحذف المقامات بأن نضرب الطرفين فى ٥ × ٧ × ٤ اى فى ١٤٠ فيحدث أن

٧٢س − ١٠٨ + ٤٥س + ٤٠٥ = ٢٨٠س − ٢٨٠٠

∴ ٢٨٠٠ − ١٠٨ + ٤٠٥ = ٢٨٠س − ٧٢س − ٤٥س

∴ ٣٠٩٧ = ١٦٣س

∴ س = ١٩

بند ٧٧ — إذا كانت المعاملات فى معادلة ما كسورا عشرية يمكن تحويل هذه المعاملات الى كسور اعتيادية ثم اتباع ما سبق فى طريق الحل وإن كان يحسن غالبا أن تبقى الكسور العشرية كما هى

(مثال ١) حل ٠٫٦̇ س + ٠٫٢٥ − ١/٩ س = ١٫٨̇ − ٠٫٧٥ س − ١/٣

نحوّل الكسور العشرية إلى اعتيادية فيحدث أن

٢/٣ س + ١/٤ − ١/٩ س = ١ ٨/٩ − ٣/٤ س − ١/٣

وبحذف المقامات نجد أن ٢٤س + ٩ − ٤س = ٦٨ − ٢٧س − ١٢

وبالنقل يحدث أن ٢٤س − ٤س + ٢٧س = ٦٨ − ١٢ − ٩

وباختصار الحدود المتشابهة يحدث أن ٤٧س = ٤٧

∴ س = ١

(مثال ٢) لحل ٠٫٣٧٥ س − ١٫٨٧٥ = ٠٫١٢ س + ١٫١٨٥

ننقل الحدود فيحدث أن ٠٫٣٧٥ س − ٠٫١٢ س = ١٫١٨٥ + ١٨٫٧٥

وبالاختصار يحدث أن (٠٫٣٧٥ − ٠٫١٢) س = ٣٫٠٦

أو ٠٫٢٥٥ س = ٣٫٠٦

∴ س = ٣٫٠٦ / ٠٫٢٥٥

= ١٢

(تمارين ٨ ب)

حل المعادلات الآتية وحقق نتيجة كل من الست عشرة الأولى منها

(١) $\frac{س}{٤} + \frac{س-٥}{٣} = ١٠$

(٢) $\frac{س-٥}{١٠} + \frac{س+٥}{٥} = ٥$

(٣) $\frac{س-٢}{٢} + \frac{س+١٠}{٩} = ٥$

(٤) $\frac{س+١٩}{٥} = ٣ + \frac{س}{٤}$

(٥) $\frac{س-٤}{٧} = \frac{س-١٠}{٥}$

(٦) $\frac{س-١}{٨} = ١ + \frac{س+١}{١٨}$

(٧) $\frac{٤(س+٢)}{٥} = ٧ + \frac{٥س}{١٣}$

(٨) $\frac{س+٤}{١٤} + \frac{س-٤}{٦} = ٢$

(٩) $\frac{س+٢٠}{٩} + \frac{٣س}{٧} = ٦$

(١٠) $\frac{س-٨}{٧} + \frac{س-٣}{٣} + \frac{٥}{٢١} = ٠$

(١١) $\frac{س+٥}{٦} - \frac{س+١}{٩} = \frac{س+٣}{٤}$

(١٢) $\frac{٤-٥س}{٦} - \frac{١-٢س}{٣} = \frac{١٣}{٤٢}$

(١٣) $\frac{٥(س+٥)}{٨} - \frac{٢(س-٣)}{٧} = ٥\frac{١٩}{٢٨}$

(١٤) $\frac{١٤(س+٢)}{٣} - \frac{٦(س-٧)}{٧} = ١٢$

(١٥) $١ + \frac{س}{٢} - \frac{٢س}{٣} = \frac{٣س}{٤} - ٤\frac{١}{٢}$

(١٦) $\frac{س}{٢} + \frac{س}{٣} - \frac{س}{٤} + \frac{س}{٥} = ٧\frac{٥}{٦}$

(١٧) $\frac{٣}{١٦}(س-١) - \frac{٥}{١٢}(س-٤) = \frac{٢}{٥}(س-٦) + \frac{٥}{٤٨}$

(١٨) $س + \frac{٥}{٣}(س-٧) - \frac{٦}{٧}(س-٨) = ٣س - ١٤\frac{١}{٣}$

(١٩) $\frac{٣س}{٤} - \frac{٦}{١٧}(س+١٠) - (س-٣) = \frac{س-٧}{٥١} - ٤\frac{٣}{٤}$

(٢٠) $\frac{٧س}{٥} - \frac{١}{١٤}(س-١١) = \frac{٣}{٧}(س-٢٥) + ٣٤$

(٢١) $٣ + \frac{س}{٤} = \frac{١}{٢}\left(٤ - \frac{س}{٣}\right) - \frac{٥}{٦} + \frac{١}{٣}\left(١١ - \frac{س}{٢}\right)$

(٢٢) $\frac{١}{٥}(س-٨) + \frac{٤+س}{٤} + \frac{س-١}{٧} = ٧ - \frac{٢٣-س}{٥}$

(٢٣) $\frac{١}{٣}\left(\frac{س}{٤} - ٣\right) + \frac{٥س}{٦} - \frac{٥س}{٤} = \frac{س-١٢}{٥} - \frac{س+٣}{٣}$

(٢٤) $س - \left(٣س - \frac{٢س-٥}{١٠}\right) = \frac{١}{٦}(٢س-٥٧) - \frac{٥}{٣}$

(٢٥) $\frac{س}{٤} - \frac{س+١٠}{٥} + ٤\frac{٣}{٤} = س - ١ - \frac{س-٢}{٣}$

(٢٦) $٠,٥١س - ٠,\dot{٣}س = ٠,٢٥س - ١$

(٢٧) $٣ + \frac{س}{٠,٥} = ٧ - \frac{س}{٠,٢}$

(٢٨) $٢,٢٥س - ٠,١٢٥ = ٣س + ٣,٧٥$

(٢٩) $٠,٢س - ٠,١\dot{٦}س = ٠,٦ - ٠,\dot{٣}$

(٣٠) $٠,٦س - ٠,٧س + ٠,٧٥س - ٠,٨٧٥س + ١٥ = ٠$

(٣١) $١٢ \{ ٣\,\text{س} - ٠{,}٢٥ (\text{س} - ٤) - ٠{,}\dot{٣} (٥\,\text{س} + ١٤) \} = ٤٧$

(٣٢) $\frac{٠{,}٢٥ (\text{س} - ٣) + ٠{,}\dot{٣} (\text{س} - ٤)}{٠{,}١٢٥} = ٥\,\text{س} - ١٩$

(٣٣) $\frac{\text{س} + ٠{,}٧٥}{٠{,}١٢٥} - \frac{\text{س} - ٠{,}٢٥}{٠{,}٢٥} = ١٥$

(٣٤) $\frac{٥}{٦}\,\text{س} + ٠{,}٢٥\,\text{س} - ٠{,}\dot{٣}\,\text{س} = \text{س} - ٣$

(٣٥) $٠{,}٥\,\text{س} - ٠{,}\dot{٢}\,\text{س} = ٠{,}\dot{٣}\,\text{س} - ١{,}٥$

(٣٦) $١{,}٥ = \frac{٠{,}٣٦}{٠{,}٢} - \frac{٠{,}٠٩\,\text{س} - ٠{,}١٨}{٠{,}٩}$

(وسنأتى على بعض أمثلة أخرى لحل المعادلات البسيطة تحت عنوان أسئلة متنوعة ٢ (صفحة ٩٠)

بند ٧٨ — قبل أن نختم هذا الباب يحسن لفت نظر التلميذ إلى الأحوال الآتية التى يجب أن يكون على بيّنة منها لكثرة ورود ما يماثلها فى حل المعادلات حتى يتمكن من إيجاد الحل بمجرد النظر

(المثال الأول) لنفرض أن $\frac{٧\,\text{س}}{٥} = \frac{٤}{٣}$

فبضرب الطرفين فى ٥ يحدث أن $٧\,\text{س} = \frac{٤ \times ٥}{٣}$

$\therefore \quad \text{س} = \frac{٤ \times ٥}{٣ \times ٧}$ (١)

(المثال الثانى) لنفرض أن $\frac{٥}{٣\,\text{س}} = \frac{٩}{٧}$

فنضرب كلا من الطرفين فى ٣ س فيحدث أن

$٥ = \frac{٩ \times ٣\,\text{س}}{٧}$

أو $٥ \times ٧ = ٩ \times ٣\,\text{س}$

$\therefore \quad \frac{٥ \times ٧}{٩ \times ٣} = \text{س}$ (٢)

وبالتأمل فى النتيجتين (١) ، (٢) نستنتج القاعدة الآتية

يمكن نقل أحد العوامل التى فى بسط أحد طرفى أى معادلة إلى مقام الطرف الآخر منها

وكذلك يمكن نقل أحد العوامل التى فى مقام أحد طرفى أى معادلة إلى بسط الطرف الآخر منها

وتظهر فائدة تطبيق هذه القاعدة جليا فى المثالين الآتيين

(مثال ١) إذا كان $\frac{٣\,\text{س}}{١٤} = \frac{٩}{٣٥}$

فتكون $\text{س} = \frac{٩ \times ١٤}{٣٥ \times ٣} = ١\frac{١}{٥}$

(مثال ٢) إذا كان $\frac{٢}{\text{س}} = -٥$

فيكون $\frac{٢}{٥} = -\text{س}$

$\therefore \quad \text{س} = -\frac{٢}{٥}$

وبعد تمرّن قليل يجب إجراء العمليات الحسابية عقلا وإذن يستغنى عن الاجراءات الموصلة للنتيجة

(تمارين ٨ ح)

أوجد مقدار س فى كل من المعادلات الآتية

(١) $\frac{٢}{\text{س}} = \frac{٣}{٤}$

(٢) $\frac{٣}{٧} = \frac{\text{س}}{١٤}$

(٣) $\frac{٣}{٥} = \frac{٦}{\text{س}}$

(٤) $-\frac{\text{س}}{٣} = ٢$

(٥) $\frac{\text{س}}{١٧} = \frac{٢٩}{٥١}$

(٦) $\frac{٢\,\text{س}}{١٥} = \frac{٨}{٤٥}$

(٧) $\frac{٣}{٢\,\text{س}} = -\frac{١}{٨}$

(٨) $-\frac{٤\,\text{س}}{١٠} = -\frac{١}{٢}$

(٩) $\frac{٥}{٣\,\text{س}} = \frac{٢٥}{٢٧}$

(١٠) $\frac{٥}{٢\,\text{س}} = -\frac{١٠}{٣}$

(١١) $\frac{١٣}{٢١} = \frac{٦٥\,\text{س}}{٨٤}$

(١٢) $-\frac{٧}{٢} = \frac{١}{٣\,\text{س}}$

(١٣) $\frac{٣}{٨} = \frac{\text{س}}{٤}$

(١٤) $\frac{٨}{٢١\,\text{س}} = -\frac{٤}{٧}$

(١٥) $\frac{٣٦}{٣٥} = \frac{٩}{٥\,\text{س}}$

(١٦) $\frac{٥}{٨} = \frac{١٥}{٢\,\text{س}}$

(١٧) $\frac{\text{س}}{١٨} = \frac{٩}{٤٢}$

(١٨) $\frac{٤}{٣\,\text{س}} = \frac{١٦}{١٧}$

(١٩) $\frac{٤٩}{١٥} = \frac{٧}{٣\,\text{س}}$

(٢٠) $\frac{٥٦}{١٥} = \frac{٨\,\text{س}}{٣}$

(٢١) $\frac{١٩\,\text{س}}{٧} = \frac{٥٧}{٤٩}$

الباب التاسع – التعبير بالرموز

بند ٧٩ — تنشأ أكبر صعوبة يلاقيها المبتدئ فى حل المسائل الجبرية من استعمال الرموز بدلا من الأرقام التى تعود استعمالها فى الحساب . فقد يوجب السؤال ارتباكا وحيرة إذا أريد التعبير عنه برموز جبرية مع أنه قد يكون فى غاية البساطة إذا وضع فى قالب حسابى فاذا طلب من المتعلم أن يجيب عن سؤال ما العدد الذى يزيد على س مقدار ا ربما عجز عن معرفة الجواب مع أنه قد يجيب بسرعة عن سؤال يضاهيه من علم الحساب مثل ما العدد الذى يزيد على ٥٠ مقدار ٦ ولكن معرفة الجواب عن السؤال الحسابى قد ترشده إلى معرفة الجواب عن السؤال الجبرى فكما أن العدد الذى يزيد على ٥٠ مقدار ٦ هو ٥٠ + ٦ كذلك العدد الذى يزيد على س مقدار ا هو س + ا

بند ٨٠ — ربما كانت الأمثلة الآتية أحسن مقدمة لهذا الباب وبعد المثال الأول منها يترك للتعلم الخيار فى الاستعانة بالحساب إذا رأى ضرورة لذلك

(مثال ١) كم تزيد س على ١٧

فاذا وضعنا المطلوب فى قالب حسابى كان نقول كم تزيد ٢٧ على ١٧

يكون الجواب بالبداهة ١٠ وهذا يساوى ٢٧ — ١٧

فاذن زيادة س على ١٧ هى س — ١٧

وبالطريقة عينها يكون نقص س عن ١٧ هو ١٧ — س

(مثال ٢) إذا كانت س أحد جزأى ٤٥ فالجزء الآخر ٤٥ — س

(مثال ٣) إذا كانت س أحد عاملى ٤٥ فالعامل الآخر $\frac{٤٥}{\text{س}}$

(مثال ٤) ما المسافة التى يقطعها رجل فى ا من الساعات إذا قطع ٤ كيلومترات فى الساعة

نقول بما أنه يقطع فى الساعة الواحدة ٤ كيلومترات يقطع فى ا من الساعات قدر ما يقطعه فى الساعة الواحدة ا من المرات أى ٤ ا من الكيلومترات

(مثال ٥) إذا قسم ٢٠ جنيها بالتساوى بين ص من الأشخاص فنصيب كل منهم المبلغ مقسوما على عددهم أى $\frac{٢٠}{ص}$ من الجنيهات

(مثال ٦) إذا قسم ١٧ على ٦ فالخارج ٢ والباقى ٥

أى أن $\frac{١٧}{٦} = ٢ + \frac{٥}{٦}$

فاذا قسمنا ق على م وكان الخارج ح والباقى ب

كان $\frac{ق}{م} = ح + \frac{ب}{م}$

أو $ق = ح م + ب$

فاذا كان المقسوم عليه س والخارج ص والباقى ع فالمقسوم = س ص + ع

(مثال ٧) رجل معه مبلغ يعادل ط من الجنيهات فى جيب وآخر يعادل ع من القروش فى جيب آخر فأخذ س من الجنيهات من الجيب الاول ووضعها فى الجيب الثانى فما مقدار ما صار فى كل جيب مقدّرا بالقروش

بديهى أن ما أضيف إلى الجيب الثانى يساوى ما أخذ من الجيب الاول

∴ الجيب الاول صار به ١٠٠ (ط — س) من القروش

و الجيب الثانى صار به ع + ١٠٠ س من القروش

(تمارين ٩ ا)

(١) ما الكمية التى يجب أن تضم إلى س حتى ينتج ص
(٢) فى أى كمية يجب ضرب ٣ ليكون الناتج ا
(٣) ما المقسوم إذا كان الخارج ب والمقسوم عليه ٥
(٤) بكم ينقص ٢ ح عن ٣ ء
(٥) ما الذى تزيده ٣ ك على ك
(٦) إذا قسمت ١٠٠ إلى جزأين أحدهما س فما الآخر
(٧) إذا كانت ا أحد عاملى ب فما العامل الآخر
(٨) ما العدد الذى ينقص بمقدار ح عن ٢٠
(٩) ما ثمن ا من البرتقال (بالقروش) إذا كان ثمن كل اثنتى عشرة منه ٤ قروش
(١٠) ما ثمن ١٠٠ برتقالة (بالقروش) إذا كان ثمن س منه قرشين
(١١) الفرق بين عددين ١١ وأصغرهما س فما أكبرهما
(١٢) مجموع عددين ح وأحدهما ٢٠ فما الآخر
(١٣) ما الذى تزيده ٩٠ على س
(١٤) ما الذى تزيده س على ٣٠
(١٥) إذا اشتملت ١٠٠ على س خمس مرات فما قيمة س

(١٦) ما ثمن أربعين كتابا بالجنيه المصرى إذا كان ثمن الكتاب سـ من القروش

(١٧) يصير عمر رجل بعد سـ من السنين ٣٦ سنة فما عمره الآن

(١٨) ما عمر رجل بعد ا من السنين إذا كان عمره الآن سـ من السنين

(١٩) إذا حصد سـ من الرجال مزرعة فى ٥ أيام ففى كم يوم يحصدها رجل

(٢٠) ما قيمة سـ إذا كان ٥ سـ يساوى ٢٠

(٢١) ما ثمن ١٢٠ تفاحة بالقروش إذا كان ثمن كل ٢٠ تفاحة منها سـ من القروش

(٢٢) كم ساعة تلزم لقطع سـ من الكيلومترات إذا كانت السرعة ٦ كيلومترات فى الساعة

(٢٣) ما المسافة التى اقطعها فى سـ من الساعات بسرعة صـ من الكيلومترات فى الساعة

(٢٤) مشى رجل صـ من الكيلومترات فى سـ من الأيام فما المسافة التى يقطعها فى اليوم

(٢٥) كم دقيقة تلزم لقطع سـ من الكيلومترات إذا كانت السرعة ا من الكيلومترات فى الساعة

(٢٦) سرعة قطار سـ من الاميال فى الساعة فما الزمن الذى يقطع فيه المسافة من القاهرة إلى الاسكندرية وهى ١٣٠ ميلا

(٢٧) ما المسافة بين بلدين مقدّرة بالكيلومترات إذا كان القطار الذى يسير ط من الكيلومترات فى الساعة يقطعها فى ٥ ساعات

(٢٨) ما السرعة بالسنتيمترات فى الثانية لقطار يسير ٣٠ كيلو مترا فى سـ من الساعات

(٢٩) رجل معه ا من الريالات ، ب من أنصافها فكم قرشا معه

(٣٠) إذا صرفت سـ من القروش من ٢٠ جنيها انجليزيا فكم قرشا يبقى معى

(٣١) رجل صرف حـ من البنسات من كيس فيه ا من الجنيهات الانجليزية ، ب من الشلنات فكم بنسا بقيت معه

(٣٢) كم تزيد ٢ سـ — ٥ على سـ + ١

(٣٣) ما العدد اللازم طرحه من ا — ٢ ب ليكون باقى الطرح ا — ٣ ب

(٣٤) اشترك سـ من الاشخاص فى دفع مبلغ بالتساوى فدفع كل ٤٠ قرشا فما مقدار المبلغ بالقروش

(٣٥) إذا تصدّقت بمقدار خـ من القروش من كيس فيه ا من الجنيهات ، ب من الريالات فكم قرشا يبقى معى

(٣٦) فى كم اسبوع يأكل سـ من الخيل مائة كيلة شعير إذا كان الحصان الواحد يأكل صـ من الكيلات فى الاسبوع

(٣٧) إذا كنت اصرف سـ من القروش فى الاسبوع فكم جنيها اقتصد من إيراد سنوى قدره صـ من الجنيهات

(٣٨) رف عليه سـ من الكتب العربية ، صـ من الكتب الفرنسية ، ع من الكتب الانجليزية فما عدد الكتب الموضوعة بلغات أخرى إذا كان ما على الرف ١٠٠ كتاب

(٣٩) معى سـ من الجنيهات فى جيب ، صـ من أنصاف الريالات فى آخر ، ع من القروش فى ثالث فما يبقى معى بالقروش بعد أن أتصدق بمبلغ ١٢ قرشا

(٤٠) مكتب فيه سـ من التلاميذ نبغ صـ منهم فى الادبيات ، ع فى الرياضيات ولم ينبغ الباقون فى شىء فكم مقدار زيادة النابغين على غير النابغين

بند ٨١ — لنأت الآن ببعض أمثلة أصعب من السابقة مع شرح طريقة حلها بدون اختصار

(مثال ١) يصير عمر رجل بعد سـ من السنين قدر عمر ابنه م من المرات فما عمر الرجل الآن مع العلم بأن عمر الابن فى الوقت الحاضر صـ من السنين

لحل هذه المسألة نقول إنه بعد سـ من السنين يصير عمر الابن صـ + سـ من السنين

ويكون عمر الاب وقتئذ م (صـ + سـ) من السنين

فاذن عمر الاب الآن م (صـ + سـ) — سـ من السنين

(مثال ٢) ما الربح البسيط لمبلغ م من الجنيهات فى ن من السنين بسعر ع فى المائة

لذلك نقول إن ربح ١٠٠ جنيه لمدة سنة ع من الجنيهات

فيكون ربح جنيه لمدة سنة $\frac{ع}{١٠٠}$ من الجنيهات

ويكون ربح م من الجنيهات لمدة سنة $\frac{م ع}{١٠٠}$ من الجنيهات

ويكون ربح م من الجنيهات فى ن من السنين $\frac{ن م ع}{١٠٠}$ من الجنيهات

(مثال ٣) طول قاعة ن من الياردات وعرضها هـ من الأقدام وارتفاعها ع من الأقدام فبكم ياردة مربعة من البساط تفرش أرضها وبكم ياردة مربعة من الورق تكسى جدرانها

(١) مساحة الأرض = ٣ ن هـ من الأقدام المربعة

إذن عدد الياردات المربعة اللازمة من البساط = $\frac{٣ ن هـ}{٩} = \frac{ن هـ}{٣}$

(٢) محيط القاعة = ٢ (٣ ن + هـ) من الأقدام

∴ سطح الجدران = ٢ ع (٣ ن + هـ) من الأقدام المربعة

∴ عدد الياردات المربعة اللازمة من الورق = $\frac{٢ ع (٣ ن + هـ)}{٩}$

(مثال ٤) أرقام عدد مبتدأة من اليمين حـ ، ب ، ا فما العدد

لذلك نقول إن حـ رقم الآحاد لوقوعه فى خانة الآحاد ، ب رقم العشرات لوقوعه فى خانة العشرات ، ا رقم المئات لوقوعه فى خانة المئات فالعدد إذن = ا من المئات ، ب من العشرات ، حـ من الآحاد ويكون هو ١٠٠ ا + ١٠ ب + حـ

وإذا قلب وضع الأرقام تكون عدد آخر دل عليه بالرموز هكذا

١٠٠ حـ + ١٠ ب + ا

(مثال ٥) ما حاصل جمع ثلاثة أعداد متتالية أصغرها ن ثم ما حاصل ضربها

العددان التاليان للعدد ن هما ن + ١ ، ن + ٢

∴ حاصل جمع الأعداد الثلاثة = ن + (ن + ١) + (ن + ٢) = ٣ ن + ٣

وحاصل ضربها = ن (ن + ١) (ن + ٢)

(ملاحظة) يمكن أن يرمز لأى عدد زوجى بالكمية ٢ ن التى فيها ن = أى عدد صحيح موجب لأن ٢ ن تقبل القسمة على ٢ دائما وأى عدد فردى يمكن أن يرمز له بالكمية ٢ ن + ١ لأن هذا العدد لو قسم على ٢ كان الباقى واحدا دائما

(مثال ٦) كم يوما يحصد فيها رجال عددهم ا أفدنة عددها ب مع العلم بأن ح من الأولاد يحصدون ا من الأفدنة فى ب من الأيام وشغل كل رجل يعادل شغل ى من الأولاد

لذلك نقول

بما أن ح من الأولاد يحصدون ا من الأفدنة فى ب من الأيام

∴ الولد يحصد ا « فى ب ح «

∴ ى من الأولاد (أى الرجل الواحد) يحصدون ا من الأفدنة فى $\frac{ب ح}{ى}$ من الأيام

∴ ا من الرجال يحصدون ا من الأفدنة فى $\frac{ب ح}{ا ى}$ من الأيام

∴ ا « « فدانا فى $\frac{ب ح}{ا^٢ ى}$ «

∴ ا « « ب من الأفدنة فى $\frac{ب^٢ ح}{ا^٢ ى}$ «

(تمارين ٩ ب)

(١) أكتب أربعة أعداد متتالية أصغرها س

(٢) أكتب ثلاثة أعداد متتالية أكبرها ص

(٣) أكتب خمسة أعداد متتالية أوسطها س

(٤) ما العدد الزوجى التالى للعدد ٢ ى

(٥) ما العدد الفردى الذى يليه العدد ٢ س + ١

(٦) ما مجموع ثلاثة الأعداد الفردية المتتالية التى أوسطها ٢ ى + ١

(٧) سار رجل س من الكيلومترات قطع منها ا من الكيلومترات بالعربة و ب من الكيلومترات بالقطار ثم أتمها فى سفينة فما المسافة التى قطعها بالسفينة

(٨) يأكل حصان ا من الكيلات من الحبوب فى الأسبوع ويأكل حمار ب من الكيلات من الحبوب فى الأسبوع فكم كيلة يأكلانها فى ى من الأسابيع

(٩) إذا كان عمر رجل منذ ٥ سنين س من السنين فكم سنة يصير عمره بعد أن يمضى من الآن ص من السنين

(١٠) عمر ولد س من السنين وبعد ٥ سنين يصير عمره نصف عمر أبيه وقتئذ فما عمر أبيه الآن

(١١) رجل كان عمره منذ ص من السنين قدر عمر طفل م من المرات وكان عمر الطفل وقتئذ س من السنين فما عمر الرجل الآن

(١٢) عمر أحمد ضعف عمر محمود وعمر محمود ٣ أمثال عمر مصطفى وعمر مصطفى س من السنين فما عمر أحمد

(١٣) ما ربح ١٠٠٠ جنيه فى ب من السنين بسعر ح ٪

(١٤) ما ربح س من الجنيهات فى ا من السنين بسعر ٥ ٪

(١٥) ما ربح ٥٠ ا من الجنيهات فى ا من السنين بسعر ا ٪

(١٦) ما ربح ٢٤ س ص من الجنيهات فى س من الأشهر بسعر ص فى المائة فى السنة

(١٧) طول قاعة س من الأمتار وعرضها ص من الديسيمترات فما مساحة أرضها بالأمتار المربعة
(١٨) قاعة مربعة طول ضلعها س من السنتيمترات فكم مترا مربعا من البساط تلزم لفرشها
(١٩) طول قاعة ط من الديسيمترات وعرضها س من الأمتار فبكم متر من البساط الذى عرضه $\frac{٣}{٤}$ المتر تفرش
(٢٠) كم ينفق بالجنيه المصرى على فرش قاعة بالبساط إذا كان طولها ا من الأمتار وعرضها ب من الديسيمترات مع العلم بأن ثمن المتر المربع ح من القروش
(٢١) كم ياردة من البساط الذى عرضه س من البوصات تلزم لفرش قاعة طولها ص من الأقدام وعرضها ع من الأقدام
(٢٢) طول قاعة ا من الأمتار وعرضها ب من الأمتار وفى وسطها بساط مربع طول كل من أضلاعه ح من الأمتار فبكم متر مربع من المشمع يفرش مابقى من القاعة
(٢٣) كم كيلو مترا يمشى شخص فى ٤٥ دقيقة إذا كان ما يقطعه فى س من الساعات ا من الكيلومترات
(٢٤) ما الزمن الذى يقطع فيه شخص ب من الكيلومترات إذا كان ما يقطعه فى ح من الساعات ٢٠ كيلومترا
(٢٥) إذا قطع قطار ا من الكيلومترات فى ب من الساعات فكم سنتيمترا يقطع فى الثانية
(٢٦) قطار يسير بسرعة س من السنتيمترات فى الثانية فكم كيلومترا يقطعها فى ص من الساعات
(٢٧) ما الزمن الذى يحصد فيه س من الرجال ص من الأفدنة إذا كان مايحصده الرجل فى اليوم ع من الأفدنة
(٢٨) كم رجلا ينجزون فى س من الساعات ما ينجزه ص من الرجال فى س ع من الساعات
(٢٩) ما السعر فى المائة الذى يأتى منه ربح قدره ص من الجنيهات لمبلغ ١٠٠٠ جنيه فى س من السنين
(٣٠) ما الزمن الذى ينتج فيه مبلغ ا من الجنيهات ربحا قدره ط من الجنيهات بسعر م فى المائة فى السنة

الأمثلة الآتية تساعد التلميذ على وضع فروض المسائل على هيئة معادلات

(٣١) ص حاصل ضرب ثلاثة أعداد متتالية أكبرها ط بيّن ذلك بمعادلة
(٣٢) مجموع ثلاثة أعداد زوجية متتالية س وأوسطها ٢ ى بيّن ذلك بمعادلة
(٣٣) حاصل ضرب ط و ك خمسة أمثال باقى طرح ب من ا بين ذلك بمعادلة
(٣٤) خارج قسمة س على ص يزيد على مجموع م و ى بعشرة بيّن ذلك برموز جبرية
(٣٥) عمر رجل يزيد على عمر ابنه س من السنين وعمر الابن الآن ا من السنين وبعد ٥ سنين يصير عمر الأب ضعف عمر ابنه بيّن ذلك برموز جبرية واذا كان عمر الابن الآن ١٥ سنة فما عمر الأب الحالى واذا كان عمر الوالد الآن ٥٣ سنة فما عمر ابنه الحالى
(٣٦) أحمد معه ط من الجنيهات ومحمد معه ن من القروش فأعطى أحمد محمدا س من الجنيهات ووجد أن ما بقى معه يساوى ثلاثة أمثال ما مع محمد بيّن ذلك بمعادلة
(٣٧) رجل عمره ط من السنين وله ولد عمره ن من السنين ومنذ ٥ سنين كان عمر الوالد سبعة أمثال عمر ابنه بيّن ذلك برموز جبرية

القوانين

بند ٨٢ — برهنا فى مثال ٦ بند ٨٠ على أن $\frac{ن}{م} = ح + \frac{ب}{م}$ وهى نتيجة تبين بطريقة عامة مختصرة الارتباط بين المقسوم والمقسوم عليه وخارج القسمة وباقيها

وهذا مثال لنوع عام من الصور الجبرية المسماة بالقوانين التى سنشرح فيما يلى فائدتها وتطبيقها بالايجاز

(تعريف) القانون ارتباط ثبت بالبرهان بين كميات معينة يمكن اعتبار أيها مجهولا

فاذا فرض فى القانون السابق أن ح ، ب ، م كميات معلومة آل الأمر إلى معادلة يمكن استخراج ن منها وهاك مثالا لبيان استعمال هذا القانون

ما العدد الذى إذا قسم عليه ٩٦ كان الخارج ٥ والباقى ١١ فالمعلومات هنا هى ن = ٩٦ ، ح = ٥ ، ب = ١١ فبوضع المقادير بدل الحروف يحدث

$$\frac{٩٦}{م} = ٥ + \frac{١١}{م}$$

ومنها ينتج أن م = ١٧ وهو المقسوم عليه

بند ٨٣ — ليلاحظ أن القانون يشمل كل الأحوال الخصوصية منحصرة فى عبارة واحدة عامة فباستعمال قانون جبرى واحد نتمكن من أن نبين بالاختصار جملة نتائج مرتبطة بعضها ببعض فى صورة نرى بساطتها لأول وهلة ويسهل تذكرها وتطبيقها

وسيعلم التلميذ بالتجربة عند تطبيق هذه القوانين ما لعلم الجبر من الفائدة فى تسهيل حل مسائل كثيرة متنوعة وأنه وإن كان لا يسع المقام هنا سوى التلميح لفروع الرياضة الأخرى والعلوم الطبيعية ربما كان من المفيد لأهمية الموضوع وفائدته توجيه نظر الطالب إلى بعض القوانين الجبرية البسيطة التى ربما تصادفه فيما يدرسه من العلوم الأخرى

(١) إذا كانت ق قاعدة مثلث ، ع ارتفاعه يمكن إيجاد مساحته م من القانون

$$م = \frac{١}{٢} ق ع$$

(٢) إذا كانت مساحة قاعدة هرم $ق^٢$ وارتفاعه ع يمكن إيجاد حجمه ح من القانون

$$ح = \frac{١}{٣} ق^٢ ع$$

وإذا كانت وحدة الطول المختارة فى الحالتين السابقتين السنتيمتر أو المتر أو القدم أو ... ... كانت الوحدات الناتجة فى الحاصل سنتيمترات أو أمتارا أو أقداما أو ... ... مربعة فى حالة المثلث أو سنتيمترات أو أمتارا أو أقداما أو ... ... مكعبة فى حالة الهرم وفى القانونين السابقين متى علمت اثنتان من ثلاث الكميات سهل الحصول على الثالثة المجهولة بالحساب فمثلا إذا كان طول ضلع قاعدة هرم الجيزة الأكبر ٧٦٤ قدما وارتفاعه ٤٨٠ قدما وأريد معرفة حجم الحجارة التى استعملت فى بنائه مقدرة بالأقدام المكعبة مع العلم بأن قاعدة الهرم مربع نقول

من القانون نعلم أن $ح = \frac{١}{٣} \times (٧٦٤)^٢ \times ٤٨٠$

$$= ١٦٠ \times ٧٦٤ \times ٧٦٤$$

$$= ٩٣٣٩١٣٦٠ \text{ قدما مكعبا}$$

بند ٨٤ — قد أوردنا فى هـذا الباب أمثلة كثيرة تتضمن المسافة والسرعة والزمن وكلها تحل بالاستنتاج البسيط بلا مشقة وهى فى الحقيقة حالات خصوصية للقانون العام م = س ر الذى تدل فيه م على المسافة التى يقطعها جسم متحرك بسرعة منتظمة س فى زمن ر

ففى هذا القانون إذا دلت ر على عدد الثوانى التى يتحرك فيها الجسم ، س على عدد السنتيمترات التى يقطعها فى الثانية دلت م على المسافة المقطوعة فى الزمن ر مقدرة بالسنتيمترات

مثـال ذلك : إذا كانت سرعة قطار ٢٢٥٠ سنتيمترا فى الثانية وأريد معرفة الزمن الذى يمر فيـه على جسر طوله ٢٧٠ مترا نقول

إننا إذا عوّضنا فى القانون السابق عن كل من م ، س ما يساويه من السنتيمترات ينتج أن

$$٢٧٠٠٠ = ٢٢٥٠ \, ر$$

$$ر = \frac{٢٧٠٠٠}{٢٢٥٠}$$

$$= ١٢$$

ويكون الزمن حينئذ ١٢ ثانية

بند ٨٥ — وهناك حالة أخرى مهمة جدا وهى حالة جسم ساقط فى اتجاه رأسى بتأثير جذب الأرض

فمن القواعد المقررة فى علم الديناميكا أن كل جسم ساقط إذا كان مبتدئا من سكون كانت المسافة م التى يقطعها مقدرة بالسنتيمترات فى زمن ر مقدرا بالثوانى مبينة بالقانون الآتى

$م = \frac{١}{٢} \, ح \, ر^٢$ وفى هذا القانون تدل ح على عدد السنتيمترات التى تزيد بها سرعة الجسم الساقط فى كل ثانية على سابقتها بسبب جذب الأرض وقد وجد بالتجربة أن ح = ٩٧٩ سنتيمترا تقريبا

(مثـال ١) سقط جسم من مأذنة فوصل الأرض بعد ٤ ثوان فما ارتفاع المأذنة

بتطبيق القـانون نجد أن $م = \frac{١}{٢} \times ٩٧٩ \times ٤^٢$

$$= ٧٨٣٢ \text{ سنتيمترا}$$

فيكون ارتفاع المأذنة حينئذ ٧٨,٣٢ من الأمتار

(مثـال ٢) ما الزمن الذى يصل فيه حجر إلى قاع بئر عمقها ٤٤٠٥,٥ من السنتيمترات

بتطبيق القانون نجد أن $٤٤٠٥,٥ = \frac{١}{٢} \times ٩٧٩ \times ر^٢$

$$ر^٢ = \frac{٤٤٠٥,٥ \times ٢}{٩٧٩} = ٩$$

$$\therefore \quad ر = ٣$$

فالزمن حينئذ ٣ ثوان

(تمـارين ٩ ح)

(١) أوجد بواسطة قانون مساحة المثلث المذكور بالبند ٨٣

(أولا) المساحة حينما تكون القاعدة ٣٢ سنتيمترا والارتفاع ١٧ سنتيمترا

(ثانيا) القاعدة حينما تكون المساحة ٥٦ سنتيمترا مربعا والارتفاع ٧ سنتيمترات

(ثالثا) الارتفاع حينما تكون المساحة ٧,١ من الآرات والقاعدة ٣٥,٥ من الامتار

(٢) أوجد بواسطة القانون ٢ المذكور فى بند ٨٣

(أولا) حجم هرم ارتفاعه ٤٠ سنتيمترا وسطح قاعدته ١٩٥ سنتيمترا مربعا

(ثانيا) حجم هرم ارتفاعه ٦٠ سنتيمترا وقاعدته مربع ضلعه ١٥ سنتيمترا

(ثالثا) ارتفاع هرم حجمه ٢٠ مترا مكعبا وسطح قاعدته ١٢ مترا مربعا

(٣) حل المسائل الآتية بواسطة القانون المذكور بالبند ٨٤ وهو م = س ر

(أولا) كم كيلومترا يقطعها قطار يسير ٨٤ دقيقة بسرعة ٣٥ كيلومترا فى الساعة

(ثانيا) ما الزمن الذى يقطع فيه قطار ٥٦ كيلومترا إذا كانت سرعته ٤٢ كيلومترا فى الساعة

(ثالثا) قطار يسير ٥٥٠٠ متر فى خمس دقائق فما سرعته بالكيلومتر فى الساعة

(٤) أوجد بواسطة القانون م = $\frac{١}{٢}$ ح ر^{٢} الوارد بالبند ٨٥ ما يأتى

(أولا) ارتفاع سارية إذا استغرق حجر ثلاث ثوان فى سقوطه من قمتها إلى الأرض

(ثانيا) الزمن الذى يستغرقه حجر فى سقوطه من طيارة ارتفاعها عن سطح الأرض ١٢٢٫٣٧٥ من الأمتار

(٥) من الأمور المقررة أن طول المحيط م فى الدائرة يساوى قطرها ق مكررا مرات عددها ط ومساحتها س تساوى مربع نصف قطرها نق مكررا مرات عددها ط بين هاتين النتيجتين بقانونين جبريين

إذا كانت ط تساوى $\frac{٢٢}{٧}$ فما محيط ومساحة كل من دائرتين نصف قطر إحداهما ٧ سنتيمترات ونصف قطر الأخرى ٥٦ سنتيمترا

(٦) إذا كان القانون الذى يستخرج منه السطح س لكرة نصف قطرها نق هو

س = ٤ × $\frac{٢٢}{٧}$ نق^{٢}

فعيّن (١) سطح كرة نصف قطرها ١٤ سنتيمترا

(٢) نصف قطر كرة سطحها ٣٨٥٠ سنتيمترا مربعا

(٧) حجرة طولها ل من الأمتار وعرضها هـ من الأمتار وارتفاعها ع من الأمتار والمطلوب وضع القوانين التى يستخرج منها

(١) محيط أرض الحجرة

(٢) مسطح أرضها

(٣) مسطح حيطانها

(٨) عيّن بواسطة القوانين المشار إليها فى التمرين السابق محيط ارض حجرة ومساحتها وكذلك المساحة السطحية لحيطانها مع العلم بأن طول الحجرة ٦٫٥ من الأمتار وعرضها ٤٫٧٥ من الأمتار وارتفاعها ٥ أمتار

(٩) استخرج من القانون (٣) فى التمرين ٧ ارتفاع قاعة طولها ٥٫٧٥ من الأمتار وعرضها ٤ أمتار ومسطح حيطانها ١٢٦٫٧٥ من الأمتار المربعة

(١٠) إذا كان القانون الذى يستخرج منه السطح س لمتوازى الأضلاع الذى قاعدته ن وارتفاعه ع هو
س = ن ع
فعيّن (١) سطح متوازى الأضلاع الذى قاعدته ٥,٥ من السنتيمترات وارتفاعه ٤ سنتيمترات
(٢) سطح متوازى الأضلاع الذى قاعدته ٢,٤ من البوصات وارتفاعه ١,٥ من البوصات
(١١) مساحة متوازى الأضلاع ٤,٢ من الأمتار المربعة وقاعدته ٢,٨ من الامتار فما ارتفاعه
(١٢) مساحة شبه المنحرف = $\frac{1}{2}$ (مجموع الضلعين المتوازيين) × (البعد بينهما) بيّن ذلك بالرموز الجبرية وطبق القانون فى إيجاد مساحة شبه منحرف طول أحد ضلعيه المتوازيين ٦,٥ من الأمتار وطول الآخر ٧,٥ من الأمتار والبعد بينهما ٤ أمتار
(١٣) إستعمل القانون المشار إليه (فى بند ٨٠ مثال ٦) فى إيجاد العدد الذى إذا قسم على ١٩ يكون خارج القسمة ١٧ وباقيها ٥
(١٤) على أى عدد نقسم ٥٦٦ ليكون الخارج ٣٧ والباقى ١١
(١٥) رجل يصير عمره بعد ٥ سنوات ثلاثة أمثال عمر ولده البالغ الآن ١٥ سنة ما عمر الرجل الآن حقق الجواب بالتعويض فى القانون المذكور بالبند ٨١ (مثال ١)
(١٦) ا ، ب ضلعا القائمة من مثلث قائم الزاوية ، حـ وتر المثلث ومعلوم أن حـ^2 = ا^2 + ب^2
بيّن بالتعويض ما يصلح من مجاميع الأعداد الآتية أن يكون أضلاع مثلث قائم الزاوية
(أولا) ٧ ، ٢٤ ، ٢٥
(ثانيا) ١٢ ، ٣٥ ، ٣٦
(ثالثا) ١,٦ ، ٦,٣ ، ٦,٥
(١٧) المستطيل الذى بعداه مستقيمان أحدهما مقسم إلى عدد ما من الأجزاء يكافئ مجموع المستطيلات المكوّنة من المستقيم غير المجزأ وأجزاء المستقيم المجزأ . أثبت ذلك جبريا بوضع رموز تدل على المستقيم غير المجزأ وأجزاء المستقيم الآخر
(١٨) ا ب مستقيم مقسم إلى جزأين أيا كانا فى نقطة حـ أثبت جبريا كما فى المثال السابق أن
(١) $\overline{\text{ا ب}}^2$ = ا ب . ا حـ + ا ب . حـ ب
(٢) ا ب . ا حـ = $\overline{\text{ا حـ}}^2$ + ا حـ . حـ ب
وفسر هاتين النتيجتين بالألفاظ كما فى التمرين (١٧)
(١٩) اثبت جبريا النظريتين الآتيتين
(اولا) إذا قسم مستقيم إلى جزأين أيا كانا فالمربع المنشأ عليه يكافئ مجموع المربعين المنشأين على هذين الجزأين مضافا إلى هذا المجموع ضعف المستطيل المكوّن من هذين الجزأين
(ثانيا) إذا قسم مستقيم إلى جزأين أيا كانا فمجموع المربعين المنشأ أحدهما على المستقيم جميعه والآخر على أحد الجزأين يكافئ ضعف المستطيل الذى بعداه ذلك المستقيم والجزء المشار إليه مضافا إلى ذلك المربع المنشأ على الجزء الآخر
بيّن نتيجتى هاتين النظريتين بكيفية مماثلة للمذكورة فى (١) ، (٢) تمرين ١٨

(٢٠) باستعمال الرموز المذكورة فى تمرين ١٦ أوجد قيمة
(١) ح متى كانت ا = ١٥ ، ب = ٨
(٢) ا متى كانت ح = ٢٥ ، ب = ٧
(٣) ب متى كانت ح = ٤١ ، ا = ٩
(٤) ا متى كانت ح = ٦,٥ ، ب = ٦,٣
(٢١) إذا كانت ط = ٣,١٤١٦ ، ل = ٦١,١٨٧٥ ، م = ١٧٦٢٢ ، ح = ٩٧٩ ، ك = ١٨,٧٥ ، س = ٥,٦ فما قيمة

(١) ط $\sqrt{\frac{ل}{ح}}$ (٢) $\sqrt{٢ ح م}$ (٣) $\frac{١}{٢}$ ك س

(٢٢) ما مقدار س فى القانون ن = $\frac{ك س^٢}{ح ى}$ إذا كانت ك = ٢٢ ، ى = ٨٩ ، ح = ٩٧٩ ، ن = ٢٠٠
(٢٣) ما قيمة ع فى القانون $س_١^٢ - س_٢^٢$ = ٢ ع م إذا كانت $س_١$ = ٥٠ ، $س_٢$ = ١٠ ، م = ١٠٠
(٢٤) إستخرج من القانون ح = $\frac{ن}{٢}$ (ا + ل)
(أولا) قيمة ح متى كانت ن = ٢٠ ، ا = ١٤ ، ل = ٩٦٤
(ثانيا) قيمة ا متى كانت ح = ٢٥,٢ ، ن = ١٢ ، ل = ٣,٢
(ثالثا) قيمة ن متى كانت ح = ٤٦,٨ ، ا = ٠,٦ ، ل = ٧,٢
(رابعا) قيمة ل متى كانت ح = ١٧٥,٥ ، ا = ١٣,٥ ، ن = ١٣
(٢٥) إذا كانت ص = ٤ + $\frac{٣}{١٠}$ س فما قيمتها إذا كانت س صفرا ، ٤ ، ٨ ، ١٢ ، ١٦ ، ٢٠

تطبيق : خيط مائل طول المسافة بين العمودين النازلين من طرفيه على الأرض ٢٠ مترا وبعد أى نقطة منه عن أحد العمودين السالفى الذكر س من الأمتار وبعدها الرأسى عن سطح الأرض = ٤ + $\frac{٣}{١٠}$ س من الامتار

إرسم الخيط بمقياس سنتيمتر واحد لكل مترين وبيّن على الرسم ارتفاعه عن الأرض فى كل من طرفيه وعلى مسافات بين كل منها والأخرى ٤ أمتار

الباب العاشر – مسائل تؤول فى حلها إلى معادلات بسيطة

بند ٨٦ — الآن يمكن استعمال القواعد التى عرفناها من الباب السابق فى حل مسائل متنوّعة وطريقة الحل كما يأتى

نفرض أن المجهول س ثم نبين برموز جبرية الفروض الواردة فى رأس المسألة وبذلك تنتج معادلة بسيطة تحل بالطرق المبينة بالباب الثامن

(مثال ١) إذا أريد إيجاد عددين مجموعهما ٢٨ وفرقهما ٤

نفرض أن س أصغر العددين فأكبرهما س + ٤ وحاصل جمعهما س + (س + ٤) وهو يساوى ٢٨ على حسب منطوق المسألة

إذن س + س + ٤ = ٢٨
∴ ٢ س = ٢٤
∴ س = ١٢
، س + ٤ = ١٦

فالعددان إذن ١٢ ، ١٦

يحسن بالمبتدئ أن يحقق النواتج ليكون على ثقة من صحة عمله وذلك بأن يبحث فيما إذا كانت هذه النواتج تنطبق على رأس المسألة أم لا

(مثال ٢) قسم العدد ٦٠ إلى عددين بشرط أن تكون زيادة ثلاثة أمثال أكبرهما على المائة بقدر نقص ثمانية أمثال أصغرهما عن المائتين

نفرض أن سـ العدد الأكبر فيكون العدد الأصغر ٦٠ — سـ ويكون ثلاثة أمثال الأكبر ٣ سـ ومقدار زيادته على المائة ٣ سـ — ١٠٠ ويكون ثمانية أمثال الاصغر ٨ (٦٠ — سـ) ومقدار نقصه عن المائتين ٢٠٠ — ٨ (٦٠ — سـ)

وحينئذ يمكن وضع معلومات المسألة بطريقة الرموز الجبرية على الوجه الآتى

٣ سـ — ١٠٠ = ٢٠٠ — ٨ (٦٠ — سـ)

٣ سـ — ١٠٠ = ٢٠٠ — ٤٨٠ + ٨ سـ

٤٨٠ — ١٠٠ — ٢٠٠ = ٨ سـ — ٣ سـ

٥ سـ = ١٨٠

∴ سـ = ٣٦ العدد الأكبر

٦٠ — سـ = ٢٤ العدد الاصغر

(مثال ٣) لقسمة ٤٧ جنيها بين ا ، ب ، حـ بشرط أن يأخذ ا عشرة جنيهات زيادة على ما يأخذه ب ، ب يأخذ ثمانية جنيهات زيادة على ما يأخذه حـ

نفرض أن نصيب حـ هو سـ من الجنيهات . إذن سـ + ٨ من الجنيهات نصيب ب ، سـ + ٨ + ١٠ من الجنيهات نصيب ا

وإذن سـ + (سـ + ٨) + (سـ + ٨ + ١٠) = ٤٧

سـ + سـ + ٨ + سـ + ٨ + ١٠ = ٤٧

٣ سـ = ٢١

∴ سـ = ٧

فيخص حـ سبعة جنيهات ، ب ١٥ جنيها ، ا ٢٥ جنيها

(مثال ٤) اشترى شخص أوزا وبطا بمبلغ ٢٨ جنيها انجليزيا و ٤ شلنات فاذا كان ثمن الأوزة ٧ شلنات وثمن البطة ٣ شلنات وعدد الأوز والبط معا ١٠٨ فكم اشترى من كل نوع

من الضرورى جدا في كل المسائل التى من هذا القبيل أن نحوّل كل الكميات إلى نوع واحد ففى هذا المثال يحسن تحويل النقود كلها إلى شلنات

فاذا فرض أن سـ عدد الأوز فيكون عدد البط ١٠٨ — سـ ومن حيث إن ثمن الأوزة ٧ شلنات يكون ثمن سـ من الاوز ٧ سـ من الشلنات

ومن حيث إن ثمن البطة ٣ شلنات يكون ثمن (١٠٨ — سـ) من البط ٣ (١٠٨ — سـ) من الشلنات

وتكون جملة الثمن إذن ٧ سـ + ٣ (١٠٨ — سـ) من الشلنات

ولما كان مفروضا فى رأس المسألة أن ثمن الأوز والبط معا ٢٨ جنيها ، ٤ شلنات أى ٥٦٤ شلنا

يكون ٧ سـ + ٣ (١٠٨ — سـ) = ٥٦٤

أى ٧ سـ + ٣٢٤ — ٣ سـ = ٥٦٤

∴ ٤ سـ = ٢٤٠

أى أن سـ = ٦٠ عدد الأوز

∴ ١٠٨ — سـ = ٤٨ عدد البط

(مثال ٥) عمر ا الآن ضعف عمر ب ومنذ عشر سنين كان عمر ا أربعة أمثال عمر ب فما عمر كل منهما الآن

لنفرض أن عمر ب الآن س من السنين فيكون عمر ا الآن ٢ س من السنين ومنذ عشر سنين كان عمر ب هو (س — ١٠) من السنين ، عمر ا هو (٢ س — ١٠) من السنين

فيكون ٢ س — ١٠ = ٤ (س — ١٠)

٢ س — ١٠ = ٤ س — ٤٠

٢ س = ٣٠

∴ س = ١٥

وحينئذ يكون عمر ب ١٥ سنة ، عمر ا ٣٠ سنة

(ملاحظة) فى الأمثلة السابقة دلت س على عدد من الجنيهات أو من البط أو من السنين الخ ويجب أن يتجنب الطالب البدء فى الحل من غير أن يذكر نوع الكمية المجهولة كأن يقول لنفرض أن س = نصيب ا أو لنفرض أن س = البط أو أى عبارة أخرى من هذا القبيل مبهمة وغير مضبوطة

(تمارين ١٠ ا)

(١) عدد يزيد على آخر خمسة ومجموعهما ٢٩ فما هما

(٢) الفرق بين عددين ٨ واذا أضيفت ٢ إلى أكبرهما كان الحاصل ثلاثة أمثال الأصغر فما العددان

(٣) عيّن عددا تكون زيادته على ٥٠ أكبر من نقصه عن ٨٩ بقدر ١١

(٤) مشى رجل عشرة كيلومترات ثم قطع بالقطار مسافة لا يعلم طولها ثم قطع ضعف هذه المسافة بالعربة فما مقدار ما قطعه بالقطار إذا كانت المسافة جميعها ٧٠ كيلومترا

(٥) ما العددان اللذان مجموعهما ٥٨ وفرقهما ٢٨

(٦) إذا أضيف ٢٨٨ إلى عدد وساوى الحاصل ثلاثة أمثال ما يزيده ذلك العدد على ١٢ فما العدد

(٧) حاصل ضرب عدد فى ٢٣ يزيد على ١٤ بقدر ما يزيد ١٦ على ٧ أمثال ذلك العدد فما العدد

(٨) قسم ١٠٥ إلى عددين إذا طرح من أحدهما ٢٠ كان الباقى مساويا الآخر مطروحا منه ١٥

(٩) أوجد ثلاثة أعداد متتالية حاصل جمعها ٨٤

(١٠) حاصل جمع عددين ٨ ولو أضيف إلى أحدهما ٢٢ لساوى خمسة أمثال الآخر فما العددان

(١١) ما العددان اللذان فرقهما ١٠ وحاصل جمعهما ضعف فرقهما

(١٢) رجل معه ٦٠ جنيها فى جيب و ٦٠ جنيها فى جيب ثان فأخذ من أحد الجيبين مبلغا ووضعه فى الجيب الثانى وبذا صار ما فى هذا الأخير ضعف ما فى الأول فما المبلغ الذى أخذه من الجيب الأول

(١٣) أوجد عددا إذا أضيف إليه ٥ ، ١٥ ، ٣٥ على التوالى يكون حاصل ضرب المجموعين الأول والثالث يساوى مربع المجموع الثانى

(١٤) الفرق بين مربعى عددين متتاليين ١٢١ فما العددان

(١٥) الفرق بين عددين ٣ وبين مربعيهما ٢٧ فما العددان

(١٦) قسم ٣٨٠ جنيها بين ثلاثة أشخاص بشرط أن يأخذ الثانى ٣٠ جنيها زيادة على ما يأخذه الأول ويأخذ الثالث ٢٠ جنيها زيادة على ما يأخذه الثانى

(١٧) مبلغ ٨٫٨٥ من الجنيهات مكون من ١٢٤ قطعة من العملة . منها ما هو من ذات عشرة القروش . ومنها ما هو من ذات خمسة القروش . فكم عدد قطع كل نوع

(١٨) إذا كان ثمن الحريرستة أمثال ثمن التيل وصرف ٩٫٤٠ من الجنيهات فى شراء ٢٣ مترا من الحرير و ٥٠ مترا من التيل فما ثمن المترمن كل نوع

(١٩) عمر أب أربعة أمثال عمرابنه وبعد ٢٤سنة يصيرعمر الاب ضعف عمر الابن فما عمر كل منهما

(٢٠) يزيد عمر أحمد على عمر محمد ٢٥ سنة ويزيد عمر الاول ايضا على عشرين بقدر ما ينقص عمر محمد عن ٨٥ فما عمر كل منهما

(٢١) عمرعبيد ٦ أمثال عمرحامد وبعد ١٥سنة يصيرعمرالأول ثلاثة أمثال عمر الثانى فما عمر كل منهما

(٢٢) دفع مبلغ ٣٫٥٠ من الجنيهات قطعا من الريال وأنصافه وأرباعه وكان عدد قطع الصنف الثانى أربعة أمثال عددها من الصنف الأول وضعف عددها من الثالث فكم كان عدد قطع كل نوع

(٢٣) مجموع عمرى محمود ومحمد ٣٠ سنة وبعد ٥ سنين يصير عمر محمود ثلاثة أمثال عمر محمد فما عمر كل منهما الان

(٢٤) طول قاعة يزيد على عرضها ثلاثة أمتار ولو زاد الطول ثلاثة أمتار ونقص العرض مترين لما تغير مقدار سطح القاعة فما مقدار كل من الطول والعرض الأصليين

(٢٥) طول قاعة يزيد على عرضها ثمانية أقدام ولو زاد كل من الطول والعرض قدمين لزاد سطح القاعة ٦٠ قدما مربعا فما مقدار كل من الطول والعرض الاصليين

بند ٨٧ — نأتى الآن على أمثلة تؤول فى حلها إلى معادلات ذات معاملات كسرية

(مثال ١) أوجد عددين الفرق بينهما ٤ ويزيد نصف الأكبر على سدس الأصغر قدر ٨

نفرض أن س = الأصغر فيكون الأكبر س + ٤ ونصف الأكبر $\frac{1}{2}$ (س + ٤)

و سدس الاصغر $\frac{1}{6}$ س

إذن $\frac{1}{2}$ (س + ٤) − $\frac{1}{6}$ س = ٨

وبضرب الطرفين فى ٦ يحدث ٣ س + ١٢ − س = ٤٨

∴ ٢ س = ٣٦

∴ س = ١٨ أصغر العددين

و س + ٤ = ٢٢ أكبرهما

(مثال ٢) رجل معه ١٫٨٠ من الجنيهات فى جيب و ٨٤ قرشا فى جيب آخر فأخذ مبلغا من الجيب الأول ووضعه فى الجيب الثانى وبذا صار ما فى الجيب الأول $\frac{5}{6}$ ما صار فى الجيب الثانى فما المبلغ الذى أخذ من الجيب الاول

نفرض أن ما أخذ من الجيب الأول س من القروش

فيكون مابقى فى الجيب الاول ١٨٠ — س من القروش

وما صار فى الجيب الثانى ٨٤ + س من القروش

وعليه يكون ١٨٠ — س = $\frac{٥}{٦}$ (٨٤ + س)
أى أن ١٠٨٠ — ٦ س = ٤٢٠ + ٥ س
١١ س = ٦٦٠
∴ س = ٦٠
إذن يكون المبلغ الذى أخذ من الجيب الأول ٦٠ قرشا

(تمارين ١٠ ب)

(١) ما العدد الذى مجموع سدسه وتسعه ١٥
(٢) ما العدد الذى مجموع ثمنه وسدسه وربعه ١٣
(٣) الفرق بين خمس عدد وربعه ٣ ما العدد
(٤) الفرق بين ستة أسباع عدد وأربعة أخماسه ٢ ما العدد
(٥) مجموع $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{١}{١٥}$ ، $\frac{١}{٢٥}$ من عدد ٢٣ فما العدد
(٦) ما العددان المتتاليان اللذان يزيد ربع أصغرهما على خمس الأكبر واحدا
(٧) فرق عددين ٢٨ وأحدهما ثمانية أتساع الآخر فما العددان
(٨) ما العددان المتتاليان اللذان يزيد خمس أكبرهما على سبع الأصغر ثلاثة
(٩) ثلاثة أعداد متتالية قسمت على ١٠ ، ١٧ ، ٢٦ بالترتيب فكان مجموع الخوارج ١٠ فما الأعداد
(١٠) رجل معه مبلغان متساويان كل فى جيب فأخذ من أحد الجيبين مبلغا يساوى $\frac{٥}{١١}$ مما فى هذا الجيب ووضعه فى الجيب الثانى فاذا كان هذا المبلغ المضاف إلى الجيب الثانى يزيد على نصف ما بقى فى الجيب الأول بمقدار ٦ جنيهات فما المبلغ الذى كان فى كل جيب أولا
(١١) طرح ٣ من عدد وقسم الباقى على ٤ ثم أضيف إلى الخارج ٤ وقسم حاصل الجمع على ٥ فنتج ٢ فما العدد
(١٢) مخزن به زجاجات مداد خمسها أسود وثلثها أزرق والباقى ١٨٠ زجاجة من المداد البنفسجى و ٣٠ زجاجة من المداد الأحمر فما عدد زجاجات المداد الأسود وما عدد زجاجات المداد الأزرق
(١٣) خمسا نقود ا يساويان نقود ب وسبعة أتساع نقود ب تساوى نقود حـ وجملة ما مع الثلاثة ٧٧٠ جنيها فما مقدار نقود كل منهم
(١٤) مجموع ما يملكه ا ، ب ، حـ ١٢٨٥ جنيها وما مع ا يزيد ٢٥ جنيها على خمسة أسداس ما مع ب وما مع حـ يساوى $\frac{٤}{١٥}$ مما مع ب فما مقدار ما يملكه كل من الثلاثة
(١٥) باع رجل حصانا بنصف ما اشتراه به مضافا إليه خمسة وثلاثون جنيها فربح ١٠٫٥ من الجنيهات فما الثمن الذى اشترى به الحصان
(١٦) عرض قاعة ثلثا طولها فاذا زاد العرض مترا ونقص الطول مترا صارت القاعة مربعة فما طولها وعرضها
(١٧) ما قيمة أملاك شخص إيراده ٤٣٠ جنيها فى السنة إذا كان ثلثا ما يملكه يأتى بربح ٤ ٪ وربعه يربح ٣ ٪ والباقى يربح ٢ ٪
(١٨) إشتريت مقدارا من التفاح فدفعت فى كل ٣ تفاحات قرشا ثم اشتريت ما يعادل خمسة أسداس هذا المقدار فدفعت فى كل ٤ منها قرشا ثم بعت التفاح كله كل ١٦ بستة قروش وكان ربحى فى الكل $\frac{١}{٢}$ ٣ من القروش فكم تفاحة اشتريت فى المرتين .

الباب الحادى عشر

العامل المشترك الأعلى والمضاعف المشترك البسيط للمقادير الجبرية البسيطة

العامل المشترك الأعلى

بند ٨٨ — تعريف : العامل المشترك الاعلى لمقدارين جبريين أو أكثر هو المقدار الذى تكون درجته أكبر ما يمكن ويقسم كلا من المقادير المفروضة بدون باق (بند ٢٤)

ومن باب الاختصار فى الوضع قد تستعمل الحروف الثلاثة ع . م . ا رمزا للعامل المشترك الأعلى

بند ٨٩ — يمكن دائما إيجاد العامل المشترك الأعلى للمقادير البسيطة بمجرد النظر اليها

(مثال ١) العامل المشترك الأعلى للمقادير ا^{٤} ، ا^{٣} ، ا^{٢} ، ا^{٦} هو ا^{٢}

(مثال ٢) العامل المشترك الأعلى للمقادير ا^{٣} ب^{٤} ، ا ب^{٥} حـ^{٢} ، ا^{٢} ب^{٧} حـ هو ا ب^{٤}

لأن ا هى أعلى قوة للحرف ا تقسم كلا من ا^{٣} ، ا ، ا^{٢} وكذا ب^{٤} أعلى قوة للحرف ب تقسم كلا من ب^{٤} ، ب^{٥} ، ب^{٧} أما حـ فليست عاملا مشتركا

بند ٩٠ — إذا كانت المقادير ذات معاملات رقمية يلزم إيجاد القاسم المشترك الأعظم لتلك المعاملات بالطريقة المعروفة فى الحساب وجعله معاملا للعامل المشترك الأعلى الجبرى

مثلا : العامل المشترك الأعلى للمقادير ٢١ ا^{٤} س^{٣} ص ، ٣٥ ا^{٢} س^{٤} ص ، ٢٨ ا^{٣} س ص هو ٧ ا^{٢} س ص لأنه مركب من حاصل ضرب ما يأتى

(أولا) القاسم المشترك الأعظم للمعاملات الرقمية الثلاثة

(ثانيا) أعلى قوة لكل حرف تقسم كلا من المقادير الثلاثة

(تمارين ١١ ا)

أوجد العامل المشترك الأعلى للمقادير الآتية

(١) ٤ ا ب^{٢} ، ٢ ا^{٢} ب

(٢) ٣ س^{٢} ص^{٢} ، س^{٣} ص^{٢}

(٣) ٦ س ص^{٢} ع ، ٨ س^{٢} ص^{٣} ع^{٢}

(٤) ا ب حـ ، ٢ ا ب^{٢} حـ

(٥) ٥ ا^{٣} ب^{٣} ، ١٥ ا ب حـ^{٢}

(٦) ٩ س^{٢} ص^{٢} ع^{٢} ، ١٢ س ص^{٣} ع

(٧) ٤ ا^{٢} ب^{٣} حـ^{٢} ، ٦ ا^{٣} ب^{٢} حـ^{١}

(٨) ٧ ا^{٢} ب^{٤} حـ^{٥} ، ١٤ ا ب^{٢} حـ^{٣}

(٩) ١٥ س^{٢} ص^{١} ع^{٢} ، ١٢ س^{٢} ص ع^{٢}

(١٠) ٨ ا^{٢} س ، ٦ ا ب س ص ، ١٠ ا ب س^{٣} ص^{٢}

(١١) ٤٩ ا س^{٢} ، ٦٣ ا ص^{٢} ، ٥٦ ا ع^{٢}

(١٢) ١٧ ا ب^{٢} حـ ، ٣٤ ا^{٢} ب حـ ، ٥١ ا ب حـ^{٢}

(١٣) ا^{٣} س^{٢} ص^{٢} ، ب س ص^{٢} ، حـ^{٣} س^{٢} ص

(١٤) ٢٤ ا^{٢} ب حـ^{٣} ، ٦٤ ا^{٣} ب^{٣} حـ^{٢} ، ٤٨ ا^{٣} ب^{٢} حـ^{٣}

(١٥) ٢٥ س ص^{٢} ع ، ١٠٠ س^{٢} ص ع ، ١٢٥ س ص

(١٦) ا^{٢} ب ط س ص ، ب^{٢} ق س ص ، ا^{٣} ب س ر^{٢}

(١٧) ١٥ ا^{٥} ب^{٣} حـ^{٧} ، ٦٠ ا^{٣} ب^{٧} حـ^{٦} ، ٢٥ ا^{٤} ب^{٥} حـ^{٢}

(١٨) ٣٥ ا^{٢} حـ^{٣} ب ، ٤٢ ا^{٣} حـ ب^{٢} ، ٣٠ ا حـ^{٢} ب^{٣}

المضاعف المشترك البسيط

بند ٩١ — تعريف : المضاعف المشترك البسيط لمقدارين جبريين أو أكثر هو المقدار الجبرى الذى تكون درجة اركانه أصغر ما يمكن ويقبل القسمة على كل من المقادير المفروضة بدون باق

ومن باب الاختصار فى الوضع قد تستعمل الحروف الثلاثة م . م . ب رمزا للمضاعف المشترك البسيط

بند ٩٢ — المضاعف المشترك البسيط للمقادير الجبرية البسيطة يمكن إيجاده بمجرد النظر اليها

(مثال ١) المضاعف المشترك البسيط للمقادير ا^{٤} ، ا^{٣} ، ا^{٢} ، ا^{٦} هو ا^{٦}

(مثال ٢) المضاعف المشترك البسيط للمقادير ا^{٣} ب^{٤} ، ا ب^{٥} ، ا ب^{٧} هو ا^{٣} ب^{٧}

لأن ا^{٣} أصغر قوة للحرف ا تقبل القسمة على كل من ا^{٣} ، ا ، ا^{٢} وكذا ب^{٧} أصغر قوة للحرف ب تقبل القسمة على كل من ب^{٤} ، ب^{٥} ، ب

بند ٩٣ — إذا كان للمقادير الجبرية معاملات رقمية يستخرج المضاعف المشترك البسيط لتلك المعاملات بالطريقة المعروفة فى علم الحساب ويجعل معاملا للمضاعف البسيط الجبرى للمقادير

(مثال) المضاعف المشترك البسيط للمقادير ٢١ ا^{٤} س^{٢} ص^{٣} ، ٣٥ ا^{٢} س^{٤} ص ، ٢٨ ا^{٣} س ص^{٤} هو ٤٢٠ ا^{٤} س^{٤} ص^{٤} لانه مركب من حاصل ضرب ما يأتى

(أولا) المضاعف المشترك البسيط للمعاملات ٢١ ، ٣٥ ، ٢٨

(ثانيا) أصغر قوة لكل حرف قابلة للقسمة على جميع قوى الحرف المماثل له فى المقادير المعلومة

(تمارين ١١ ب)

أوجد المضاعف المشترك البسيط لكل من المقادير الآتية

(١) ا ب ح ، ٢ ا^{٢}

(٢) س^{٣} ص^{٢} ، س ص ع

(٣) ٣ س^{٢} ص ع ، ٤ س^{٣} ص^{٣}

(٤) ٥ ا^{٢} ب ح^{٣} ، ٤ ا ب^{٢} ح

(٥) ٣ ا^{٤} ب^{٢} ح^{٣} ، ٥ ا^{٢} ب^{٣} ح^{٥}

(٦) ١٢ ا ب ، ٨ س ص

(٧) ا ح ، ب ح ، ا ب

(٨) ا^{٢} ح ، ب ح^{٢} ، ح ب^{٢}

(٩) ٢ ا ب ، ٣ ب ح ، ٤ ح ا

(١٠) ٢ س ، ٣ ص ، ٤ ع

(١١) ٣ س^{٢} ، ٤ ص^{٢} ، ٣ ع^{٢}

(١٢) ٧ ا^{٢} ، ٢ ا ب ، ٣ ب^{٣}

(١٣) ا^{٢} ب ح ، ب^{٢} ح ا ، ح^{٢} ا ب

(١٤) ٥ ا^{٢} ح ، ٦ ح ب ، ٣ ب ح^{٢}

(١٥) ٢ س^{٢} ص^{٣} ، ٣ س ص ، ٤ س^{٣} ص^{٤}

(١٦) ٧ س^{٤} ص ، ٨ س ص^{٥} ، ٢ س^{٣} ص^{٢}

(١٧) ٣٥ ا^{٢} ح^{٣} ب ، ٤٢ ا^{٣} ح ب^{٢} ، ٣٠ ا ح^{٢} ب^{٣}

(١٨) ٦٦ ا^{٤} ب^{٢} ح^{٣} ، ٤٤ ا^{٣} ب^{٤} ح^{٢} ، ٢٤ ا^{٢} ب^{٣} ح^{٤}

أوجد كلا من العامل المشترك الأعلى والمضاعف المشترك البسيط لكل من المقادير الآتية

(١٩) ٢ ا ب ح ، ٣ ح ا ، ٤ ب ح ا

(٢٠) ٢ س ص ، ٤ ص ع ، ٦ ع س ص

(٢١) ٩ ا ب ح ، ٣ ب ح ، ح ا ب

(٢٢) ١٣ ا^{٢} ب ح ، ٣٩ ا^{٣} ب ح^{٢}

(٢٣) ١٧ س ص ع^{٢} ، ٥١ س^{٢} ص

(٢٤) ١٥ س^{٣} ص^{٣} ع ، ٢٥ س ص^{٣} ع^{٢}

(٢٥) ٣ ا ب ، ٢ ب ح ، ٥ ح ا ب

(٢٦) ١٧ م^{٢} ن^{٤} ق^{٢} ، ٥١ م^{٤} ق^{٤}

(٢٧) س^{٣} ص^{٢} ، ص^{٢} ع^{٤} ، ع^{٤} س^{٣} ص^{٥}

(٢٨) ١٥ ق^{٣} ك^{٤} ، ٢٠ م^{٢} ق^{٢} ك^{٣} ، ٣٠ م ق^{١}

(٢٩) ٧٢ ك^{٢} م^{٣} ن^{٤} ، ١٠٨ ك^{٣} م^{٢} ن^{٥}

الباب الثانى عشر – الكسور البسيطة

بند ٩٤ – تعريف : إذا قسمت كمية س إلى اجزاء متساوية عددها ب ثم أخذنا ا من تلك الأجزاء فالمأخوذ يسمى الكسر $\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$ من الكمية س وإذا كانت س هى الوحدة فالكسر $\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$ من الكمية س يسمى الكسر $\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$ فقط وفى هذه الحالة يدل الكسر $\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$ على أجزاء متساوية عددها ا لو أخذ منها عدد يساوى ب لكوّن الوحدة

بند ٩٥ – سنبحث فى هذا الباب فى البسيط من الكسور أى التى بسوطها ومقاماتها مقادير جبرية بسيطة وهذه الكسور تجنس وتختصر على مقتضى الطرق الموضوعة فى علم الحساب أما براهين هذه الطرق فستأتى إن شاء الله فى البابين ١٩ و ٢١

(قاعدة) لاختصار اى كسر إلى أصغر حدّيه نقسم كلا من بسطه ومقامه على كل عامل مشترك بينهما أى نقسمهما على عاملهما المشترك الأعلى وتسمى عملية قسمة كل من البسط والمقام على عامل مشترك بينهما بعملية اعتزال هذا العامل

(مثال ١) $\frac{\text{٦ ا}^{\text{٢}}\text{ حـ}}{\text{١٩ ا حـ}^{\text{٢}}} = \frac{\text{٢ ا}}{\text{٣ حـ}}$

(مثال ٢) $\frac{\text{٧ س ص ع}}{\text{٢٨ س}^{\text{٣}}\text{ ص ع}^{\text{٢}}} = \frac{\text{١}}{\text{٤ س ع}}$

(مثال ٣) $\frac{\text{٣٥ ا}^{\text{٥}}\text{ ب}^{\text{٣}}\text{ حـ}}{\text{٧ ا ب}^{\text{٢}}\text{ حـ}} = \frac{\text{٥ ا}^{\text{٤}}\text{ ب}}{\text{١}} = \text{٥ ا}^{\text{٤}}\text{ ب}$

(تمارين ١٢ ا)

إختصر كلا من الكسور الآتية إلى أصغر حدّيه

(١) $\frac{\text{٣ ا}}{\text{٦ ا ب}}$

(٢) $\frac{\text{٤ ا}^{\text{٢}}}{\text{١٦ ا ب}}$

(٣) $\frac{\text{٢ س ص}^{\text{٢}}}{\text{٥ س ص}}$

(٤) $\frac{\text{٣ ا ب حـ}}{\text{١٥ ا}^{\text{٢}}\text{ ب}^{\text{٢}}\text{ حـ}}$

(٥) $\frac{\text{س}^{\text{٢}}\text{ ص ع}^{\text{٣}}}{\text{س ص ع}}$

(٦) $\frac{\text{١٥ ا ب}}{\text{٢٥ ب حـ}}$

(٧) $\frac{\text{٢١ س}^{\text{٢}}\text{ ص}^{\text{٢}}}{\text{٢٨ ص ع}^{\text{٢}}}$

(٨) $\frac{\text{٨ ا}^{\text{٢}}\text{ ب}}{\text{١٢ ب}^{\text{٢}}\text{ حـ}}$

(٩) $\frac{\text{١٢ م ن}^{\text{٢}}\text{ ط}}{\text{١٥ م}^{\text{٢}}\text{ ن ط}^{\text{٢}}}$

(١٠) $\frac{\text{١٥ م}^{\text{٢}}\text{ ط}^{\text{٣}}}{\text{١٨ ن}^{\text{٤}}\text{ ط}}$

(١١) $\frac{\text{ا ب حـ}^{\text{٢}}}{\text{ا}^{\text{٣}}\text{ ب}^{\text{٢}}\text{ حـ}}$

(١٢) $\frac{\text{٣ س}^{\text{٢}}\text{ ص ع}^{\text{٣}}}{\text{٥ س ص}^{\text{٤}}\text{ ع}^{\text{٢}}}$

(١٣) $\frac{\text{٢ س ص}^{\text{٣}}\text{ ع}^{\text{٤}}}{\text{٤ س}^{\text{٢}}\text{ ص}^{\text{٢}}\text{ ع}}$

(١٤) $\frac{\text{٥ ا}^{\text{٣}}\text{ ب حـ}^{\text{٤}}}{\text{١٥ ا ب}^{\text{٤}}\text{ حـ}}$

(١٥) $\frac{\text{م ن}^{\text{٤}}\text{ ط ك}}{\text{م}^{\text{١}}\text{ ن}^{\text{٣}}\text{ ط}^{\text{٤}}}$

(١٦) $\frac{\text{٤ م}^{\text{٣}}\text{ ن}^{\text{٢}}\text{ ط}^{\text{٥}}}{\text{٦ م}^{\text{٤}}\text{ ن ط}^{\text{٢}}}$

(١٧) $\frac{\text{١٥ ا س}^{\text{٣}}\text{ ص}^{\text{١}}}{\text{٢٥ ا}^{\text{٢}}\text{ س ص}^{\text{٦}}}$

(١٨) $\frac{\text{٣٩ ا}^{\text{٢}}\text{ ب}^{\text{٤}}\text{ حـ}^{\text{٣}}}{\text{٥٢ ا}^{\text{٣}}\text{ ب}^{\text{٥}}\text{ حـ}^{\text{٤}}}$

(١٩) $\frac{\text{٣٨ ل}^{\text{٢}}\text{ ط}^{\text{٣}}\text{ م}^{\text{٤}}}{\text{٥٧ ل}^{\text{٣}}\text{ ط م}^{\text{٢}}}$

(٢٠) $\frac{\text{٤٦ س}^{\text{٣}}\text{ ص}^{\text{٤}}\text{ ع}^{\text{٥}}}{\text{٦٩ س}^{\text{٢}}\text{ ص}^{\text{٣}}\text{ ع}^{\text{٤}}}$

ضرب الكسور وقسمتها

بند ٩٦ — قاعدة : يتبع فى ضرب الكسور الجبرية طريقة ضرب الكسور الحسابية بمعنى أن نضرب البسوط ليتكوّن منها بسط حاصل الضرب والمقامات ليتكوّن منها مقام حاصل الضرب

(مثال ١) $\frac{٢ا}{٣ب} \times \frac{٥س^{٢}}{٢ا^{٢}ب} \times \frac{٣ب^{٢}}{٢س} = \frac{٢ا \times ٥س^{٢} \times ٣ب^{٢}}{٣ب \times ٢ا^{٢}ب \times ٢س} = \frac{٥س}{٢ا}$

وذلك باعتزال العوامل المشتركة فى البسط والمقام

(مثال ٢) $\frac{٣ا^{٢}ب}{٥ح^{٢}} \times \frac{٧ب ح}{٣ا^{٣}} \times \frac{٥اح}{٧ب^{٢}} = ١$ لأن كل العوامل يمحو بعضها بعضا

بند ٩٧ — قاعدة : لقسمة كسر على آخر نقلب المقسوم عليه ثم نتبع ما مرّ فى الضرب

(مثلا) $\frac{٧ا^{٣}}{٤س^{٣}ص^{٢}} \times \frac{٦ح^{٣}س}{٥اب^{٢}} \div \frac{٢٨ا^{٢}ح^{٢}}{١٥ب^{٢}س ص^{٢}} = \frac{٧ا^{٣}}{٤س^{٣}ص^{٢}} \times \frac{٦ح^{٣}س}{٥اب^{٢}} \times \frac{١٥ب^{٢}س ص^{٢}}{٢٨ا^{٢}ح^{٢}} = \frac{٩ح}{٨س}$

أما باقى العوامل فيمحو بعضها بعضا لأنها مشتركة بين البسط والمقام

(تمارين ١٢ ب)

إختصر كلا من الكسور الآتية إلى أصغر حدّيه

(١) $\frac{٢اب}{٣ح د} \times \frac{ح^{٢}د^{٣}}{اب^{٢}}$

(٢) $\frac{١٢ا^{٢}ب ح}{٨اب^{٣}} \times \frac{٢٤اب^{٢}}{٣٦ب ح^{٢}}$

(٣) $\frac{١٥س ص ع^{٣}}{ا^{٢}ب ح} \times \frac{٣ا^{٣}س}{٥ص ع}$

(٤) $\frac{٧ا^{٢}ب^{٣}}{٩اس^{٢}ص} \times \frac{١٨س^{٢}ح}{١٥اح^{٤}}$

(٥) $\frac{٨م^{٢}هـ^{٣}}{٥س^{٢}ص ع} \times \frac{١٥س ص ع^{٣}}{١٦م هـ^{٢}}$

(٦) $\frac{٢١ل^{٢}ط^{٣}}{١٣م هـ^{٢}} \times \frac{٣٩هـ^{٣}م^{٢}}{٢٨ط^{٢}ل^{٣}}$

(٧) $\frac{٣ا^{٢}ب}{٤ب ح} \times \frac{٢ح^{٢}}{٨ا^{٣}} \div \frac{١٦اح}{١٦ب^{٢}س}$

(٨) $\frac{٢س^{٢}ص}{٣ص ع} \times \frac{٥ع^{٢}س}{٧س ص^{٢}} \div \frac{٢١س^{٢}ص^{٣}ع^{٢}}{٤٠س ص^{٢}ع}$

(٩) $\frac{٧م^{٢}ط}{١٧س^{٢}ص} \times \frac{٥١ص^{٣}ع}{٢١ط^{٢}هـ} \div \frac{م^{٢}س}{ط ص ع}$

(١٠) $\frac{٢٦س ل^{٢}ط^{٣}}{٥٨م ط^{٤}} \times \frac{٢س ك^{٣}}{١٣ط ك م} \div \frac{٢س^{٢}ل^{٤}}{٨٧م^{٢}ط}$

(١١) $\frac{١٥ب^{٢}}{٤٠ح} \times \frac{٢٧ح^{٢}}{٨١د} \div \frac{اب ح}{١٤د^{٣}}$

(١٢) $\frac{ب^{٢}}{٣ح} \times \frac{٤ح^{٢}}{٥د^{٣}} \div \frac{١٦ا^{٢}ب^{٢}ح^{٢}}{١٥د^{٥}}$

(١٣) $\frac{٨اس^{٢}}{٧ب ص} \times \frac{٤٩ح ص^{٢}}{٦٤د س^{٣}}$

(١٤) $\frac{١٥اب ح}{١٦س ص ع} \times \frac{١٢٨س^{٣}ص^{٢}ع^{٢}}{١٠٠ا^{٢}ب ح}$

(١٥) $\frac{٤٥ا^{٢}ب^{٢}ح^{٤}}{٢٧س^{٤}ص^{٣}ع} \times \frac{٢٤٣س ص^{٢}ع^{٣}}{١٨٠ا^{٢}ب ح^{٣}}$

(١٦) $\frac{١٠٤س ص ع ك^{٢}ط}{٢٨س ص^{٢}ك^{٢}ط^{٢}} \times \frac{٥٦ص^{٣}ع^{٥}ط}{٢٦ص ع ك}$

(١٧) $\frac{م}{٨هـ} \times \frac{٣٦ط^{٣}ك^{٢}}{٨١م هـ^{٢}} \div \frac{١٥م ط س^{٥}}{٢٧هـ^{٢}س^{٣}ص}$

(١٨) $\frac{ا^{٣}}{ب^{٣}} \times \frac{س ص^{٢}}{اب} \times \frac{ط ب^{٢}}{اس} \div \frac{اط}{ب^{٢}}$

تجنيس الكسور

بند ٩٨ — لجمع الكسور أو طرحها يجب أولا تجنيسها كما فى الحساب وأسهل طريقة لذلك أن نبحث عن المضاعف المشترك البسيط لمقامات الكسور المفروضة

(مثال) لتوحيد مقامات الكسور

$$\frac{أ}{٣ س ص} ، \frac{ب}{٦ س ص ع} ، \frac{ح}{٢ ص ع}$$

مع مراعاة جعل مقامها المشترك أبسط ما يكون نقول إن المضاعف المشترك البسيط للمقامات ٦ س ص ع وبضرب حدّى كل كسر فى العامل الذى يلزم أن يضرب فى مقام هذا الكسر ليكون الناتج ٦ س ص ع تنتج الكسور الآتية

$$\frac{٢ أ ع}{٦ س ص ع} ، \frac{ب}{٦ س ص ع} ، \frac{٣ ح س}{٦ س ص ع}$$

وهذه الكسور تساوى على الترتيب الكسور المفروضة

(ملاحظة) نحصل على النتيجة عينها إذا قسمنا المضاعف المشترك البسيط على كل مقام وضربنا حدّى كل كسر فى خارج قسمة المضاعف المشترك البسيط على مقامه

(تمارين ١٢ ح)

وحد مقامات الكسور الآتية بدون أن تحدث تغييرا فى قيمتها

(١) $\frac{٢ س}{أ} ، \frac{ص}{٢ أ}$

(٢) $\frac{٤ س}{٣ ص} ، \frac{ص}{٢ س}$

(٣) $\frac{أ}{٢ ب} ، \frac{ب}{ح}$

(٤) $\frac{أ}{ب} ، \frac{ح}{د} ، ٢$

(٥) $\frac{١٢}{ب} ، \frac{ب}{٣ ح}$

(٦) $\frac{م}{٤ ن} ، \frac{ط}{٥ ن}$

(٧) $\frac{ح}{٢ س} ، \frac{ط}{٣ س}$

(٨) $\frac{م}{٣ س} ، \frac{ن}{٦ س}$

(٩) $\frac{أ}{ب ح} ، \frac{ب}{أ ح}$

(١٠) $\frac{أ}{س} ، \frac{ب}{س^٢}$

(١١) $\frac{٢}{س} ، \frac{٣}{ص^٢}$

(١٢) $\frac{س}{ص} ، \frac{ص}{س} ، ٣ س$

(١٣) $\frac{٢ س}{٣ ص} ، \frac{٣ ص}{٢ س}$

(١٤) $\frac{أ ٤}{٥ ب} ، \frac{أ ٣}{١٠ ح}$

(١٥) $\frac{أ ٣}{٧ ب} ، \frac{٥ ب}{٢١ ح}$

(١٦) $\frac{٢}{أ} ، \frac{ب}{٣} ، \frac{أ}{٩}$

جمع الكسور وطرحها

بند ٩٩ — قاعدة : لجمع الكسور أو طرحها نحوّل تلك الكسور إلى أخرى مساوية لها فى القيمة بأبسط مقام مشترك ونجمع البسوط جمعا جبريا ونقسم حاصل الجمع على المقام المشترك

(مثال ١) لاختصار المقدار الجبرى $\frac{٥ س}{٣} + \frac{٣}{٤} س - \frac{٧ س}{٦}$

نقول إن المقام المشترك البسيط ١٢

وعلى هذا فالمقدار الجبرى $= \frac{٢٠ س + ٩ س - ١٤ س}{١٢} = \frac{١٥ س}{١٢} = \frac{٥ س}{٤}$

(مثال ٢) لاختصار $\frac{٣ا ب}{٥ س} - \frac{ا ب}{٢ س} - \frac{١}{١٠} \times \frac{ا ب}{س}$

نقول إن هذا المقدار $= \frac{٦ ا ب - ٥ ا ب - ا ب}{١٠ س} = \frac{٠}{١٠ س} = ٠$

(مثال ٣) لاختصار $\frac{٢ س}{ا^٢ ح^٢} - \frac{ص}{٣ ح ا^٣}$

نقول إن هذا المقدار $= \frac{٦ ا س - ح ص}{٣ ا^٣ ح^٢}$ ولا يمكن اختصاره زيادة على ذلك .

(ملاحظة) على المبتدئ أن يحذر كل الحذر من خلط محو الحدود المتساوية ذات العلامات المختلفة كما فى مثال (٢) بحذف العوامل المشتركة فى البسط والمقام أثناء عملية ضرب الكسور أو اختزالها كما يلزمه أيضا أن يراعى فى اختصار الكسور أنه لا يمكن حذف عامل مشترك من البسط والمقام إلا اذا كان يقسم كلا منهما بأكمله

فمثلا فى الكسر $\frac{٦ ا س - ح ص}{٣ ا^٣ ح^٢}$ لا يمكن حذف ح لأنها لا تقسم من البسط إلا ح ص وكذا لا يمكن حذف ا لأنها لا تقسم من البسط سوى ٦ ا س فالكسر كما هو يكون حينئذ فى أبسط صوره

إذا كان مقدار جبرى بدون مقام يمكن اعتبار الواحد مقاما له

(مثال ٤) $٣ س - \frac{ا^٢}{٤ ص} = \frac{٣ س}{١} - \frac{ا^٢}{٤ ص} = \frac{١٢ س ص - ا^٢}{٤ ص}$

إذا لم يكن الكسر فى أبسط صوره وجب اختزاله قبل جمعه إلى كسور أخرى أو طرحه منها

(مثال ٥) $\frac{ا س}{٢} - \frac{س^٢ ص}{٣ س ص} = \frac{ا س}{٢} - \frac{س}{٣} = \frac{٣ ا س - ٢ س}{٦}$

(تمارين ١٢ د)

إختصر كلا من المقادير الآتية

(١) $\frac{س}{٢} + \frac{س}{٣}$

(٢) $\frac{ص}{٤} - \frac{ص}{٥}$

(٣) $\frac{ا}{٣} - \frac{ا}{٤}$

(٤) $\frac{٢ س}{٣} - \frac{٥}{س}$

(٥) $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٥}$

(٦) $\frac{ا}{٤} - \frac{ب}{٦}$

(٧) $\frac{م}{٨} - \frac{ن}{١٢}$

(٨) $\frac{٢ م}{١٥} - \frac{ن}{٥}$

(٩) $\frac{س}{٧} - \frac{ص}{٢١}$

(١٠) $\frac{ا}{١٣} + \frac{ب}{٣٩}$

(١١) $\frac{ط}{١٦} - \frac{ك}{٤٨}$

(١٢) $\frac{٥ م}{١٢} - \frac{ن}{٣٦}$

(١٣) $\frac{٢ س}{٣} + \frac{٤ س}{٥}$

(١٤) $\frac{٥ س}{٤} - \frac{٤ س}{٥}$

(١٥) $\frac{٥ س}{٦} - \frac{٧ س}{١٢}$

(١٦) $\frac{١٢ ا}{٥} - \frac{٤ ب}{١٥}$

(١٧) $\frac{ا}{٢} - \frac{ا}{٣} + \frac{ا}{٥}$

(١٨) $\frac{س}{٤} - \frac{س}{٨} + \frac{س}{١٢}$

(١٩) $\frac{س}{٣} + \frac{س}{٦} - \frac{س}{٩}$

(٢٠) $\frac{٢ س}{٣} - \frac{س}{٦} + \frac{٣ س}{٤}$

(٢١) $\frac{٥ س}{٦} - \frac{س}{١٢} + \frac{س}{٩}$

(٢٢) $\frac{٧ س}{٨} + \frac{س}{١٢} - \frac{س}{٤}$

(٢٣) $\frac{س}{ا} - \frac{ص}{ب}$

(٢٤) $\frac{٣ س^٣}{ا س^٢} + \frac{٢ ص}{٣ ب}$

(٢٥) $ا + \frac{ب}{ح}$

(٢٦) $س - \frac{ص^٢}{ص ع}$

(٢٧) $\frac{ا^٢}{٣ ا^٢} - \frac{ب^٢}{ا}$

(٢٨) $ا^٢ + \frac{ب^٢}{ا}$

(٢٩) $\frac{٣ س^٢}{٦ س} - \frac{ص^٢}{س^٢}$

(٣٠) $ط^٣ - \frac{ك^٥}{ط^٢}$

أسئلة متنوعة (٢)

(معظمها على الأبواب الثمانية الأولى)

(١) ما المقدار الذى يجب أن يضم إلى ٤ س^{3} − ٣ س^{2} + ٢ لينتج ٤ س^{3} + ٧ س − ٦

(٢) إذا كانت ا = ٦ س − ٣ ص + ٢ ع ، ب = س + ص + ع ، ح = ١٠ س + ص − ٧ ع فما قيمة
ا + ٤ ب − ح

(٣) إذا كانت س = ٣ ، ص = ٤ ، ع = ١ فما قيمة
√(٢ س ص + ٤ س ع) + √(٩ ص) + (٢ س ص ع)/٣

(٤) إختصر ما يأتى بإزالة الأقواس
ا^{2} + ٢ ء^{2} − (٢ هـ^{2} − ب^{2}) − { (ء^{2} − ح^{2} − هـ^{2}) + (ء^{2} − هـ^{2}) }

(٥) إضرب س^{3} + س^{2} + ٣ س + ٥ فى س^{2} − س − ٢

(٦) حل المعادلتين الآتيتين

(١) ٣ − ٤ س = ٣٦ س − ١٧

(٢) ٥ س − ١٥ = ١٧ س + ٢١

(٧) إقسم س^{4} − ١٠ س^{2} + ٩ على س^{2} − ٢ س − ٣

(٨) إختصر ١٧ ا − ٤ ب − { ١٥ ا − ٣ [ب − ٢ (ا − ب)] }

(٩) حصل أحمد فى امتحان على (س + ص) من الدرجات ومحمود على (٢ س − ٣ ص) من الدرجات وجلال على ضعف درجات أحمد فما مجموع درجات ثلاثة التلاميذ

(١٠) أوجد حاصل جمع ١ − ٢ س + س^{2} ، ٣ س − ٢ س^{2} ، ٥ س^{2} − ٧ س − ٢
ورتب الناتج حسب القوى النازلة للحرف س

(١١) أكتب حاصل الضرب فى كل من

(١) (س + ١٧) (س − ٣)

(٢) (٣ س − ٨) (٨ س + ٣)

(١٢) حل المعادلتين الآتيتين

(١) ٧ س − ٣ − (٧ − ٥ س) = ٣ − ٣ س − (٥ س + ٨)

(٢) (٥ س + ١)(س − ٢) − (٤ س − ٣)(٣ س − ١) = ١٠ − (٧ س + ٢)(س + ١)

(١٣) من حاصل جمع ١٣ ا ب ، − ٥ ا ب ، ٢ ا ب ، ٧ ا ب ، − ٩ ا ب
إطرح حاصل جمع − ٨ ا ب ، ٦ ا ب ، − ٩ ا ب ، ١٠ ا ب

(١٤) إذا كان ا = ٤ ، ب = ٣ ، ح = ٢ فما القيمة الرقمية للمقدار

(٢ ا + ب (٢ ح − ١)) / (٣ ب − √(٢ ح^{3}))

(١٥) من أىّ كمية تطرح ١١ ا^٢ — ٥ ا ب — ٧ ب ح ليكون الباقى ٧ ب (ا + ح) + ٥ ا^٢

(١٦) إضرب س^٣ + ٦ س^٢ + ٨ س — ٨ فى س^٢ — ٢ س + ٤

(١٧) إختصر ١٢ ا — [١٦ — ٢ {٣ ا — ٤ (ب — ١)} — (١٩ + ٨ ب)]

(١٨) حل المعادلتين الآتيتين وحقق الناتج فى كل منهما

(١) ٣ (٢ س — ١) + ٢ (٣ س — ٢) + ٣ = ٤ (س — ٥)

(٢) ١/٣ (س + ١) + ١/٤ (س + ٣) = ١/٥ (س + ٤) + ١٦

(١٩) إقسم ٣ ط^٥ + ١٦ ط^٤ — ٣٣ ط^٣ + ١٤ ط^٢ على ط^٢ + ٧ ط

(٢٠) ضم المقادير الآتية بعضها إلى بعض

ا + ٢ ب — (٢ ح + ء) ، ٣ ا — (ب — ٢ ح) + ٢ ء ، ٢ ا — [ب — (٢ ح — ٣ ء)]

(٢١) إلى أى مقدار تضم ٧ س^٣ — ٦ س^٢ — ٥ س ليكون الناتج ٩ س^٣ — ٦ س — ٧ س^٢

(٢٢) ما قيمة س التى تجعل حاصل ضرب س + ١ فى ٢ س + ١

أقل من حاصل ضرب س + ٣ فى ٢ س + ٣ بمقدار ١٤

(٢٣) إذا كان ا = ٢ ، ب = ٣ ، ح = ١ ، هـ = ٤ ، ر = ٦

فما قيمة ٥ ا^ب ح^ر — ٣^ا × ٢^ب + ٢^ر ا^ه — ح^ب ب^ه

(٢٤) حل المعادلة

س — (س — ١٣)/٩ = (٦ س + ١)/٥ + ٢/٣ (٦ — ٣ س/٢)

وبيّن أنها لا تتحقق إذا كانت س = ٣

(٢٥) حصان يأكل ٣ م + ٢ ن من كيلات الشعير فى الأسبوع ففى كم أسبوع يأكل ١٢ م^٢ — ٧ م ن — ١٠ ن^٢ من الكيلات

(٢٦) إطرح حاصل جمع ٢ س^٣ — ٣ س + ٤ ، — ٣ س^٢ + ٢ س — ٧

من ٤ س^٣ — ٣ س^٢ + س — ٦ — [٢ س^٣ — (س — ٦)]

(٢٧) ما قيمة ا^٣ + ب^٣ + ح^٣ — ٣ ا ب ح إذا كان ا = ١ ، ب = ٤ ، ح = — ٥

(٢٨) حل المعادلتين الآتيتين

(١) ٢ س/١٥ + (س — ٦)/١٢ = ٣/١٠ (س/٢ — ٥)

(٢) ٢ (س — ١)/٥ + ١٥/٢ (١ — س/٣) + ١٩/١٠ = ٩/٥ (س/٦ — ١/٣)

(٢٩) إقسم ٣ ص^٦ — ٣٧ ص^٤ + ٣٥ ص^٣ + ٧ ص^٢ + ٢ على ص (ص — ١) (ص + ٤) — ٢

(٣٠) إقسم ١١٢٠ قرشا بين ا ، ب بحيث إذا أخذ ا خمسة قروش يأخذ ب قرشين

(٣١) ما قيمة (ا + ب)^٢ + (ب + ح)^٢ + (ح + ا)^٢

إذا كان ا = — ١ ، ب = — ٢ ، ح = ٣

(٣٢) اضرب (٢ م^٢ + ٨) (م + ٢) فى ٣ م — ٦

(٣٣) إقسم حاصل ضرب (س — ٢) فى (س + ٣) فى (٢ س — ٧)
على حاصل جمع ٣ (س^{٢} — ٢ س — ٢) ، ٥ س — س^{٢} — ١٥

(٣٤) مشى رجل ط من الساعات بسرعة ا من الكيلومترات فى الساعة ثم ركب هـ من الساعات بسرعة ب من الكيلومترات فى الساعة فما مقدار المسافة التى قطعها وكم ساعة يقطع فيها المسافة كلها راكبا بسرعة ح من الكيلومترات فى الساعة بيّن نتيجة ذلك بفرض أن
ط = ٧ ، هـ = ٣ ، ا = ٤ ، ب = ٩ ، ح = ١١

(٣٥) حل المعادلتين

(١) $\frac{٣ س}{٢}$ — $\frac{٥}{٧}$ = ٢١ س — $\frac{١}{٣}$ (٢ س + $\frac{٣}{١٤}$ ١٠)

(٢) ٣ س — ٤ — $\frac{٤ (٧ س — ٩)}{١٥}$ = $\frac{٤}{٥}$ (٦ + $\frac{س — ١}{٣}$)

(٣٦) إشترى تاجر مقدارا من البيض فدفع $\overset{\frown}{٦}$ فى كل عشرين بيضة ثم اشترى خمسة أمثال ذلك المقدار فدفع $\overset{\frown}{٣١}$ فى كل مائة بيضة ثم باع جميع ما اشترى بسعر $\overset{\frown}{٤}$ لكل اثنتى عشرة بيضة فكسب $\overset{\frown}{١٠٨}$ فما عدد البيض الذى اشتراه

الباب الثالث عشر — المعادلات الآتية المتعدّدة المجاهيل

بند ١٠٠ — لو نظرنا فى المعادلة ٢ س + ٥ ص = ٢٣ نجد أنها تشتمل على مجهولين
ومنها نستنتج أن ٥ ص = ٢٣ — ٢ س
أى أن ص = $\frac{٢٣ — ٢ س}{٥}$ ... ... (١)

ويظهر من هذا أنه كلما وضعنا قيمة للرمز س فلا بدّ أن يكون للرمز ص قيمة تابعة لقيمة س وعلى ذلك يمكننا إيجاد عدد غير متناه من المقادير لكل من س ، ص تحقق بها المعادلة المعلومة
فمثلا إذا كانت س = ١ ينتج من (١) أن ص = $\frac{٢١}{٥}$
وإذا كانت س = — ٢ ينتج أن ص = $\frac{٢٧}{٥}$ وهكذا
ولكن إذا كانت هناك معادلة أخرى من نوع المعادلة الأولى مثل
٣ س + ٤ ص = ٢٤
نتج من هذه المعادلة الأخيرة أن
ص = $\frac{٢٤ — ٣ س}{٤}$ ... ... (٢)

فاذا بحثنا الآن عن مقدارى س ، ص اللذين يتحقق بهما كل من المعادلتين وجب أن تكون قيمة ص فى (١) عين قيمتها فى (٢)

وإذن يكون $\frac{٢٣ — ٢ س}{٥}$ = $\frac{٢٤ — ٣ س}{٤}$

وبالضرب يحدث أن ٩٢ — ٨ س = ١٢٠ — ١٥ س

∴ ٧ س = ٢٨

∴ س = ٤

وبوضع قيمة س فى المعادلة الأولى نجد أن

٨ + ٥ ص = ٢٣

∴ ٥ ص = ١٥

∴ ص = ٣

، س = ٤

ومن ذلك يرى أنه إذا كان المراد أن تحقق المعادلتان بمقدار واحد لكل من س ، ص لا يمكن أن يكون هناك إلا حل واحد

بند ١٠١ — تعريف : إذا أمكن تحقيق معادلتين أو أكثر بمقادير واحدة للكميات المجهولة فيها سميت آنية

وسنشرح فى هـذا الباب طرق حل هذه المعادلات مقتصرين على الأحوال البسيطة التى تكون فيها المجاهيل من الدرجة الأولى

بند ١٠٢ — اتبعنا فى المثال السابق طريقة لحل المعادلات المتعددة المجاهيل هى أحسن الطرق لبيان المعنى الذى يدل عليه اسمها (آنيـة) ولكنا سنرى فى العمل أنه يندر أن تكون هذه الطريقة أسرع طريقة للحل

ولا يغيبن عن الذهن أنه ما دامت كل معادلة من المعادلتين الآتيتين تحقق بمقدارى المجهولين اللذين تحقق بهما الأخرى فأىّ معادلة تستنتج من هاتين المعادلتين معا تحقق أيضا بتعويض كل من س ، ص فيها بمقدارين هما عين المقدارين اللذين تحقق بهما المعادلتان الأصليتان وسيكون الغرض الذى نرمى اليه دائما فى حل مثل هذه المعادلات إيجاد معادلة لا تشتمل إلا على مجهول واحد

بند ١٠٣ — والطريقة التى بواسطتها نحذف أحد المجهولين تسمى طريقـة الحذف وهى تختلف باختلاف المعـادلات

(مثـال ١) لحل ٣ س + ٧ ص = ٢٧ ... ... (١)

٥ س + ٢ ص = ١٦ ... ... (٢)

فلحذف س نضرب المعادلة (١) فى ٥ والمعادلة (٢) فى ٣ حتى يصير معامل س فى المعادلتين واحدا

فينتج أن ١٥ س + ٣٥ ص = ١٣٥

١٥ س + ٦ ص = ٤٨

وبالطرح يحدث أن ٢٩ ص = ٨٧

∴ ص = ٣

ولايجاد قيمة س نضع بدل ص قيمتها ٣ فى إحدى المعادلتين وليكن هذا فى المعادلة (١)

فينتج أن ٣ س + ٢١ = ٢٧

∴ س = ٢

، ص = ٣

(ملاحظة) متى وجدت قيمة أحد المجهولين فلنا أن نستعمل إحدى المعادلتين لايجاد قيمة المجهول الآخر ففى المثال السابق إذا وضعنا قيمة ص وهى ٣ فى المعادلة (٢) نجد أن

٥ س + ٦ = ١٦

∴ س = ٢ وهو عين الناتج المتقدّم

(مثال ٢) لحل ٧ س + ٢ ص = ٤٧ …… …… …… …… (١)

٥ س − ٤ ص = ١ …… …… …… …… (٢)

هنا يحسن حذف ص

وذلك بأن نضرب المعادلة (١) فى ٢ فينتج أن

١٤ س + ٤ ص = ٩٤

ومن (٢) ينتج أن ٥ س − ٤ ص = ١

وبالجمع ينتج أن ١٩ س = ٩٥

∴ س = ٥

وبتعويض س فى (١) بهذه القيمة

ينتج أن ٣٥ + ٢ ص = ٤٧

∴ ص = ٦

، س = ٥

(ملاحظة) نجمع المعادلتين حينما يكون معاملا أحد المجهولين متساويين فى القيمة ومتضادّين فى العلامة ونطرحهما حينما يكون معاملاه متساويين فى القيمة ومتحدين فى العلامة

(مثال ٣) لحل ٢ س = ٥ ص + ١ …… …… …… …… (١)

٢٤ − ٧ س = ٣ ص …… …… …… …… (٢)

نقول إنه يمكن فى هذا المثال حذف س بأن نضع في المعادلة (٢) قيمتها الناتجة من المعادلة (١)

فينتج أن ٢٤ − $\frac{٧}{٢}$ (٥ ص + ١) = ٣ ص

∴ ٤٨ − ٣٥ ص − ٧ = ٦ ص

∴ ٤١ = ٤١ ص

∴ ص = ١

وبالتعويض فى (١) ينتج أن س = ٣

بند ١٠٤ — كل طريقة من طرق الحل التى بيناها كافية لحل المعادلات الآتية إلا أن عملية الحل تسهل غالبا باتباع بعض الأساليب الحسابية

(مثال ١) لحل ١٧١ س − ٢١٣ ص = ٦٤٢ …… …… …… …… (١)

١١٤ س − ٣٢٦ ص = ٢٤٤ …… …… …… …… (٢)

نقول لكوننا نرى أن لكل من العددين ١٧١ ، ١١٤ عاملا مشتركا وهو ٥٧ نجعل معاملى الحرف س فى المعادلتين المضاعف المشترك البسيط للعددين ١٧١ ، ١١٤ وذلك بأن نضرب المعادلة (١) فى ٢ والمعادلة (٢) فى ٣ فينتج أن

٣٤٢ س — ٤٢٦ ص = ١٢٨٤

٣٤٢ س — ٩٧٨ ص = ٧٣٢

وبالطرح ينتج أن ٥٥٢ ص = ٥٥٢

أى أن ص = ١

وبالتعويض فى المعادلة (١) ينتج أن س = ٥

(مثال ٢) لحل ١٢٧ س + ٥٩ ص = ١٩٢٨ .... (١)

٥٩ س + ١٢٧ ص = ١٧٩٢ .... (٢)

نجمع المعادلتين فينتج أن ١٨٦ س + ١٨٦ ص = ٣٧٢٠

∴ س + ص = ٢٠ .... (٣)

وبطرح (٢) من (١) ينتج أن ٦٨ س — ٦٨ ص = ١٣٦

∴ س — ص = ٢ .... (٤)

فيؤول الأمر إلى حل المعادلتين (٣) ، (٤) ومنهما نجد بالجمع أن ٢ س = ٢٢

وبالطرح أن ٢ ص = ١٨

أى أن س = ١١ ، ص = ٩

(تمارين ١٣ ا)

حل المعادلات الآتية [ولا بأس هنا بالاطلاع على البند ٤٢١]

(١) ٣ س + ٤ ص = ١٠
٤ س + ص = ٩

(٢) س + ٢ ص = ١٣
٣ س + ص = ١٤

(٣) ٤ س + ٧ ص = ٢٩
س + ٣ ص = ١١

(٤) ٢ س — ص = ٩
٣ س — ٧ ص = ١٩

(٥) ٥ س + ٦ ص = ١٧
٦ س + ٥ ص = ١٦

(٦) ٢ س + ص = ١٠
٧ س + ٨ ص = ٥٣

(٧) ٨ س — ص = ٣٤
س + ٨ ص = ٥٣

(٨) ١٥ س + ٧ ص = ٢٩
٩ س + ١٥ ص = ٣٩

(٩) ١٤ س — ٣ ص = ٣٩
٦ س + ١٧ ص = ٣٥

(١٠) ٢٨ س — ٢٣ ص = ٣٣
٦٣ س — ٢٥ ص = ١٠١

(١١) ٣٥ س + ١٧ ص = ٨٦
٥٦ س — ١٣ ص = ١٧

(١٢) ١٥ س + ٧٧ ص = ٩٢
٥٥ س — ٣٣ ص = ٢٢

(١٣) ٥ س − ٧ ص = ٠
٧ س + ٥ ص = ٧٤

(١٤) ٢١ س − ٥٠ ص = ٦٠
٢٨ س − ٢٧ ص = ١٩٩

(١٥) ٣٩ س − ٨ ص = ٩٩
٥٢ س − ١٥ ص = ٨٠

(١٦) ٥ س = ٧ ص − ٢١
٢١ س − ٩ ص = ٧٥

(١٧) ٦ ص − ٥ س = ١٨
١٢ س − ٩ ص = ٠

(١٨) ٨ س = ٥ ص
١٣ س = ٨ ص + ١

(١٩) ٣ س = ٧ ص
١٢ ص = ٥ س − ١

(٢٠) ١٩ س + ١٧ ص = ٠
٢ س − ص = ٥٣

(٢١) ٩٣ س + ١٥ ص = ١٢٣
١٥ س + ٩٣ ص = ٢٠١

بند ١٠٥ — نأتى الآن ببعض أمثلة يجب فيها اختصار المعادلات قبل الشروع فى حلها

(مثال ١) لحل ٥ (س + ٢ ص) − (٣ س + ١١ ص) = ١٤ ... ... (١)
٧ س − ٩ ص − ٣ (س − ٤ ص) = ٣٨ ... ... (٢)

نقول إنه من (١) نجد أن
٥ س + ١٠ ص − ٣ س − ١١ ص = ١٤
∴ ٢ س − ص = ١٤ ... ... (٣)
ومن (٢) نجد أن ٧ س − ٩ ص − ٣ س + ١٢ ص = ٣٨
∴ ٤ س + ٣ ص = ٣٨ ... ... (٤)
ومن (٣) نجد أن ٦ س − ٣ ص = ٤٢
وبالجمع ينتج أن ١٠ س = ٨٠
أى أن س = ٨
ومن (٣) نستنتج أن ص = ٢

(مثال ٢) لحل المعادلتين ٣ س − (ص − ٥)/(٧) = (٤ س − ٣)/(٢) ... ... (١)
(٣ ص + ٤)/(٥) − (١)/(٣) (٢ س − ٥) = ص ... ... (٢)

نبدأ بإزالة الكسور فينتج من (١) أن
٤٢ س − ٢ ص + ١٠ = ٢٨ س − ٢١
∴ ١٤ س − ٢ ص = − ٣١ ... ... (٣)
وينتج من (٢) أن ٩ ص + ١٢ − ١٠ س + ٢٥ = ١٥ ص
∴ ١٠ س + ٦ ص = ٣٧ ... ... (٤)
وبحذف ص من (٣) و (٤) ينتج أن س = − (١٤)/(١٣)
وبحذف س من (٣) و (٤) ينتج أن ص = (٢٠٧)/(٢٦)

(ملاحظة) نجد أحيانا كما ظهر لنا الآن أن الأسهل استخراج قيمة المجهول الثانى بطريقة الحذف كما فى المثال المتقدم لا بطريقة تعويض قيمة المجهول الأول فى إحدى المعادلات

(تمارين ١٣ ب)

حل المعادلات الآتية

(١) $\frac{٢\text{س}}{٣} + \text{ص} = ١٦$ ، $\text{س} + \frac{\text{ص}}{٤} = ١٤$

(٢) $\frac{\text{س}}{٥} + \frac{\text{ص}}{٢} = ٥$ ، $\text{س} - \text{ص} = ٤$

(٣) $\frac{٥\text{س}}{٦} - \text{ص} = ٣$ ، $\text{س} - \frac{٥\text{ص}}{٦} = ٨$

(٤) $\text{س} - \text{ص} = ٥$ ، $\frac{\text{س}}{٤} - \frac{\text{ص}}{٥} = ٢$

(٥) $\frac{\text{س}}{٩} + \frac{\text{ص}}{٧} = ١٠$ ، $\frac{\text{س}}{٣} + \text{ص} = ٥٠$

(٦) $\text{س} = ٣\text{ص}$ ، $\frac{\text{س}}{٣} + \text{ص} = ٣٤$

(٧) $\frac{٢}{٥}\text{س} - \frac{١}{١٢}\text{ص} = ٣$ ، $٤\text{س} - \text{ص} = ٢٠$

(٨) $\frac{١}{٢}\text{س} - \frac{١}{٥}\text{ص} = ٤$ ، $\frac{١}{٧}\text{س} + \frac{١}{١٥}\text{ص} = ٣$

(٩) $٢\text{س} + \text{ص} = ٠$ ، $\frac{١}{٢}\text{ص} - ٣\text{س} = ٨$

(١٠) $\frac{\text{س}}{٧} + \frac{\text{ص}}{٥} = ١\frac{٣}{٧}$ ، $\text{س} + \frac{\text{ص}}{٣} = ٤\frac{٢}{٣}$

(١١) $٣\text{س} - ٧\text{ص} = ٠$ ، $\frac{٢}{٧}\text{س} + \frac{٥}{٣}\text{ص} = ٧$

(١٢) $\frac{\text{س}}{٥} - \frac{\text{ص}}{٤} = ٠$ ، $٣\text{س} + \frac{١}{٢}\text{ص} = ١٧$

(١٣) $\frac{\text{س}}{٣} + \frac{\text{ص}}{٤} = ٣\text{س} - ٧\text{ص} - ٣٧ = ٠$

(١٤) $\frac{\text{س}+١}{١٠} = \frac{٣\text{ص}-٥}{٢} = \frac{\text{س}-\text{ص}}{٨}$

(١٥) $\frac{\text{س}+٣}{٥} = \frac{٨-\text{ص}}{٤} = \frac{٣(\text{س}+\text{ص})}{٨}$

(١٦) $\frac{\text{س}}{١٣} - \frac{\text{ص}}{٧} = ٦\text{س} - ١٠\text{ص} - ٨ = ٠$

بند ١٠٦ — علمنا مما سبق ضرورة وجود معادلتين إذا كنا نبحث عن قيمة مجهولين أما إذا كانت المجاهيل ثلاثة فينبغى أن يكون عدد المعادلات ثلاثًا وفى هذه الحالة تكون قاعدة الحل ما يأتى

(قاعدة) إحذف أحد المجاهيل من أى معادلتين من المعادلات الثلاث ثم احذف المجهول نفسه من معادلتين أخريين فتنتج معادلتان بمجهولين تحلان حسب القواعد السابقة ثم تستخرج قيمة المجهول الثالث بطريقة التعويض فى أىّ معادلة من المعادلات الثلاث

(مثال ١) لحل

$٦\text{س} + ٢\text{ص} - ٥\text{ع} = ١٣$ .... (١)

$٣\text{س} + ٣\text{ص} - ٢\text{ع} = ١٣$ .... (٢)

$٧\text{س} + ٥\text{ص} - ٣\text{ع} = ٢٦$ .... (٣)

نفرض أن المجهول الذى اخترنا حذفه ص

فنضرب (١) فى ٣ ، (٢) فى ٢ فينتج أن

$$١٨\text{س} + ٦\text{ص} - ١٥\text{ع} = ٣٩$$
$$٦\text{س} + ٦\text{ص} - ٤\text{ع} = ٢٦$$

وبالطرح ينتج أن $١٢\text{س} - ١١\text{ع} = ١٣$ .... (٤)

ثم نضرب (١) فى ٥ ، (٣) فى ٢ فيحدث أن

٣٠ س + ١٠ ص − ٢٥ ع = ٦٥

١٤ س + ١٠ ص − ٦ ع = ٥٢

وبالطرح ينتج أن ١٦ س − ١٩ ع = ١٣ ... ... (٥)

وبضرب (٤) فى ٤ ، (٥) فى ٣ ينتج أن

٤٨ س − ٤٤ ع = ٥٢

٤٨ س − ٥٧ ع = ٣٩

وبالطرح ينتج أن ١٣ ع = ١٣

∴ ع = ١

ومن (٤) ينتج أن س = ٢

ومن (١) ينتج ان ص = ٣

(ملاحظة) بعد قليل من التمرن يمكن الطالب أن يسهل العمل كثيرا بربط المعادلات بعضها مع بعض على الوجه المناسب

ففى المثال السابق لو أضفنا (١) إلى (٢) وطرحنا من الحاصل (٣) لبقى ٢ س − ٤ ع = ٠ أى أن س = ٢ ع وبوضع هذه القيمة فى (١) ، (٢) تنتج معادلتان سهلتا الحل مشتملتان على المجهولين ص ، ع فقط

ومن المفيد أحيانا أن لا يتبع نص القاعدة السابقة تماما كما سنبينه فيما يلى

(مثال ٢) لحل $\frac{\text{س}}{٢} - ١ = \frac{\text{ص}}{٦} + ١ = \frac{\text{ع}}{٧} + ٢$

$\frac{\text{ص}}{٣} + \frac{\text{ع}}{٢} = ١٣$

نستنتج من المعادلة $\frac{\text{س}}{٢} - ١ = \frac{\text{ص}}{٦} + ١$

أن ٣ س − ص = ١٢ ... ... (١)

وأيضا نستنتج من المعادلة $\frac{\text{س}}{٢} - ١ = \frac{\text{ع}}{٧} + ٢$

أن ٧ س − ٢ ع = ٤٢ ... ... (٢)

وكذلك نستنتج من المعادلة $\frac{\text{ص}}{٣} + \frac{\text{ع}}{٢} = ١٣$

أن ٢ ص + ٣ ع = ٧٨ ... ... (٣)

وبحذف ع من (٢) ، (٣) ينتج أن

٢١ س + ٤ ص = ٢٨٢

ومن (١) نجد أن ١٢ س − ٤ ص = ٤٨

إذن س = ١٠ ، ص = ١٨

وبالتعويض فى (٢) نجد ان ع = ١٤

(مثال ٣) إذا تأملنا المعادلات الآتية

٥ س − ٣ ص − ع = ٦ ... ... (١)

١٣ س − ٧ ص + ٣ ع = ١٤ ... ... (٢)

٧ س − ٤ ص = ٨ ... ... (٣)

نجد أننا لو ضربنا (١) فى ٣ وأضفنا حاصل الضرب إلى (٢) ينتج أن

٢٨ س − ١٦ صـ = ٣٢

أى أن ٧ س − ٤ صـ = ٨

فيظهر من هذا أن ما عملناه فى المعادلتين (١) ، (٢) أوجد معادلة هى عين المعادلة الثالثة وعلى ذلك يكون لدينا معادلة واحدة فقط لاستخراج قيمة كل من المجهولين س ، صـ وهى ٧ س − ٤ صـ = ٨ وهى معادلة غير معينة الحل (راجع بند ١٠٠)

ومثل هذه النتيجة ينشأ من كون المعادلات غير مستقل بعضها عن بعض بمعنى أن كل معادلة يمكن استنتاجها من المعادلات الأخرى أى أن العلاقة بين المجاهيل فى كل معادلة ليست خاصة بها بل هى عينها بين المجاهيل فى المعادلات الأخرى

(تمارين ١٣ حـ)

حل المعادلات الآتية

(١) س + ٢ صـ + ٢ ع = ١١
٢ س + صـ + ع = ٧
٣ س + ٤ صـ + ع = ١٤

(٢) س + ٣ صـ + ٤ ع = ١٤
س + ٢ صـ + ع = ٧
٢ س + صـ + ٢ ع = ٢

(٣) س + ٤ صـ + ٣ ع = ١٧
٣ س + ٣ صـ + ع = ١٦
٢ س + ٢ صـ + ع = ١١

(٤) ٣ س − ٢ صـ + ع = ٢
٢ س + ٣ صـ − ع = ٥
س + صـ + ع = ٦

(٥) ٢ س + صـ + ع = ١٦
س + ٢ صـ + ع = ٩
س + صـ + ٢ ع = ٣

(٦) س − ٢ صـ + ٣ ع = ٢
٢ س − ٣ صـ + ع = ١
٣ س − صـ + ٢ ع = ٩

(٧) ٣ س + ٢ صـ − ع = ٢٠
٢ س + ٣ صـ + ٦ ع = ٧٠
س − صـ + ٦ ع = ٤١

(٨) ٢ س + ٣ صـ + ٤ ع = ٢٠
٣ س + ٤ صـ + ٥ ع = ٢٦
٣ س + ٥ صـ + ٦ ع = ٣١

(٩) ٣ س − ٤ صـ = ٦ ع − ١٦ ، ٤ س − صـ − ع = ٥ ، س = ٣ صـ + ٢ (ع − ١)

(١٠) ٥ س + ٢ صـ = ١٤ ، صـ − ٦ ع = − ١٥ ، س + ٢ صـ + ع =

(١١) س − صـ/٥ = ٦ ، صـ − ع/٧ = ٨ ، ع − س/٢ = ١٠

(١٢) (صـ + ع)/٤ = (ع + س)/٣ = (س + صـ)/٢ ، س + صـ + ع = ٢٧

(١٣) (صـ − ع)/٣ = (صـ − س)/٢ = ٥ ع − ٤ س ، صـ + ع = ٢ س + ١

(١٤) ٢ س + ٣ صـ = ٥ ، ٢ ع − صـ = ١ ، ٧ س − ٩ ع = ٣

(١٥) ½ (س + ع − ٥) = صـ − ع
= ٢ س − ١١
= ٩ − (س + ٢ ع)

(١٦) س + ٢٠ = ٣ صـ/٢ + ١٠
= ٢ ع + ٥
= ١١٠ − (صـ + ع)

بند ١٠٧ — تعريف : إذا ساوى حاصل ضرب كميتين الواحد الصحيح قيل لكل من الكميتين إنها مقلوب الاخرى مثلا إذا كان ا ب = ١ تكون ا مقلوب ب وكذا ب مقلوب ا وقد سميتا كذلك لان $ا = \frac{١}{ب}$ كما أن $ب = \frac{١}{ا}$ وإذن تكون علاقة الكمية ا بالكمية ب عين علاقة الكمية ب بالكمية ا من ذلك نعلم أن مقلوبى س ، ص هما $\frac{١}{س}$ ، $\frac{١}{ص}$ وسنعتبر فى حل المعادلات الآتية أن $\frac{١}{س}$ ، $\frac{١}{ص}$ المجهولات

(مثال ١) لحل

$\frac{٨}{س} - \frac{٩}{ص} = ١$ .... (١)

$\frac{١٠}{س} + \frac{٦}{ص} = ٧$ .... (٢)

نضرب (١) فى ٢ ، (٢) فى ٣ فيحدث أن

$\frac{١٦}{س} - \frac{١٨}{ص} = ٢$

$\frac{٣٠}{س} + \frac{١٨}{ص} = ٢١$

وبالجمع ينتج أن $\frac{٤٦}{س} = ٢٣$

وبالضرب ينتج أن $٤٦ = ٢٣\,س$

∴ $س = ٢$

وبالتعويض فى (١) ينتج ان $ص = ٣$

(مثال ٢) لحل

$\frac{١}{٢س} + \frac{١}{٤ص} - \frac{١}{٣ع} = \frac{١}{٤}$ .... (١)

$\frac{١}{س} = \frac{١}{٣ص}$ .... (٢)

$\frac{١}{س} - \frac{١}{٥ص} + \frac{٤}{ع} = ٢\frac{٢}{١٥}$ .... (٣)

نزيل المعاملات الكسرية للمجاهيل فينتج

من (١) أن $\frac{٦}{س} + \frac{٣}{ص} - \frac{٤}{ع} = ٣$ .... (٤)

ومن (٢) أن $\frac{٣}{س} - \frac{١}{ص} = ٠$ .... (٥)

ومن (٣) أن $\frac{١٥}{س} - \frac{٣}{ص} + \frac{٦٠}{ع} = ٣٢$ .... (٦)

وبضرب (٤) فى ١٥ وضم الناتج إلى (٦) يحدث أن

$\frac{١٠٥}{س} + \frac{٤٢}{ص} = ٧٧$

وبالقسمة على ٧ ينتج أن $\frac{١٥}{س} + \frac{٦}{ص} = ١١$ .... (٧)

ومن (٥) نجد أن $\frac{١٨}{س} - \frac{٦}{ص} = ٠$

∴ $\frac{٣٣}{س} = ١١$

∴ $س = ٣$

ومن (٥) ينتج أن $ص = ١$

ومن (٤) ينتج ان $ع = ٢$

(تمارين ١٣ ى)

حل المعادلات الآتية

(١) $\frac{٥}{س} + \frac{٦}{ص} = ٣$
$\frac{١٥}{س} + \frac{٣}{ص} = ٤$

(٢) $\frac{٦}{س} - \frac{٧}{ص} = ٢$
$\frac{٢}{س} + \frac{١٤}{ص} = ٣$

(٣) $\frac{١٢}{س} - \frac{٤}{ص} = ٢$
$\frac{٣}{س} - \frac{٢}{ص} = ٠$

(٤) $\frac{٥}{س} + \frac{١٦}{ص} = ٧٩$
$\frac{١٦}{س} - \frac{١}{ص} = ٤٤$

(٥) $\frac{٢١}{س} + \frac{١٢}{ص} = ٥$
$\frac{١}{ص} - \frac{١}{س} = \frac{١}{٤٢}$

(٦) $\frac{٥}{س} + \frac{٣}{ص} = ٣٠$
$\frac{٩}{س} - \frac{٥}{ص} = ٢$

(٧) $\frac{٨}{س} - \frac{٩}{ص} = ٧$
$٦\left(\frac{١}{س} + \frac{١}{ص}\right) = ١$

(٨) $\frac{٢٥}{س} + \frac{٢٤}{ص} = ١$
$٢٠\left(\frac{٢}{س} + \frac{٣}{ص}\right) = ٧$

(٩) $\frac{٤}{س} + \frac{٢٧}{ص} = ٤٢$
$\frac{١٤}{س} - \frac{١٥}{ص} = ١$

(١٠) $\frac{٣}{س} + \frac{٥}{ص} = \frac{٨}{١٥}$
$٩ ص - ٢٢ س = \frac{٣ س ص}{٢٥}$

(١١) $\frac{١}{٤ س} + \frac{١}{٣ ص} = ٢$
$\frac{١}{ص} - \frac{١}{٢ س} = ١$

(١٢) $٢ ص - س = ٤ س ص$
$\frac{٤}{ص} - \frac{٣}{س} = ٩$

(١٣) $\frac{١}{س} - \frac{٢}{ص} + ٤ = ٠$
$\frac{١}{ص} - \frac{١}{ع} + ١ = ٠$
$\frac{٢}{ع} + \frac{٣}{س} = ١٤$

(١٤) $\frac{١}{س} + \frac{١}{ص} + \frac{١}{ع} = ٣٦$
$\frac{١}{س} + \frac{٣}{ص} - \frac{١}{ع} = ٢٨$
$\frac{١}{س} + \frac{١}{٣ ص} + \frac{١}{٢ ع} = ٢٠$

(١٥) $\frac{٩}{س} - \frac{٢}{ص} = \frac{٥}{ع} - \frac{٣}{س}$
$= \frac{٧}{ص} + \frac{١٥}{٢ ع} = ٤$

الباب الرابع عشر — مسائل تؤدى إلى معادلات آنية

بند ١٠٨ — قد رأينا فيما بحثنا فيه من الأمثلة الواردة فى الباب السابق أنه من الضرورى أن يساوى عدد المعادلات عدد المجاهيل المراد البحث عن قيمة كل منها فلحل المسائل التى يتوصل إلى حلها باستعمال معادلات آنية يجب أن يحتوى منطوق المسئلة على فروض مستقل بعضها عن بعض [أى لا ينتج أحدها من الآخر] وأن تكون هذه الفروض مساوية فى العدد للكميات المجهولة المراد استخراج مقاديرها

(مثال ١) ما العددان اللذان فرقهما ١١ وخمس مجموعهما ٩

نفرض أن أكبر العددين س وأصغرهما ص

إذن $س - ص = ١١$ .... (١)

و $\frac{س + ص}{٥} = ٩$

أو $س + ص = ٤٥$ .... (٢)

وبالجمع يحدث أن $٢ س = ٥٦$

وبالطرح ينتج أن $٢ ص = ٣٤$

فالعددان هما ٢٨ ، ١٧ وظاهر أن منطوق المسألة يحتوى على فرضين مستقل كل منهما عن الآخر تمام الاستقلال كما أنه ظاهر ان منطوقها يتضمن طلب البحث عن مجهولين

(مثال ٢) إذا كان ثمن ١٥ رطلا من الشاى ، ١٧ رطلا من البن معا ٣٢٢ ½ وثمن ٢٥ رطلا من الشاى ، ١٣ رطلا من البن معا ٤٢٢ ½ فما ثمن كل رطل من الصنفين

نفرض أن ثمن الرطل من الشاى س من القروش وثمن الرطل من البن ص من القروش فنجد من منطوق المسألة أن

١٥ س + ١٧ ص = ٣٢٢ ½ .... (١)

٢٥ س + ١٣ ص = ٤٢٢ ½ .... (٢)

وبضرب المعادلة (١) فى ٥ والمعادلة (٢) فى ٣ ينتج أن

٧٥ س + ٨٥ ص = ١٦١٢ ½

٧٥ س + ٣٩ ص = ١٢٦٧ ½

وبالطرح يحدث أن ٤٦ ص = ٣٤٥

∴ ص = ٧ ½

ومن المعادلة (١) ينتج أن ١٥ س + ١٢٧ ½ = ٣٢٢ ½

أى أن ١٥ س = ١٩٥

∴ س = ١٣

إذن يكون ثمن الرطل من الشاى ١٣ وثمن الرطل من البن ٧ ½

وظاهر هنا أيضا أن منطوق المسألة يتضمن فرضين مستقل كل منهما عن الآخر تمام الاستقلال كما أنه يتضمن طلب البحث عن مجهولين

(مثال ٣) صرف شخص ٨٣ فى شراء برتقال وتفاح فدفع قرشا فى كل ٣ برتقالات وقرشين فى كل ١٢ تفاحة ولو أنه اشترى خمسة أضعاف ما اشترى من البرتقال وربع ما اشترى من التفاح لبلغ ثمن ذلك ٢٦٣ فما عدد التفاح والبرتقال الذى اشتراه

نفرض ان س عدد البرتقال ، ص عدد التفاح

فيكون ثمن س من البرتقال = س/٣ قرشا

وثمن ص من التفاح = ٢ص/١٢ قرشا

∴ س/٣ + ص/٦ = ٨٣ .... (١)

وكذا ثمن ٥ س من البرتقال = ٥ س × ⅓ أو ٥س/٣ قرشا

وثمن ص/٤ من التفاح = ص/٤ × ٢/١٢ أو ص/٢٤ قرشا

∴ ٥س/٣ + ص/٢٤ = ٢٦٣ .... (٢)

وبضرب المعادلة (١) فى ٥ وطرح المعادلة (٢) من حاصل الضرب ينتج أن

$$\left(\frac{٥}{٦} - \frac{١}{٢٤}\right) \text{ص} = ١٥٢$$

$$\therefore \quad \frac{١٩ \text{ص}}{٢٤} = ١٥٢$$

$$\therefore \quad \text{ص} = ١٩٢$$

ومن (١) ينتج أن $\text{س} = ١٥٣$

وعليه يكون عدد البرتقال ١٥٣ وعدد التفاح ١٩٢

(مثال ٤) ما الكسر الذى إذا أضيف اثنان إلى بسطه وواحد إلى مقامه يساوى $\frac{٥}{٨}$ وإذا طرح من كل من بسطه ومقامه واحد يساوى $\frac{١}{٢}$

نفرض أن س بسط الكسر ، ص مقامه

فالكسر إذن $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$

من الفرض الأول ينتج أن $\frac{\text{س}+٢}{\text{ص}+١} = \frac{٥}{٨}$ ... ... (١)

ومن الثانى ينتج أن $\frac{\text{س}-١}{\text{ص}-١} = \frac{١}{٢}$ ... ... (٢)

ومن هاتين المعادلتين ينتج أن $\text{س} = ٨$ ، $\text{ص} = ١٥$

فالكسر إذن $\frac{٨}{١٥}$

(مثال ٥) الرقم الأوسط من عدد أكبر من المائة وأصغر من الالف صفر ومجموع الرقمين الاخرين ١١ وإذا انعكس وضع هذين الرقمين يزيد العدد الناتج على العدد الأصلى بمقدار ٤٩٥ فما العدد

نفرض أن س رقم الآحاد ، ص رقم المئات ومن حيث إن الرقم الأوسط صفر فالعدد إذن

١٠٠ ص + س (راجع بند ٨١ المثال الرابع)

وإذا انعكس وضع الرقمين يكون العدد الناتج ١٠٠ س + ص

$$\therefore \quad ١٠٠ \text{س} + \text{ص} - (١٠٠ \text{ص} + \text{س}) = ٤٩٥$$

$$\text{أو} \quad ١٠٠ \text{س} + \text{ص} - ١٠٠ \text{ص} - \text{س} = ٤٩٥$$

$$\therefore \quad ٩٩ \text{س} - ٩٩ \text{ص} = ٤٩٥$$

أو $\text{س} - \text{ص} = ٥$ ... ... (١)

وبما أن مجموع الرقمين ١١ والرقم الأوسط صفر يكون

$\text{س} + \text{ص} = ١١$ ... ... (٢)

ومن (١) ، (٢) نجد أن $\text{س} = ٨$ ، $\text{ص} = ٣$

فالعدد إذن ٣٠٨

(تمـارين ١٤ أ)

(١) ما العددان اللذان مجموعهما ٣٤ وفرقهما ١٠

(٢) مجموع عددين ٧٣ وفرقهما ٣٧ فما العددان

(٣) ثلث مجموع عددين ١٤ ونصف فرقهما ٤ فما العددان

(٤) جزء من تسعة عشر من مجموع عددين ٤ وفرق العددين ٣٠ فما العددان

(٥) نصف مجموع عددين ٢٠ وثلاثة أمثال فرقهما ١٨ فما العددان

(٦) ثمن ستة أرطال من الشاى واحد عشر رطلا من السكر ١٠٧ ص وثمن ١١ رطلا من الشاى وستة أرطال من السكر ١٨٢ ص فما ثمن كل رطل من الصنفين

(٧) إذا أمكن شخصا أن يشترى ستة خيول وسبع بقرات بمائتين وخمسين جنيها و ١٣ بقرة و ١١ حصانا بأربعمائة وواحد وستين جنيها فما ثمن الحصان وما ثمن البقرة

(٨) ا ، ب ، حـ ، ى يملكون ٢٩٠ جنيها وما مع ا ضعف ما مع حـ وما مع ب ثلاثة أمثال ما مع ى وجملة ما مع حـ ، ى تنقص عما مع ا بمقدار ٥٠ جنيها فما يملك كل منهم

(٩) ا ، ب ، حـ ، ى يملكون ٢٧٠ جنيها وما مع ا ثلاثة امثال ما مع حـ وما مع ب خمسة أمثال ما مع ى وجملة ما مع ا ، ب أقل من ثمانية امثال ما مع حـ بخمسين جنيها فما يملك كل منهم

(١٠) أربعة أمثال عمر ب يزيد ٢٠ سنة عن عمر ا وثلث عمر ا أقل من عمر ب بسنتين فما عمر كل منهما

(١١) جزء من احد عشر من عمر ا يزيد سنتين على $\frac{1}{7}$ عمر ب وضعف عمر ب يساوى ما كان يساويه عمر ا قبل ثلاث عشرة سنة فما عمر كل منهما

(١٢) ا يمشى فى ٨ ساعات ١٢ كيلومترا زيادة على ما يمشيه ب فى ٧ ساعات ، ب يمشى فى ١٣ ساعة ٧ كيلومترات زيادة على ما يمشيه ا فى تسع ساعات فما سرعة كل منهما بالكيلومتر فى الساعة

(١٣) حـ يمشى فى إحدى عشرة ساعة أقل مما يمشيه ى فى اثنتى عشرة ساعة بمقدار ١٢ $\frac{1}{2}$ من الكيلومترات ، ى يمشى فى خمس ساعات أقل مما يمشيه حـ فى سبع ساعات بمقدار ٣ $\frac{1}{4}$ من الكيلومترات فما سرعة كل منهما بالكيلومتر فى الساعة

(١٤) ما الكسر الذى إذا أضيف إلى مقامه ١ يصير $\frac{1}{2}$ وإذا اضيف إلى بسطه ٢ يصير $\frac{3}{5}$

(١٥) ما الكسر الذى يساوى $\frac{1}{2}$ إذا طرح ١ من بسطه واضيف ٢ إلى مقامه و $\frac{1}{4}$ إذا طرح ٧ من بسطه وطرح ٢ من مقامه

(١٦) ما الكسر الذى إذا أضيف ١ إلى بسطه يصير $\frac{1}{5}$ واذا طرح ١ من مقامه يصير $\frac{1}{7}$

(١٧) ما الكسر الذى إذا أضيف $\frac{2}{3}$ إلى بسطه يزيد بمقدار $\frac{1}{21}$ واذا طرح $\frac{1}{2}$ من مقامه يصير $\frac{2}{9}$

(١٨) إذا أضيف عدد مكون من رقمين إلى العدد الحادث من عكس وضع الرقمين كان الناتج ١١٠ فما العددان مع العلم بأن فرق الرقمين ٦

(١٩) مجموع رقمى عدد ١٣ والفرق بينه وبين العدد المكوّن من هذين الرقمين معكوسى الوضع ٢٧ فما العدد

(٢٠) إذا كان عدد مركب من رقمين يساوى ثلاثة أمثال مجموعهما واذا أضيف إليه ٤٥ ينتج عدد يساوى العدد الناتج من عكس وضعى الرقمين فما العدد

(٢١) عدد أكبر من العشرة وأقل من المائة يساوى ٨ أمثال مجموع رقميه واذا طرح منه ٤٥ نتج عدد يساوى العدد الناتج من عكس وضعى رقميه فما العدد

(٢٢) رجل عنده عدد من القطع ذات العشرين قرشا وعدد آخر من ذات القرشين ولاحظ أنه إذا صار عدد القطع ذات العشرين قرشا قطعا من ذات القرشين وصار عدد القطع ذات القرشين قطعا من ذات العشرين قرشا تزيد قيمة نقوده ١٠٨ ولكن إذا صار عدد القطع ذات العشرين قرشا قطعا من ذات العشرة القروش وصار عدد القطع ذات القرشين قطعا من ذات الخمسة القروش ينقص ما معه بقدر ١٧ فما عدد القطع التى يملكها الرجل من كل نوع

(٢٣) كيس يشتمل على كرات بيضاء وأخرى سوداء ونصف الكرات البيضاء يساوى ثلث السوداء وضعف الكرات جميعها يزيد أربعة على ثلاثة أمثال عدد السوداء فكم كرة فى الكيس

(٢٤) عدد مركب من ثلاثة أرقام أيمنها صفر واذا وضع الأوسط والأيسر كل موضع الآخر ينقص العدد ١٨٠ واذا وضع بدل رقم اليسار نصفه وحل الأيمن والأوسط كل موضع الآخر ينقص العدد ٤٥٤ فما العدد

(٢٥) أجرة ١٠ رجال و ٨ أولاد ١٨٥ فاذا كانت أجرة ٤ رجال تزيد ٥ على أجرة ستة أولاد فما أجرة كل من الرجل والولد

(٢٦) بقال يريد أن يخلط نوعا من التوابل ثمن الكيلوجرام منه ٨٠ بنوع آخر سعر الكيلوجرام منه ٥٠ بحيث تكون زنة المخلوط ٦٠ كيلوجراما يبيعها بسعر الكيلوجرام الواحد ٦٠ فكم كيلوجراما يأخذ من كل نوع ليكوّن المخلوط

(٢٧) قطع سائح مسافة ولو أنه سار بسرعة تزيد نصف كيلومتر فى الساعة على السرعة التى سار بها لما احتاج إلا إلى $\frac{4}{5}$ الزمن الذى استغرقه فى السير ولو أنه سار بسرعة تنقص نصف كيلومتر فى الساعة عن السرعة التى سار بها لاحتاج إلى زمن يزيد مقدار ساعتين ونصف ساعة على الزمن الذى استغرقه فى السير فما المسافة التى قطعها

(٢٨) مشى رجل ٣٥ كيلومترا بعضها بسرعة ٤ كيلومترات فى الساعة والباقى بسرعة ٥ كيلومترات فى الساعة ولو أنه مشى بسرعة ٥ كيلومترات فى الساعة ما مشاه بسرعة ٤ كيلومترات فى الساعة ومشى بسرعة ٤ كيلومترات فى الساعة ما مشاه بسرعة ٥ كيلومترات فى الساعة لاستطاع أن يقطع كيلومترين زيادة على ما مشاه فى الوقت عينه فما الزمن الذى استغرقه فى قطع هذه المسافة

(٢٩) شرع مسافران فى المسير فى وقت واحد وكانت المسافة بينهما ٢٧ كيلومترا ولو سارا فى اتجاه واحد لتلاقيا بعد ٩ ساعات ولو سارا فى اتجاهين متضادين لتلاقيا بعد ٣ ساعات فما سرعة سير كل منهما

(٣٠) تنفق أسرة مكوّنة من ثلاثة أشخاص بالغين وخمسة أطفال ١٨٧ ½ قرشاً فى الأسبوع على الطعام ولكنها اضطرت من الفقر أن تنقص ذلك إلى ١٠٠ قرش فى الأسبوع فأصبح البالغ يتناول من الطعام نصف ما كان يتناوله قبلا والطفل ثلثى ما كان يتناوله فما مقدار ما كان يصرف على كل بالغ وعلى كل طفل فى الأسبوع قبل الفقر

(٣١) إقترض شخص مبلغا بسعر ٦ ٪ وبلغت الفائدة فى زمن معين مبلغا يزيد على رأس المال مقدار مائة جنيه فاذا علم أنه إذا اقترض المبلغ عينه بسعر ٣ ٪ لمدة تساوى ربع المدة الأولى زاد رأس المال على الفائدة مقدار ٤٢٥ جنيها فكم كان رأس المال

(٣٢) ا قطع مسافة ٣٠ كيلومترا ماشيا فى زمن يزيد على ما يستغرقه ب فى قطعها ٣ ساعات ولو ضاعف ا سرعته لقطع تلك المسافة فى زمن يقل عما يستغرقه ب ساعتين فما سرعة كل منهما

الباب الخامس عشر — الرفع إلى القوى

بند ١٠٩ — تعريف : الرفع إلى قوة اسم عام يطلق على ضرب مقدار فى نفسه للحصول على قوته الثانية أو الثالثة أو الرابعة وهلم جرا

ويمكن دائما إيجاد أى قوة باجراء عملية الضرب ولكن سنبين فيما يأتى قواعد يمكننا أن نعرف بها بمجرد النظر

(١) أى قوة لأى مقدار بسيط

(٢) مربع أو مكعب أى مقدار ذى حدّين

(٣) مربع أى مقدار كثير الحدود

بند ١١٠ — يتضح من قانون العلامات أن

(أولا) القوة الزوجية لأى مقدار لا تكون سالبة أبدا

(ثانيا) علامة القوة الفردية لأى مقدار هى عين علامة ذلك المقدار

(ملاحظة): مما تجب ملاحظته أن مربع أى مقدار سواء كان سالبا أو موجبا موجب دائما

بند ١١١ — ينتج من التعريف المتقدّم ومن قواعد الضرب الجبرى أن

$$(ا^{٢})^{٣} = ا^{٢} . ا^{٢} . ا^{٢} = ا^{٢+٢+٢} = ا^{٦}$$

$$(-س^{٣})^{٢} = (-س^{٣})(-س^{٣}) = س^{٣+٣} = س$$

$$(-ا^{٥})^{٣} = (-ا^{٥})(-ا^{٥})(-ا^{٥}) = -ا^{٥+٥+٥} = -ا^{١٥}$$

$$(-٣ا^{٣})^{٤} = (-٣)^{٤}(ا^{٣})^{٤} = ٨١ ا^{١٢}$$

ومن هنا تنتج القاعدة الآتية لرفع أى مقدار جبرى بسيط لقوة ما

(قاعدة ١) نرفع المعامل إلى القوة المطلوبة بواسطة الحساب ونضع أمام الناتج العلامة اللائقة التى يمكن إيجادها باتباع قانون العلامات

(قاعدة ٢) نضرب أس كل عامل من عوامل المقدار فى أس القوة المراد الرفع إليها

(أمثلة) $(-٢ س^{٢})^{٥} = -٣٢ س^{١٠}$

، $(-٣ ا ب^{٣})^{٦} = ٧٢٩ ا^{٦} ب^{١٨}$

، $\left(\frac{٢ ا ب^{٣}}{٣ س^{٢} ص}\right)^{٤} = \frac{١٦ ا^{٤} ب^{١٢}}{٨١ س^{٨} ص^{٤}}$

ويلاحظ أننا فى المثال الأخير أوجدنا قوة البسط والمقام كل على حدة

(تمارين ١١٥ ا)

أكتب مربع كل من المقادير الآتية

(١) $٣ ا ب^{٣}$	(٦) $٥ س^{٢} ص^{٥}$	(١١) $\frac{٢ س^{٢}}{٣ ص^{٣}}$	(١٦) $-٢ س ص$
(٢) $ا^{٢} ح$	(٧) $-٢ ا ب ح^{٢}$	(١٢) $-\frac{٤}{٣ س^{٢} ص}$	(١٧) $\frac{٥ ا ب^{٣}}{٢ س ص}$
(٣) $٧ ا ب^{٢}$	(٨) $-٣ ح س^{٣}$	(١٣) $-\frac{٧ ا ب}{٣}$	(١٨) $١٣ ح^{٥} س^{٣}$
(٤) $١١ ب ح^{٣}$	(٩) $٤ س ص ع^{٣}$	(١٤) $\frac{٣ ا^{٢} ب^{٣}}{٤ ح^{٥} س^{٤}}$	(١٩) $-\frac{١}{٤ ا^{٤}}$
(٥) $٤ ا^{٤} ب س^{٢}$	(١٠) $-\frac{٢}{٣} ا^{١} ب^{٣}$	(١٥) $-\frac{١}{٢ س ص}$	(٢٠) $-\frac{٣ ا^{٥}}{٥ س^{٣}}$

أكتب مكعب كل من المقادير الآتية

(٢١) $٢ ا ب^{٢}$	(٢٤) $-٣ ا^{٣} ب$	(٢٧) $-٦ ا^{٦}$	(٣٠) $-\frac{٣ س^{٥}}{٥ ا^{٣}}$
(٢٢) $٣ س^{٣}$	(٢٥) $-٥ ا ب^{٢}$	(٢٨) $-٢ ا^{٧} ح^{٢}$	(٣١) $٧ س^{٣} ص^{٤}$
(٢٣) $٤ س^{٤}$	(٢٦) $-ب^{٣} ح^{٢} س$	(٢٩) $\frac{١}{٣ ص^{٢}}$	(٣٢) $-\frac{٢}{٣} ا^{٥}$

أكتب قيمة كل من المقادير الآتية

(٣٣) $(٣ ا^{٢} ب^{٣})^{٤}$	(٣٥) $(-٢ س^{٣} ص)^{٥}$	(٣٧) $\left(\frac{٣ س^{٤}}{٢ ص^{٣}}\right)^{٥}$	(٣٩) $\left(-\frac{س^{٣}}{٣}\right)^{٨}$
(٣٤) $(-ا^{٢} س)^{٦}$	(٣٦) $\left(\frac{١}{٢ ا^{٢}}\right)^{٧}$	(٣٨) $\left(\frac{٢ س^{٣}}{٣ ص^{٣}}\right)^{٨}$	(٤٠) $\left(-\frac{٢ س^{٥}}{٣ ا^{٤}}\right)^{٦}$

بند ١١٢ — لو أجرينا عملية الضرب فيما يأتى لوجدنا أن

$(ا + ب)^{٢} = (ا + ب)(ا + ب)$

$= ا^{٢} + ٢ ا ب + ب^{٢}$ .... (١)

$(ا - ب)^{٢} = (ا - ب)(ا - ب)$

$= ا^{٢} - ٢ ا ب + ب^{٢}$ .... (٢)

ويعبر عن هاتين النتيجتين بالقاعدتين الآتيتين

(قاعدة ١) مربع مجموع كميتين يساوى مجموع مربعيهما مضافا إليه ضعف حاصل ضربهما

(قاعدة ٢) مربع الفرق بين كميتين يساوى مجموع مربعيهما مطروحا منه ضعف حاصل ضربهما

(مثال ١) $(س + ٢ ص)^٢ = س^٢ + ٢ × س × ٢ ص + (٢ ص)^٢$

$= س^٢ + ٤ س ص + ٤ ص^٢$

(مثال ٢) $(٢ أ^٣ - ٣ ب^٢)^٢ = (٢ أ^٣)^٢ - ٢ × ٢ أ^٣ × ٣ ب^٢ + (٣ ب^٢)^٢$

$= ٤ أ^٦ - ١٢ أ^٣ ب^٢ + ٩ ب^٤$

بند ١١٣ — يستحسن أحيانا استعمال هاتين القاعدتين فى إيجاد مربعات الأعداد

(مثال ١) مربع ١٠١٢ $= (١٠٠٠ + ١٢)^٢$

$= (١٠٠٠)^٢ + ٢ × ١٠٠٠ × ١٢ + (١٢)^٢$

$= ١٠٠٠٠٠٠ + ٢٤٠٠٠ + ١٤٤$

$= ١٠٢٤١٤٤$

(مثال ٢) مربع ٩٨ $= (١٠٠ - ٢)$

$= (١٠٠)^٢ - ٢ × ١٠٠ × ٢ + (٢)$

$= ١٠٠٠٠ - ٤٠٠ + ٤$

$= ٩٦٠٤$

ويمكن اختصار العمل كثيرا إذا أهملت الخطوتان الأولى والثانية أثناء العمل

بند ١١٤ — الآن يمكن التوسع فى تطبيق القاعدتين المدوّنتين فى البند ١١٢ على الوجه الآتى

$(أ + ب + ح)^٢ = \{(أ + ب) + ح\}^٢$

$= (أ + ب)^٢ + ٢ (أ + ب) ح + ح^٢$ (بند ١١٢ القاعدة الأولى)

$= أ^٢ + ب^٢ + ح^٢ + ٢ أ ب + ٢ أ ح + ٢ ب ح$

وبالطريقة نفسها يمكن أن نبرهن على أن

$(أ - ب + ح)^٢ = أ^٢ + ب^٢ + ح^٢ - ٢ أ ب + ٢ أ ح - ٢ ب ح$

وأن $(أ + ب + ح + ء)^٢ = أ^٢ + ب^٢ + ح^٢ + ء^٢ + ٢ أ ب + ٢ أ ح + ٢ أ ء$
$+ ٢ ب ح + ٢ ب ء + ٢ ح ء$

وفى كل من هذه الأمثلة نرى أن المربع مركب من

(١) مجموع مربعات الحدود المكوّن منها المقدار

(٢) ضعف مجموع حواصل ضرب الحدود مأخوذة مثنى مع مراعاة قانون العلامات فى كل منها بمعنى أن تكون العلامة + أو − فى كل حاصل حسب اتحاد علامتى المقدارين المكوّن منهما ذلك الحاصل أو اختلافهما

(ملاحظة) الحدود المرفوعة إلى القوة الثانية لا تكون إلا موجبة والقوانين السابقة تسرى على أى مقدار يراد تربيعه مهما بلغ عدد حدوده

(قاعدة) لايجاد مربع أى مقدار كثير الحدود نربع كل حدّ من الحدود الداخلة فيه ونضم إلى مجموع تلك المربعات ضعف حاصل ضرب كل حدّ منه فى كل حدّ من الحدود التى تتلوه مأخوذة الواحد بعد الآخر على الترتيب و يراعى فى علامات حواصل الضرب ما جاء فى قانون العلامات

(مثال ١)

$(س - ٢ص - ٣ع)^٢ = س^٢ + ٤ص^٢ + ٩ع^٢ - ٢ × س × ٢ص - ٢ × س × ٣ع + ٢ × ٢ص × ٣ع$

$= س^٢ + ٤ص^٢ + ٩ع^٢ - ٤س ص - ٦س ع + ١٢ص ع$

(مثال ٢)

$(١ + ٢س - ٣س^٢)^٢ = ١ + ٤س^٢ + ٩س^٤ + ٢ × ١ × ٢س - ٢ × ١ × ٣س^٢ - ٢ × ٢س × ٣س^٢$

$= ١ + ٤س^٢ + ٩س^٤ + ٤س - ٦س^٢ - ١٢س^٣$

$= ١ + ٤س - ٢س^٢ - ١٢س^٣ + ٩س^٤$

وذلك بعد اختصار الحدود وترتيبها حسب القوى الصاعدة للحرف س

(تمارين ١٥ ب)

أكتب مربع كل من المقادير الآتية

(١) ا + ٣ب	(١٠) س - ا ب ح	(١٩) ٣ط - ٢ن + ٤ر
(٢) ا - ٣ب	(١١) ا س + ٢ب ص	(٢٠) $س^٢$ - س + ١
(٣) س - ٥ص	(١٢) $س^٢$ - ١	(٢١) ٢$س^٢$ + ٣س - ١
(٤) ٢س + ٣ص	(١٣) ا - ب - ح	(٢٢) س - ص + ا - ب
(٥) ٣س - ص	(١٤) ا + ب - ح	(٢٣) ٢س + ٣ص + ا - ٢ب
(٦) ٣س + ٥ص	(١٥) ا + ٢ب + ح	(٢٤) م - ﻫ - ط - ك
(٧) ٩س - ٢ص	(١٦) ٢ا - ٣ب + ٤ح	(٢٥) $\frac{١}{٢}$ا - ٢ب + $\frac{ح}{٤}$
(٨) ٥ا ب - ح	(١٧) $س^٢$ - $ص^٢$ - $ع^٢$	(٢٦) $\frac{ا}{٣}$ - ٣ب - $\frac{٣}{٢}$
(٩) ط ك - ر	(١٨) س ص + ص ع + ع س	(٢٧) $\frac{٢}{٣}$$س^٢$ - س + $\frac{٣}{٢}$

بند ١١٥ — لو أجرينا عملية الضرب فيما يأتى لوجدنا أن

$(ا + ب)^٣ = (ا + ب) (ا + ب) (ا + ب)$

$= ا^٣ + ٣ا^٢ ب + ٣ا ب^٢ + ب^٣$

وأن $(ا - ب)^٣ = ا^٣ - ٣ا^٢ ب + ٣ا ب^٢ - ب^٣$

و بمراعاة كيفية تكوين الحدود فى هاتين النتيجتين يمكننا أن نعرف مكعب أى مقدار جبرى ذى حدّين

(مثال ١) : $(٢س + ص)^{٣} = (٢س)^{٣} + ٣(٢س)^{٢} ص + ٣(٢س) ص^{٢} + ص^{٣}$

$= ٨س^{٣} + ١٢س^{٢} ص + ٦س ص^{٢} + ص^{٣}$

(مثال ٢) : $(٣س - ٢أ^{٢})^{٣} = (٣س)^{٣} - ٣(٣س)^{٢}(٢أ^{٢}) + ٣(٣س)(٢أ^{٢})^{٢} - (٢أ^{٢})^{٣}$

$= ٢٧س^{٣} - ٥٤س^{٢}أ^{٢} + ٣٦س أ^{٤} - ٨أ^{٦}$

(تمارين ١٥ ح)

أكتب مكعب كل من المقادير الآتية

(١) $س + أ$ (٢) $س - أ$ (٣) $س - ٢ص$ (٤) $٢س + ص$

(٥) $٣س - ٥ص$ (٦) $أب + ح$ (٧) $٢أب - ٣ح$ (٨) $٥أ - ب ح$

(٩) $س^{٢} + ٤ص^{٢}$ (١٠) $٤س^{٢} - ٥ص^{٢}$ (١١) $٢أ^{٣} - ٣ب^{٢}$ (١٢) $٥س^{٥} - ٤ص^{٤}$

(١٣) $أ - \frac{٢ب}{٣}$ (١٤) $\frac{١}{٣} + ٢$ (١٥) $\frac{س^{٢}}{٣} - ٣س$ (١٦) $\frac{١}{٦} + ٢س$

الباب السادس عشر — استخراج الجذور

بند ١١٦ — تعريف : جذر أي مقدار معلوم هو الكمية التي إذا رفعت إلى قوة معينة ينتج ذلك المقدار فعملية استخراج الجذر إذن عكس عملية الرفع إلى القوة

بند ١١٧ — على مقتضى قانون العلامات نرى أن

(١) الجذر الزوجي لأي مقدار موجب يمكن اعتباره إما موجبا أو سالبا

(٢) لا يمكن أن يكون للمقدار السالب جذر دليله زوجي

(٣) علامة كل جذر دليله فردي لمقدار ما هي علامة المقدار نفسه

(ملاحظة) يجب أن يلاحظ أن لكل مقدار موجب جذرين تربيعيين متساويين في المقدار ومختلفين في العلامة

(مثال) $\sqrt{٩أ^{٢}س^{٦}} = \pm ٣أس^{٣}$

وسنقتصر في هذا الباب على البحث في الجذور الموجبة

أمثلة

$\sqrt{أ^{٦}ب^{٤}} = أ^{٣}ب^{٢}$ لأن $(أ^{٣}ب^{٢})^{٢} = أ^{٦}ب^{٤}$

$\sqrt[٣]{-س^{٦}} = -س^{٣}$ لأن $(-س^{٣})^{٣} = -س^{٩}$

$\sqrt[٥]{ح^{٢٠}} = ح^{٤}$ لأن $(ح^{٤})^{٥} = ح^{٢٠}$

$\sqrt[٤]{٨١س^{١٢}} = ٣س^{٣}$ لأن $(٣س^{٣})^{٤} = ٨١س^{١٢}$

بند ١١٨ — من الأمثلة المتقدّمة نستخلص قاعدة عمومية لاستخراج أى جذر لأى مقدار بسيط وهى

قاعدة (١) يستخرج جذر المعامل بالطرق المعروفة فى علم الحساب وتوضع أمام النـاتج العلامة اللائقة حسبما يقتضيه قانون العلامات

قاعدة (٢) يقسم أس كل عامل فى المقدار على دليل الجذر

(أمثلة)

$$\sqrt[٣]{-٦٤ س^{٦}} = -٤ س^{٢}$$

$$\sqrt[٤]{١٦ أ^{٨}} = ٢ أ^{٢}$$

$$\sqrt{\frac{٨١ س^{١٠}}{٢٥ حـ^{٤}}} = \frac{٩ س^{٥}}{٥ حـ^{٢}}$$

(تمـارين ١١٦ ا)

ما الجذر التربيعى لكل من المقادير الآتية

(١) $٤ أ^{٢} ب^{٤}$
(٢) $٩ س^{٦} ص^{٢}$
(٣) $٢٥ س^{٤} ص^{٢}$
(٤) $١٦ أ^{٤} ب^{٢} حـ^{٦}$

(٥) $٨١ أ^{٦} ب^{٨}$
(٦) $١٠٠ س^{٨}$
(٧) $أ^{٢٠} د^{١٦} حـ^{٤}$
(٨) $أ^{٨} ب حـ^{٢}$

(٩) $٦٤ س^{٦} ص^{١٨}$
(١٠) $\frac{٣٦}{أ^{٣٦}}$
(١١) $\frac{أ^{١٦} ب^{٨}}{١٦}$
(١٢) $\frac{٢٨٩ ص^{٤}}{٢٥}$

(١٣) $\frac{٣٢٤ س^{١٢}}{١٦٩ ص^{٦}}$
(١٤) $\frac{٨١ أ^{١٨}}{٣٦ ب^{١٢}}$
(١٥) $\frac{٢٥٦ س^{٢} ص^{٤}}{٢٨٩ ط^{١٤}}$
(١٦) $\frac{٤٠٠ أ^{٤٠} ب^{٢٠}}{٨١ س^{١٠} ص^{١٨}}$

ما الجذر التكعيبي لكل من المقادير الآتية

(١٧) $٢٧ أ^{٦} ب^{٣} حـ^{٣}$
(١٨) $-٨ أ^{١٢} ب$

(١٩) $٦٤ س^{٦} ص^{٣} ع^{١٢}$
(٢٠) $-٣٤٣ أ^{١٢} ب^{١٨}$

(٢١) $-\frac{س^{١٢} ص^{٣}}{١٢٥}$
(٢٢) $\frac{٨ س^{٩}}{٧٢٩ ص^{١٥}}$

(٢٣) $\frac{١٢٥ أ^{٣} ب^{٦}}{٢١٦ س^{٦} ص}$
(٢٤) $-\frac{٢٧ س^{٢٧}}{٦٤ ص^{٦٣}}$

ما قيمة كل من المقادير الآتية

(٢٥) $\sqrt[٤]{٨١ أ^{٨} س^{١٢}}$
(٢٦) $\sqrt[٧]{س^{١٤} ص^{٢١}}$
(٢٧) $\sqrt[٥]{٣٢ س^{٥} ص^{١٠}}$

(٢٨) $\sqrt[٦]{٧٢٩ أ^{١٨} ب^{٦}}$
(٢٩) $\sqrt[٨]{٢٥٦ أ^{٨} س^{٦٤}}$
(٣٠) $\sqrt[٥]{-س^{١٠} ص^{١٥}}$

(٣١) $\sqrt[٧]{\frac{١٢٨}{أ^{٦٣} ب^{٥٦}}}$
(٣٢) $\sqrt[١٠]{\frac{أ^{٣٠} س^{٥٠}}{ب^{١٠٠}}}$
(٣٣) $\sqrt[٩]{\frac{أ^{١٨}}{٢٧ حـ^{٣٦}}}$

بند ١١٨ — (ا) قد علمنا مما جاء ببند (١١٢) أنه يمكن كتابة مربع أى مقدار ذى حدّين بدون إجراء عملية الضرب

مثلا $(٢ س + ٣ ص)^٢ = (٢ س)^٢ + ٢ × ٢ س × ٣ ص + (٣ ص)^٢$

وبالعكس قد يكفى فى بعض الأحيان لاستخراج الجذر التربيعى لمقدار جبرى مجرّد النظر إلى حدوده

(مثال ١) ما الجذر التربيعى للقدار $٢٥ س^٢ - ٤٠ س ص + ١٦ ص^٢$

هذا المقدار $= (٥ س)^٢ - ٢ × ٢٠ س ص + (٤ ص)^٢$

$= (٥ س)^٢ - ٢ (٥ س) (٤ ص) + (٤ ص)^٢$

$= (٥ س - ٤ ص)^٢$

فالجذر المراد استخراجه $٥ س - ٤ ص$

(مثال ٢) ما الجذر التربيعى للقدار $\frac{٦٤ ا^٢}{٩ ب^٢} + ٤ + \frac{٣٢ ا}{٣ ب}$

المقدار $= \left(\frac{٨ ا}{٣ ب}\right)^٢ + (٢)^٢ + ٢ \left(\frac{١٦ ا}{٣ ب}\right)$

$= \left(\frac{٨ ا}{٣ ب}\right)^٢ + ٢ \left(\frac{٨ ا}{٣ ب}\right) (٢) + (٢)^٢$

$= \left(\frac{٨ ا}{٣ ب} + ٢\right)^٢$

فالجذر التربيعى المطلوب $\frac{٨ ا}{٣ ب} + ٢$

(مثال ٣) ما الجذر التربيعى للقدار $٤ ا^٢ + ب^٢ + ح^٢ + ٤ ا ب - ٤ ا ح - ٢ ب ح$

نرتب الحدود حسب القوى النازلة للحرف ا مع مراعاة ترتيب باقى الحروف حسب مراتبها فى المعجم الاول فالأوّل

فالمقدار $= ٤ ا^٢ + ٤ ا ب - ٤ ا ح + ب^٢ - ٢ ب ح + ح^٢$

$= ٤ ا^٢ + ٤ ا (ب - ح) + (ب - ح)^٢$

$= (٢ ا)^٢ + ٢ × ٢ ا (ب - ح) + (ب - ح)^٢$

$= \{٢ ا + (ب - ح)\}^٢$

فالجذر التربيعى المطلوب $٢ ا + ب - ح$

ويمكننا أن نتبع الطريقة الآتية فى الحل

المقدار $= (٢ ا)^٢ + ب^٢ + ح^٢ + ٢ × (٢ ا) × ب - ٢ × (٢ ا) × ح$

$- ٢ × ب × ح$

وواضح أن هذا المقدار مربع $٢ ا + ب - ح$ [بند ١١٤]

بند ١١٩ — إذا لم يكن استخراج الجذر التربيعى ميسورا بمجرد النظر تتبع القاعدة الآتية وهى قاعدة عامّة تنطبق على كل الأحوال ولكنا نشير على المتعلم أن يجتهد فى إيجاد الجذر بطريقة النظر متى أمكنه ذلك فانه خير من استخراجه بطريقة القواعد

بما أن مربع (ا + ب) هو ا٢ + ٢ ا ب + ب٢ يلزمنا أن نبحث عن طريقة تمكننا من إيجاد كل من ا ، ب اللذين هما حدا الجذر متى علم المقدار ا٢ + ٢ ا ب + ب٢

ولذا نقول إن ا٢ + ٢ ا ب + ب٢ = ا٢ + ب (٢ ا + ب) وبذلك نرى أن المقدار مكوّن من إضافة المقدارين الآتيين أحدهما إلى الآخر

(أولا) مربع الحدّ الاول من الجذر

(ثانيا) حاصل ضرب الحد الثانى من الجذر فى مجموع كل من الحدّ الثانى وضعف الحدّ الاول منه

واذا عكسنا الطريقة المتقدّمة وصلنا إلى كيفية إيجاد الجذر وهى

ا٢ + ٢ ا ب + ب٢ | ا + ب
ا٢

٢ ا ب + ب٢ | ٢ ا + ب
٢ ا ب + ب٢

وشرح ذلك أن

(١) ترتب الحدود على حسب قوى احد الحروف وهو ا مثلا

(٢) يؤخذ الجذر التربيعى للحدّ ا٢ ويكون النـاتج الحدّ الاول من الجذر المطلوب ثم يطرح مربع ذلك الجذر من المقدار الكلى المعلوم

(٣) يقسم أوّل حدّ من الباقى على ضعف اول حدّ من الجذر فينتج الحدّ الثانى من الجذر وهو ب

(٤) يضاف الحدّ الثانى من الجذر إلى ضعف الحدّ الاول منه فيتكوّن منهما المقسوم عليـه الكلى وهو ٢ ا + ب

(مثـال ١) لاستخراج الجذر التربيعى للمقدار ٩ سـ٢ — ٤٢ سـ صـ + ٤٩ صـ٢ يجرى العمل هكذا

٩ سـ٢ — ٤٢ سـ صـ + ٤٩ صـ٢ | ٣ سـ — ٧ صـ
٩ سـ٢

— ٤٢ سـ صـ + ٤٩ صـ٢ | ٦ سـ — ٧ صـ
— ٤٢ سـ صـ + ٤٩ صـ٢

(شرح العملية) الجذر التربيعى للقدار ٩ سـ٢ هو ٣ سـ وهو أول حدّ فى الجذر

وبتضعيف هذا الحدّ ينتج ٦ سـ وهو أول حدّ من المقسوم عليه فنقسم — ٤٢ سـ صـ وهو أول حدّ من الباقى على ٦ سـ فينتج — ٧ صـ وهو الحدّ الثانى فى الجذر ويوضع أيضا فى المقسوم عليه ثم نضرب المقسوم عليه بأجمعه فى — ٧ صـ ونطرح حاصل الضرب من الباقى الأول فلا نجد باقيا وعلى ذلك يكون الناتج ٣ سـ — ٧ صـ الجذر المطلوب

تستعمل هـذه القاعدة فى إيجاد الجذر التربيعى لاى مقدار كثير الحدود فنستخرج الحدّين الأوّلين بالطريقة المتقـدّمة ثم ننزل باقى الطرح الثانى ونضعف حدّى الجذر المعلومين لتكوين الجزء الاول من المقسوم عليـه الجديد ثم نقسم أول حدّ من الباقى على أول حدّ من هـذا المقسوم عليه فيكون الخارج

هو الحدّ الثالث من الجذر فنضمه إلى حدود الجذر المستخرجة ونضعه أيضا فى المقسوم عليه ونضرب هذا الاخير بأكمله فى الحدّ الثالث من الجذر ونطرح الحاصل من الباقى المعلوم فان كان باقى الطرح صفرا فما وجد يكون الجذر المطلوب وإلا نكرر العمل حتى نصل إلى نهاية

(مثال ٢) لاستخراج الجذر التربيعى للمقدار ٢٥ سـ^{2} ا^{2} − ١٢ سـ ا^{3} + ١٦ سـ^{4} + ٤ ا^{4} − ٢٤ سـ^{3} ا

نرتب المقدار حسب القوى النازلة للحرف سـ هكذا

١٦ سـ^{4} − ٢٤ سـ^{3} ا + ٢٥ سـ^{2} ا^{2} − ١٢ سـ ا^{3} + ٤ ا^{4} | ٤ سـ^{2} − ٣ سـ ا + ٢ ا^{2}

١٦ سـ^{4}

٨ سـ^{2} − ٣ سـ ا | − ٢٤ سـ^{3} ا + ٢٥ سـ^{2} ا^{2}

− ٢٤ سـ^{3} ا + ٩ سـ^{2} ا^{2}

٨ سـ^{2} − ٦ سـ ا + ٢ ا^{2} | ١٦ سـ^{2} ا^{2} − ١٢ سـ ا^{3} + ٤ ا^{4}

١٦ سـ^{2} ا^{2} − ١٢ سـ ا^{3} + ٤ ا^{4}

(شرح العملية) بعد الحصول على حدّين فى الجذر وهما ٤ سـ^{2} و − ٣ سـ ا نجد أن الباقى ١٦ سـ^{2} ا^{2} − ١٢ سـ ا^{3} + ٤ ا^{4}

فنضاعف حدّى الجذر المعلومين فيحدث ٨ سـ^{2} − ٦ سـ ا ونجعل هذا الناتج أول جزء من المقسوم عليه الجديد ثم بقسمة ١٦ سـ^{2} ا^{2} وهو الحدّ الأول من الباقى على ٨ سـ^{2} وهو الحدّ الأوّل من المقسوم عليه ينتج + ٢ ا^{2} وهذا يوضع فى كل من ناتج الجذر والمقسوم عليه ثم نضرب المقسوم عليه بأكمله فى ٢ ا^{2} ونطرح الحاصل من الباقى المعلوم وبذا تنتهى العملية لعدم وجود باق

(تمارين ١٦ ب)

إستخرج الجذر التربيعى لكل من المقادير الاتية

(١) سـ^{2} + ٤ سـ صـ + ٤ صـ^{2}

(٢) ٩ ا^{2} + ١٢ ا ب + ٤ ب^{2}

(٣) سـ^{2} − ١٠ سـ صـ + ٢٥ صـ^{2}

(٤) ٤ سـ^{2} − ١٢ سـ صـ + ٩ صـ^{2}

(٥) ٨١ سـ^{2} + ١٨ سـ صـ + صـ^{2}

(٦) ٢٥ سـ^{2} − ٣٠ سـ صـ + ٩ صـ^{2}

(٧) سـ^{4} − ٢ سـ^{2} صـ^{2} + صـ^{4}

(٨) ١ − ٢ ا^{3} + ا^{6}

(٩) ا^{4} − ٢ ا^{3} + ٣ ا^{2} − ٢ ا + ١

(١٠) ٤ سـ^{4} − ١٢ سـ^{3} + ٢٩ سـ^{2} − ٣٠ سـ + ٢٥

(١١) ٩ سـ^{4} − ١٢ سـ^{3} − ٢ سـ^{2} + ٤ سـ + ١

(١٢) سـ^{4} − ٤ سـ^{3} + ٦ سـ^{2} − ٤ سـ + ١

(١٣) ٤ ا^{4} + ٤ ا^{3} − ٧ ا^{2} − ٤ ا + ٤

(١٤) ١ − ١٠ سـ + ٢٧ سـ^{2} − ١٠ سـ^{3} + سـ^{4}

(١٥) ٤ سـ^{2} + ٩ صـ^{2} + ٢٥ ع^{2} + ١٢ سـ صـ − ٣٠ صـ ع − ٢٠ سـ ع

(١٦) $١٦ س^{٦} + ١٦ س^{٧} - ٤ س^{٨} - ٤ س + س^{١٠}$

(١٧) $س^{٦} - ٢٢ س^{٤} + ٣٤ س^{٣} + ١٢١ س^{٢} - ٣٧٤ س + ٢٨٩$

(١٨) $٢٥ س^{٤} - ٣٠ ا س^{٣} + ٤٩ ا^{٢} س^{٢} - ٢٤ ا^{٣} س + ١٦ ا^{٤}$

(١٩) $٤ س^{٤} + ٤ س^{٢} ص - ١٢ س^{٢} ع^{٢} + ص^{٤} - ٦ ص^{٢} ع^{٢} + ٩ ع^{٤}$

(٢٠) $٦ ا ب^{٢} ح - ٤ ا^{٢} ب ح + ا^{٢} ب^{٢} + ٤ ا^{٢} ح^{٢} + ٩ ب^{٢} ح^{٢} - ١٢ ا ب ح^{٢}$

(٢١) $- ٦ ب^{٢} ح^{٢} + ٩ ح^{٤} + ب^{٤} - ١٢ ح^{٢} ا^{٢} + ٤ ا^{٤} + ٤ ا^{٢} ب^{٢}$

(٢٢) $٤ س^{٤} + ٩ ص^{٤} + ١٣ س^{٢} ص^{٢} - ٦ س ص^{٣} - ٤ س^{٣} ص$

(٢٣) $٦٧ س^{٢} + ٤٩ + ٩ س^{٤} - ٧٠ س - ٣٠ س^{٣}$

(٢٤) $١ - ٤ س + ١٠ س^{٢} - ٢٠ س^{٣} + ٢٥ س^{٤} - ٢٤ س^{٥} + ١٦ س$

(٢٥) $١٦ ا ح س^{٥} + ٤ ب^{٢} س^{٤} + ا^{٢} س^{١٠} + ٩ ح^{٢} - ١٢ ب ح س^{٢} - ٤ ا ب س^{٧}$

بند ١٢٠ — إذا اشتمل المقدار المراد استخراج جذره على حدود كسرية تتبع الطريقة العامة السابقة ويعمل فى الكسور على حسب ما جاء خاصا بها فى الباب الثانى عشر

بند ١٢١ — وهناك أمر مهم يجب الالتفات إليه حينما يشتمل المقدار على قوى حرف مخصوص مع قوى مقلوبة لذلك الحرف فمثلا المقدار

$$٢ س + \frac{١}{س^{٢}} + ٤ + س^{٣} + \frac{٥}{س} + ٧ س^{٢} + \frac{٨}{س^{٣}}$$

إن رتب حسب القوى النازلة للحرف س يجب أن يكتب هكذا

$$س^{٣} + ٧ س^{٢} + ٢ س + ٤ + \frac{٥}{س} + \frac{١}{س^{٢}} + \frac{٨}{س^{٣}}$$

مع مراعاة وضع الكمية العددية ٤ بين س و $\frac{١}{س}$

وسيظهر فى الباب الثلاثين سبب ترتيب القوى على هذه الكيفية

(مثال) ما الجذر التربيعى للمقدار

$$٢٤ + \frac{١٦ ص^{٢}}{س^{٢}} - \frac{٨ س}{ص} + \frac{س^{٢}}{ص^{٢}} - \frac{٣٢ ص}{س}$$

نرتب المقدار على حسب القوى النازلة للحرف ص

$$\frac{١٦ ص^{٢}}{س^{٢}} - \frac{٣٢ ص}{س} + ٢٤ - \frac{٨ س}{ص} + \frac{س^{٢}}{ص^{٢}} \quad \Big| \quad \frac{٤ ص}{س} - ٤ + \frac{س}{ص}$$

$$\frac{١٦ ص^{٢}}{س^{٢}}$$

$$\frac{٨ ص}{س} - ٤ \quad \Big| \quad - \frac{٣٢ ص}{س} + ٢٤$$

$$- \frac{٣٢ ص}{س} + ١٦$$

$$\frac{٨ ص}{س} - ٨ + \frac{س}{ص} \quad \Big| \quad ٨ - \frac{٨ س}{ص} + \frac{س^{٢}}{ص^{٢}}$$

$$٨ - \frac{٨ س}{ص} + \frac{س^{٢}}{ص^{٢}}$$

ففى هذه العملية ينتج الحدّ الثانى من الجذر وهو -٤ من قسمة $-\frac{٣٢ص}{س}$ على $\frac{٨ص}{س}$

وينتج الحدّ الثالث $\frac{س}{ص}$ من قسمة ٨ على $\frac{٨ص}{س}$ هكذا

$$٨ \div \frac{٨ص}{س} = ٨ \times \frac{س}{٨ص} = \frac{س}{ص}$$

(تمارين ١٦ ح)

استخرج الجذر التربيعى لكل من المقادير الاتية

(١) $\frac{س^٢}{٤} - ٣س + ٩$

(٢) $٤ - \frac{٤س}{ص} + \frac{س^٢}{ص^٢}$

(٣) $\frac{س^٢}{٢٥} + \frac{٢س ص}{٥} + ص^٢$

(٤) $\frac{س^٢}{ص^٢} + \frac{١٠س}{ص} + ٢٥$

(٥) $\frac{س^٢}{٤ص^٢} - \frac{٢س}{ص} + ٤$

(٦) $\frac{س^٢}{ص^٢} - \frac{٢اس}{ب ص} + \frac{ا^٢}{ب^٢}$

(٧) $\frac{٦٤س^٢}{٩ص^٢} + \frac{٣٢س}{٣ص} + ٤$

(٨) $\frac{٩س^٢}{٢٥} - ٢ + \frac{٢٥}{٩س^٢}$

(٩) $\frac{ا^٤}{٦٤} + \frac{ا^٣}{٨} - ا + ١$

(١٠) $س^٤ + ٢س^٣ - س + \frac{١}{٤}$

(١١) $-٣ا^٣ + \frac{٢٥}{٩} + ا^٤ - ٥ا + \frac{٦٧}{١٢}ا^٢$

(١٢) $س^٤ - ٢س + \frac{١}{٩} + \frac{٢٩}{٣}س^٢ - ٦س^٣$

(١٣) $\frac{ا^٤}{٤} + \frac{ا^٣}{س} + \frac{ا^٢}{س^٢} - اس - ٢ + \frac{س^٢}{ا^٢}$

(١٤) $س^٤ - ٢س^٣ + \frac{٣س^٢}{٢} - \frac{س}{٢} + \frac{١}{١٦}$

(١٥) $\frac{س^٤}{٤} + ٤س^٢ + \frac{اس^٢}{٣} + \frac{ا^٢}{٩} - ٢س^١ - \frac{١٤اس}{٣}$

(١٦) $\frac{٩ا^٢}{س^٢} - \frac{١٦ا}{٥س} + \frac{١٠١}{٢٥} - \frac{٤س}{١٥ا} + \frac{٤س^٢}{٩ا^٢}$

(١٧) $١٦م^٤ + \frac{١٦}{٣}م^٢ ن + ٨م^٢ + \frac{٤}{٩}ن^٢ + \frac{٤}{٣}ن + ١$

(١٨) $٤س^٤ + ٣٢س^٢ + ٩٦ + \frac{٦٤}{س^٤} + \frac{١٢٨}{س^٢}$

بند ١٢٢ — استخراج الجذر التكعيبى لأى مقدار مركب

بما أن مكعب (ا + ب) هو ا^{٣} + ٣ ا^{٢} ب + ٣ ا ب^{٢} + ب^{٣} فيجب أن نبحث عن طريقة تمكننا من استخراج الحدّين ا ، ب إذا علم المقدار ا^{٣} + ٣ ا^{٢} ب + ٣ ا ب^{٢} + ب^{٣}

نرى أن أول حدّ فى الجذر وهو ا هو الجذر التكعيبى للكمية ا^{٣} التى هى أول حدّ فى المقدار المعلوم فنرتب حدود المقدار حسب قوى أحد الحروف وليكن ا مثلا ونأخذ الجذر التكعيبى للحدّ ا^{٣} وهو أول حدّ فى المقدار فيكون الناتج وهو ا أول حدّ فى الجذر المراد استخراجه ثم نطرح مكعب ا من المقدار بتمامه ويكون الباقى

٣ ا^{٢} ب + ٣ ا ب^{٢} + ب^{٣} أى (٣ ا^{٢} + ٣ ا ب + ب^{٢}) × ب

منه نرى أنه يمكن استخراج الحدّ الثانى للجذر وهو ب بقسمة هذا الباقى على ٣ ا^{٢} + ٣ ا ب + ب وبالتأمل فى هذا المقسوم عليه نجد أنه مركب من

(١) ثلاثة أمثال مربع ا التى هى الحدّ الاول من ناتج الجذر

(٢) ثلاثة أمثال حاصل ضرب الحدّ الاول ا فى الحدّ الثانى ب

(٣) مربع ب

فيمكننا ترتيب العمل على الوجه الآتى

ا^{٣} + ٣ ا^{٢} ب + ٣ ا ب^{٢} + ب^{٣} | ا + ب

ا^{٣}

---

٣ ا^{٢} ب + ٣ ا ب^{٢} + ب^{٣} | ٣ (ا)^{٢} = ٣ ا^{٢}

٣ × ا × ب = + ٣ ا ب

(ب)^{٢} = + ب^{٢}

٣ ا^{٢} + ٣ ا ب + ب^{٢}

٣ ا^{٢} ب + ٣ ا ب^{٢} + ب^{٣}

(مثال ١) ما الجذر التكعيبى للمقدار ٨ س^{٣} − ٣٦ س^{٢} ص + ٥٤ س ص^{٢} − ٢٧ ص^{٣}

٨ س^{٣} − ٣٦ س^{٢} ص + ٥٤ س ص^{٢} − ٢٧ ص^{٣} | ٢ س − ٣ ص

٨ س^{٣}

− ٣٦ س^{٢} ص + ٥٤ س ص^{٢} − ٢٧ ص^{٣} | ٣ (٢ س)^{٢} = ١٢ س^{٢}

٣ × ٢ س × (− ٣ ص) = − ١٨ س ص

(− ٣ ص)^{٢} = + ٩ ص^{٢}

١٢ س^{٢} − ١٨ س ص + ٩ ص^{٢}

− ٣٦ س ص^{٢} + ٥٤ س ص^{٢} − ٢٧ ص^{٣}

(مثـال ٢) استخرج الجذر التكعيبى للقدار ٢٧ + ١٠٨ س + ٩٠ س^{٢} — ٨٠ س^{٣} — ٦٠ س^{٤} + ٤٨ س^{٥} — ٨ س^{٦}

٢٧ + ١٠٨ س + ٩٠ س^{٢} — ٨٠ س^{٣} — ٦٠ س^{٤} + ٤٨ س^{٥} — ٨ س^{٦} | ٣ + ٤ س — ٢ س^{٢}

٢٧

+ ١٠٨ س + ٩٠ س^{٢} — ٨٠ س^{٣}

+ ١٠٨ س + ١٤٤ س^{٢} + ٦٤ س^{٣}

— ٥٤ س^{٢} — ١٤٤ س^{٣} — ٦٠ س^{٤} + ٤٨ س^{٥} — ٨ س^{٦}

— ٥٤ س^{٢} — ١٤٤ س^{٣} — ٦٠ س^{٤} + ٤٨ س^{٥} — ٨ س^{٦}

٣ × (٣)^{٢} = ٢٧

٣ × ٣ × ٤ س = + ٣٦ س

(٤ س)^{٢} = + ١٦ س^{٢}

٢٧ + ٣٦ س + ١٦ س^{٢}

٣ × (٣ + ٤ س)^{٢} = ٢٧ + ٧٢ س + ٤٨ س^{٢}

٣ × (٣ + ٤ س) × (— ٢ س^{٢}) = — ١٨ س^{٢} — ٢٤ س^{٣}

(— ٢ س^{٢})^{٢} = + ٤ س^{٤}

٢٧ + ٧٢ س + ٣٠ س^{٢} — ٢٤ س^{٣} + ٤ س^{٤}

(شرح العملية) بعد ان نستخرج حدّين فى الجذر وهما ٣ + ٤ س نجد باقيا وهو

— ٥٤ س^{٢} — ١٤٤ س^{٣} — ٦٠ س^{٤} + ٤٨ س^{٥} — ٨ س^{٦}

فنأخذ ثلاثة امثال مربع الجذر الناتج فيحدث ٢٧ + ٧٢ س + ٤٨ س^{٢} وهذا اوّل جزء من المقسوم عليه الجديد

ثم نقسم — ٥٤ س وهو اوّل حدّ من الباقى على ٢٧ وهو اوّل حدّ من المقسوم عليه نخارج القسمة — ٢ س^{٢} يكون الحدّ الثالث فى الجذر

ولتكوين المقسوم عليه نضم إلى الجزء المتقدّم حاصل ضرب ثلاثة أمثال (٣ + ٤ س) (— ٢ س^{٢}) وكذا مربع (— ٢ س^{٢}) ثم نضرب المقسوم عليه بأكمله فى (— ٢ س^{٢}) وبعد ذلك نجرى عملية الطرح فنجد أن العملية تنتهى وعليه يكون الناتج الجذر المطلوب

(تمارين ١٦ ى)

ما الجذر التكعيبى لكل من المقادير الآتية

(١) ا^{٣} + ٣ ا^{٢} + ٣ ا + ١

(٢) سـ^{٣} + ٦ سـ^{٢} + ١٢ سـ + ٨

(٣) ا^{٣} سـ^{٣} − ٣ ا^{٢} سـ^{٢} صـ^{٢} + ٣ ا سـ صـ^{٤} − صـ^{٦}

(٤) ٨ م^{٣} − ١٢ م^{٢} + ٦ م − ١

(٥) ٦٤ ا^{٣} − ١٤٤ ا^{٢} ب + ١٠٨ ا ب^{٢} − ٢٧ ب^{٣}

(٦) ١ + ٣ سـ + ٦ سـ^{٢} + ٧ سـ^{٣} + ٦ سـ^{٤} + ٣ سـ^{٥} + سـ^{٦}

(٧) ١ − ٦ سـ + ٢١ سـ^{٢} − ٤٤ سـ^{٣} + ٦٣ سـ^{٤} − ٥٤ سـ^{٥} × ٢٧ سـ^{٦}

(٨) ا^{٣} + ٦ ا^{٢} ب − ٣ ا^{٢} حـ + ١٢ ا ب^{٢} − ١٢ ا ب حـ + ٣ ا حـ^{٢} + ٨ ب^{٣} − ١٢ ب^{٢} حـ + ٦ ب حـ^{٢} − حـ^{٣}

(٩) ٨ ا^{٦} − ٣٦ ا^{٥} + ٦٦ ا^{٤} − ٦٣ ا^{٣} + ٣٣ ا^{٢} − ٩ ا + ١

(١٠) صـ^{٦} − ٣ صـ^{٥} + ٦ صـ^{٤} − ٧ صـ^{٣} + ٦ صـ^{٢} − ٣ صـ + ١

(١١) ٨ سـ^{٦} + ١٢ سـ^{٥} − ٣٠ سـ^{٤} − ٣٥ سـ^{٣} + ٤٥ سـ^{٢} + ٢٧ سـ − ٢٧

(١٢) ٢٧ سـ^{٦} − ٥٤ سـ^{٥} ا + ١١٧ سـ^{٤} ا^{٢} − ١١٦ سـ^{٣} ا^{٣} + ١١٧ سـ^{٢} ا^{٤} − ٥٤ سـ ا^{٥} + ٢٧ ا^{٦}

(١٣) ٢٧ سـ^{٦} − ٢٧ سـ^{٥} − ١٨ سـ^{٤} + ١٧ سـ^{٣} + ٦ سـ^{٢} − ٣ سـ − ١

(١٤) ٢٤ سـ^{٤} صـ^{٢} + ٩٦ سـ^{٢} صـ^{٤} − ٦ سـ^{٥} صـ + سـ^{٦} − ٩٦ سـ صـ^{٥} + ٦٤ صـ^{٦} − ٥٦ سـ^{٣} صـ^{٣}

(١٥) ٢١٦ + ٣٤٢ سـ^{٢} + ١٧١ سـ^{٤} + ٢٧ سـ^{٦} − ٢٧ سـ^{٥} − ١٠٩ سـ^{٣} − ١٠٨ سـ

١٢٢ — نأتى الآن ببعض أمثلة على كيفية استخراج الجذر التكعيبى للمقادير التى تشتمل على حدود كسرية

(مثال) ما الجـذر التكعيبى للمقدار ٥٤ − ٢٧ سـ^{٣} + $\frac{٨}{سـ^{٦}}$ − $\frac{٣٦}{سـ^{٣}}$

نرتب المقدار حسب القوى الصاعدة للحرف سـ هكذا

$\frac{٨}{سـ^{٦}}$ − $\frac{٣٦}{سـ^{٣}}$ + ٥٤ − ٢٧ سـ^{٣} | $\frac{٢}{سـ^{٢}}$ − ٣ سـ

$\frac{٨}{سـ^{٦}}$

− $\frac{٣٦}{سـ^{٣}}$ + ٥٤ − ٢٧ سـ^{٣} | ٣ $\left(\frac{٢}{سـ^{٢}}\right)^{٢}$ = $\frac{١٢}{سـ^{٤}}$

٣ × $\frac{٢}{سـ^{٢}}$ × (− ٣ سـ) = − $\frac{١٨}{سـ}$

(− ٣ سـ)^{٢} = + ٩ سـ^{٢}

$\frac{١٢}{سـ^{٤}}$ − $\frac{١٨}{سـ}$ + ٩ سـ^{٢}

− $\frac{٣٦}{سـ^{٣}}$ + ٥٤ − ٢٧ سـ^{٣}

(تمارين ١٦ هـ)

إستخرج الجذر التكعيبي لكل من المقادير الآتية

(١) $\frac{س^{٣}}{٨} - \frac{٣س^{٢}}{٤} + \frac{٣س}{٢} - ١$

(٢) $\frac{س^{٣}}{٢٧} + \frac{٢س^{٢}}{٣} + ٤س + ٨$

(٣) $٨س^{١} - ٤س^{٢}ص^{٢} + \frac{٢}{٣}س ص^{٤} - \frac{ص}{٢٧}$

(٤) $\frac{٢٧س^{٣}}{٦٤ص^{٣}} - \frac{٢٧س^{٢}}{٨ص^{٢}} + \frac{٩س}{ص} - ٨$

(٥) $س^{٣} - ٩س + \frac{٢٧}{س} - \frac{٢٧}{س^{٣}}$

(٦) $\frac{س^{٦}}{ص^{٣}} - ٦س^{٤} + ١٢س^{٢}ص^{٣} - ٨ص^{٦}$

(٧) $\frac{س^{٣}}{ص^{٣}} + \frac{٦س^{٢}}{ص^{٢}} + \frac{٩س}{ص} - ٤ - \frac{٩ص}{س} + \frac{٦ص^{٢}}{س^{٢}} - \frac{ص}{س^{٣}}$

(٨) $\frac{س^{٣}}{٢٧} - \frac{س^{٢}}{٣} + ٢س - ٧ + \frac{١٨}{س} - \frac{٢٧}{س^{٢}} + \frac{٢٧}{س^{٣}}$

(٩) $\frac{س^{٣}}{ا^{٣}} - \frac{١٢س^{٢}}{ا^{٢}} + \frac{٥٤س}{ا} - ١١٢ + \frac{١٠٨ا}{س} - \frac{٤٨ا^{٢}}{س^{٢}} + \frac{٨ا^{٣}}{س^{٣}}$

(١٠) $\frac{٦٤ا^{٣}}{س^{٣}} - \frac{١٩٢ا^{٢}}{س^{٢}} + \frac{٢٤٠ا}{س} - ١٦٠ + \frac{٦٠س}{ا} - \frac{١٢س^{٢}}{ا^{٢}} + \frac{س^{٣}}{ا^{٣}}$

(١١) $\frac{٦ب}{ا} + \frac{١٦ا}{ب} - ٧ + \frac{ا^{٣}}{ب^{٣}} - \frac{٣ا^{٢}}{ب^{٢}} - \frac{٣ب^{٢}}{ا^{٢}} + \frac{ب^{٣}}{ا^{٣}}$

(١٢) $\frac{٦٠س^{٤}}{ص^{٤}} - \frac{٨٠س^{٣}}{ص^{٣}} - \frac{٩٠س^{٢}}{ص^{٢}} + \frac{٨س^{٦}}{ص^{٦}} + \frac{١٠٨س}{ص} - ٢٧ + \frac{٤٨س^{٥}}{ص^{٥}}$

بند ١٢٤ — القواعد المستعملة فى استخراج الجذر التربيعى والجذر التكعيبي فى الحساب مبنية على الطرق الجبرية التى أتينا عليها فى هذا الباب وإيضاحا لذلك نورد المثال الحسابى التالى

(مثال) ليكن المطلوب استخراج الجذر التكعيبي للعدد ٦١٤١٢٥

نقول بما أن ٦١٤١٢٥ أصغر من ٧٢٩٠٠٠ وأكبر من ٥١٢٠٠٠ أى أنه أصغر من $(٩٠)^{٣}$ وأكبر من $(٨٠)^{٣}$ يكون جذره التكعيبي أكبر من ٨٠ وأصغر من ٩٠ أى أنه عدد مركب من رقمين

ا + ب

٦١٤١٢٥	٨٠ + ٥ = ٨٥
٥١٢٠٠٠	
١٠٢١٢٥	$٣ا^{٢}$ = ٣ × ٨٠ = ١٩٢٠٠
	٣ × ا × ب = ٣ × ٨٠ × ٥ = ١٢٠٠
	$ب^{٢}$ = ٥ × ٥ = ٢٥
١٠٢١٢٥	٢٠٤٢٥

وقد تختلف العملية الجبرية عن العملية الحسابية من جملة وجوه منها إهمال الأصفار غالبا فى العملية الحسابية

الباب السابع عشر – التحليل إلى العوامل

بند ١٢٥ — تعريف : إذا ساوى مقدار جبرى حاصل ضرب كميتين أو أكثر فكل من هذه الكميات يسمى عاملا للمقدار الأصلى وطريقة البحث عن عوامل اى مقدار جبرى تسمى طريقة تحليل المقدار إلى عوامله

وسنأتى فى هذا الباب على أهم القواعد التى يمكن بها تحليل المقادير الجبرية إلى عواملها

بند ١٢٦ — إذا قبل كل حدّ من الحدود المكوّنة لمقدار جبرى القسمة على عامل مشترك بينها أمكن اختصار المقدار بقسمة كل حدّ على هذا العامل المشترك وحصر خارج القسمة بين قوسين أما العامل المشترك فيوضع خارج القوس الأيمن باعتبار أنه معامل للكمية المحصورة داخل القوسين

(مثال ١) حدا المقدار ٣ أ^{٢} − ٦ أ ب يقبلان القسمة على عامل مشترك وهو ٣ أ

∴ ٣ أ^{٢} − ٦ أ ب = ٣ أ (أ − ٢ ب)

(مثال ٢) ٥ أ^{٢} ب س^{٣} − ١٥ أ ب س^{٢} − ٢٠ ب^{٣} س^{٢} = ٥ ب س^{٢} (أ^{٢} س − ٣ أ − ٤ ب^{٢})

(تمارين ١١٧)

حلل كلا من المقادير الآتية إلى عوامله

(١) أ^{٣} − أ س

(٢) س^{٣} − س^{٢}

(٣) ٢ أ − ٢ أ^{٢}

(٤) أ^{٢} − أ ب^{٢}

(٥) ٧ ط^{٢} + ط

(٦) ٨ س − ٢ س^{٢}

(٧) ٥ أ س − ٥ أ^{٣} س^{٢}

(٨) ٣ س^{٢} + س^{٥}

(٩) س^{٢} + س ص

(١٠) س^{٣} − س^{٢} ص

(١١) ٥ س − ٢٥ س^{٢} ص

(١٢) ١٥ + ٢٥ س^{٢}

(١٣) ١٦ س + ٦٤ س^{٢} ص

(١٤) ١٥ أ^{٢} − ٢٢٥ أ^{٤}

(١٥) ٥٤ − ٨١ س

(١٦) ١٠ س^{٣} − ٢٥ س^{٤} ص

(١٧) ٣ س^{٣} − س^{٢} + س

(١٨) ٦ س^{٣} + ٢ س^{٤} + ٤ س^{٥}

(١٩) س^{٣} − س^{٢} ص + س ص^{٢}

(٢٠) ٣ أ^{٤} − ٣ أ^{٣} ب + ٦ أ^{٢} ب^{٢}

(٢١) ٢ س^{٢} ص^{٣} − ٦ س^{٢} ص^{٢} + ٢ س ص

(٢٢) ٦ س^{٣} − ٩ س^{٢} ص + ١٢ س ص

(٢٣) ٥ س^{٥} − ١٠ أ^{٤} س^{٣} − ١٥ أ^{٣} س^{٣}

(٢٤) ٧ أ − ٧ أ^{٣} + ١٤ أ^{٤}

(٢٥) ٣٨ أ^{٣} س^{٥} + ٥٧ أ^{٤} س

بند ١٢٧ — يمكن تحليل أىّ مقدار إلى عوامله متى أمكن ترتيب حدوده أقساما لكل منها عامل مركب مشترك بين الجميع

(مثال ١) لتحليل س^{٢} − أ س + ب س − أ ب إلى عوامله

نقول إنه بالتأمل نجد أن الحدّين الأوّل والثانى لهما عامل مشترك وهو سـ وأن الحدّين الآخرين لهما عامل مشترك وهو ب فنحصر الحدّين الأول والثانى بين قوسين وكذا الحدّين الثالث والرابع بين قوسين آخرين

فيكون سـ^{٢} − ا سـ + ب سـ − ا ب = (سـ^{٢} − ا سـ) + (ب سـ − ا ب)

= سـ (سـ − ا) + ب (سـ − ا)

= (سـ − ا) مكررة سـ من المرات مضافا اليها (سـ − ا) مكررة ب من المرات

= (سـ − ا) مكررة (سـ + ب) من المرات

= (سـ − ا) (سـ + ب)

(مثـال ٢) لتحليل المقدار ٦ سـ^{٢} − ٩ ا سـ + ٤ ب سـ − ٦ ا ب إلى عوامله

نقول إن ٦ سـ^{٢} − ٩ ا سـ + ٤ ب سـ − ٦ ا ب = (٦ سـ^{٢} − ٩ ا سـ) + (٤ ب سـ − ٦ ا ب)

= ٣ سـ (٢ سـ − ٣ ا) + ٢ ب (٢ سـ − ٣ ا)

= (٢ سـ − ٣ ا) (٣ سـ + ٢ ب)

(مثـال ٣) لتحليل المقدار ١٢ ا^{٢} − ٤ ا ب − ٣ ا سـ^{٢} + ب سـ^{٢} إلى عوامله

نقول إن ١٢ ا^{٢} − ٤ ا ب − ٣ ا سـ^{٢} + ب سـ^{٢} = (١٢ ا^{٢} − ٤ ا ب) − (٣ ا سـ − ب سـ^{٢})

= ٤ ا (٣ ا − ب) − سـ (٣ ا − ب)

= (٣ ا − ب) (٤ ا − سـ^{٢})

(ملاحظة) يكفى فى ترتيب الكميات إلى أقسام يشتمل كل منها على حدّين أن يراعى وجود عامل مشترك بين حدّى كل قسم ففى المثال الأخير يمكن إجراء العمل على غير ماسبق بأن ترتب الحدود مثنى على كيفية مغايرة للسابقة كما يأتى

١٢ ا^{٢} − ٤ ا ب − ٣ ا سـ^{٢} + ب سـ^{٢} = (١٢ ا^{٢} − ٣ ا سـ^{٢}) − (٤ ا ب − ب سـ^{٢})

= ٣ ا (٤ ا − سـ^{٢}) − ب (٤ ا − سـ)

= (٤ ا − سـ^{٢}) (٣ ا − ب)

وهذه النتيجة هى عين النتيجة السابقة لأن تغيير ترتيب عوامل أى حاصل ضرب لا يغير قيمته

(تمـارين ١٧ ب)

حال كلا من المقادير الآتية إلى عوامله

(١) ا^{٢} + ا ب + ا حـ + ب حـ

(٢) ا^{٢} − ا حـ + ا ب − ب حـ

(٣) ا^{٢} حـ^{٢} + ا حـ د + ا ب حـ + ب د

(٤) ا^{٢} + ٣ ا + ا حـ + ٣ حـ

(٥) ٢ سـ + حـ سـ + ٢ حـ + حـ^{٢}

(٦) سـ^{٢} − ا سـ + ٥ سـ − ٥ ا

(٧) ٥ ا + ا ب + ٥ ب + ب^{٢}

(٨) ا ب − ب صـ − ا صـ + صـ^{٢}

(٩) ا سـ − ب سـ − ا ع + ب ع

(١٠) ط ر + ك ر − ط هـ − ك هـ

(١١) $م س - م ص - ن س + ن ص$
(١٢) $م س - م ا + ن س - ن ا$
(١٣) $٢ ا س + ا ص + ٢ ب س + ب ص$
(١٤) $٣ ا س - ب س - ٣ ا ص + ب ص$
(١٥) $٦ س^{٢} + ٣ س ص - ٢ ا س - ا ص$
(١٦) $م س - ٢ م ص - ن س + ٢ ن ص$
(١٧) $ا س^{٢} - ٣ ب س ص - ا س ص + ٣ ب ص^{٢}$
(١٨) $س^{٢} + م س ص - ٤ س ص - ٤ م ص^{٢}$
(١٩) $ا س^{٢} + ب س^{٢} + ٢ ا + ٢ ب$
(٢٠) $س^{٢} - ٣ س - س ص + ٣ ص$
(٢١) $٢ س^{٤} - س^{٣} + ٤ س - ٢$
(٢٢) $٣ س^{٣} + ٥ س^{٢} + ٣ س + ٥$
(٢٣) $س^{٤} + س^{٣} + ٢ س + ٢$
(٢٤) $ص^{٣} - ص^{٢} + ص - ١$
(٢٥) $ا س ص + ب ح س ص - ا ع - ب ح ع$
(٢٦) $ح^{٢} س^{٢} + ل^{٢} س^{٢} - ا ل^{٢} - ا ح^{٢}$
(٢٧) $٢ ا س^{٢} + ٣ ا س ص - ٢ ب س ص - ٣ ب ص^{٢}$
(٢٨) $ا م س^{٢} + ب م س ص - ا ن س ص - ب ن ص$
(٢٩) $ا س - ب س + ب ص + ح ص - ح س - ا ص$
(٣٠) $ا^{٢} س + ا ب س + ا ح + ا ب ص + ب^{٢} ص + ب ح$

تحليل المقادير ذات ثلاثة الحدود إلى عواملها

بند ١٢٨ — يحسن بالمتعلم قبل الشروع فى فهم الحالة التالية من حالات التحليل إلى عوامل أن يراجع بند ٤٤ من الباب الخامس فقد نبهناه فى ذلك البند إلى الكيفية التى بها يمكن وضع حاصل ضرب مقدارين من ذوات الحدّين على هيئة مقدار ذى ثلاثة حدود وذلك بتوفيق معاملات حدود المقدارين الاصليين بعضها مع بعض

(مثلا) علمنا أنه بمقتضى ماجاء فى بند ٤٤ أن

$(س + ٥)(س + ٣) = س^{٢} + ٨ س + ١٥$ .... (١)

و $(س - ٥)(س - ٣) = س^{٢} - ٨ س + ١٥$ .... (٢)

و $(س + ٥)(س - ٣) = س^{٢} + ٢ س - ١٥$ .... (٣)

و $(س - ٥)(س + ٣) = س^{٢} - ٢ س - ١٥$ .... (٤)

وسنبحث الآن فى عكس هـذه العملية المتقدّمة أى فى تحليل مقدار ذى ثلاثة حدود كالمقادير المبينة على يسار المتطابقات الموضحة آنفا إلى عاملين كل منهما مقدار ذو حدّين

بالتأمل فى كل من المتطابقات الأربع السابقة نرى ان

(١) الحدّ الأول فى كل من العاملين $س$

(٢) حاصل ضرب الحدّ الثانى من أحد العاملين فى الحدّ الثانى من العامل الآخر هو الحدّ الثالث للقدار ذى الثلاثة الحدود فمثلا نرى فى (٢) ان ١٥ هى حاصل ضرب $- ٥$ فى $- ٣$ وفى (٣) أن $- ١٥$ هو حاصل ضرب $+ ٥$ فى $- ٣$

(٣) حاصل الجمع الجبرى للحدّين الثانيين فى العاملين هو معامل $س$ فى المقدار ذى الثلاثة الحدود مثلا فى (٤) حاصل جمع $- ٥$ و $+ ٣$ هو $- ٢$ وهو معامل $س$ فى المقدار ذى الثلاثة الحدود وسنستعمل هـذه الاستنتاجات فى تحليل الكميات مبتدئين بالحالة التى يكون فيها الحدّ الثالث من المقدار ذى الثلاثة الحدود موجبا

(مثـال ١) لتحليل المقدار $س^٢ + ١١ س + ٢٤$ إلى عوامله

نقول إن الحدّين الثانيين للعاملين المراد إيجادهما هما المقداران اللذان حاصـل ضربهما $+ ٢٤$ ومجموعهما $+ ١١$ ومن الواضح أنه لا بدّ أن يكونا $+ ٨$ ، $+ ٣$ وعلى ذلك يكون

$$س^٢ + ١١ س + ٢٤ = (س + ٨)(س + ٣)$$

(مثـال ٢) لتحليل المقدار $س^٢ - ١٠ س + ٢٤$ إلى عوامله

نقول إن الحدّين الثانيين للعاملين هما المقداران اللذان حاصل ضربهما $+ ٢٤$ ومجموعهما $- ١٠$ ومن ذلك نرى أنه لا بدّ وأن يكونا سالبين وأن يكون أحدهما $- ٦$ والآخر $- ٤$ وعلى ذلك يكون

$$س^٢ - ١٠ س + ٢٤ = (س - ٦)(س - ٤)$$

(مثـال ٣) لتحليل المقدار $س^٢ - ١٨ س + ٨١$ إلى عوامله

نقول إن $س^٢ - ١٨ س + ٨١ = (س - ٩)(س - ٩) = (س - ٩)^٢$

مثـال ٤) لتحليل $س^٤ + ١٠ س^٢ + ٢٥$ إلى عوامله

نقول إن $س^٤ + ١٠ س^٢ + ٢٥ = (س^٢ + ٥)(س^٢ + ٥) = (س^٢ + ٥)^٢$

(مثـال ٥) لتحليل المقدار $س^٢ - ١١ ا س + ١٠ ا^٢$ إلى عوامله

نقول إن الحدّين الثانيين من العاملين هما المقداران اللذان حاصل ضربهما $+ ١٠ ا^٢$ ومجموعهما $- ١١ ا$

فاذن يلزم أن يكونا $- ١٠ ا$ ، $- ا$

$$\therefore \quad س^٢ - ١١ ا س + ١٠ ا^٢ = (س - ١٠ ا)(س - ا)$$

(ملاحظة) يلزم المتعلم أن يحقق نتيجة حل الأمثلة التى من هذا القبيل بضرب العوامل التى يحصل عليها بعضها فى بعض ضربا عقليا كما ورد فى الباب الخامس

(تمارين ١٧ ح)

حلل كلا من المقـادير الآتية إلى عوامله

(١) $ا^٢ + ٣ ا + ٢$

(٢) $ا^٢ + ٢ ا + ١$

(٣) $ا^٢ + ٧ ا + ١٢$

(٤) $ا^٢ - ٧ ا + ١٢$

(٥) $س^٢ - ١١ س + ٣٠$

(٦) $س^٢ - ١٥ س + ٥٦$

(٧) $س^٢ - ١٩ س + ٩٠$

(٨) $س^٢ + ١٣ س + ٤٢$

(٩) $س^٢ - ٢١ س + ١١٠$

(١٠) $س^٢ - ٢١ س + ١٠٨$

(١١) $س^٢ - ٢١ س + ٨٠$

(١٢) $س^٢ + ٢١ س + ٩٠$

(١٣) $س^٢ - ١٩ س + ٨٤$

(١٤) $س^٢ - ١٩ س + ٧٨$

(١٥) $س^٢ - ١٨ س + ٤٥$

(١٦) $س^٢ + ٢٠ س + ٩٦$

(١٧) $س^٢ - ٢٦ س + ١٦٥$

(١٨) $س^٢ - ٢١ س + ١٠٤$

(١٩) $س^٢ + ٢٣ س + ١٠٢$

(٢٠) $ا^٢ - ٢٤ ا + ٩٥$

(٢١) $ا^٢ - ٣٢ ا + ٢٥٦$

(٢٢) $ا^٢ + ٣٠ ا + ٢٢٥$

(٢٣) أ^{٢} + ٥٤ أ + ٧٢٩
(٢٤) أ^{٢} − ٣٨ أ + ٣٦١
(٢٥) أ^{٢} − ١٤ أ ب + ٤٩ ب^{٢}
(٢٦) أ^{٢} + ٥ أ ب + ٦ ب^{٢}
(٢٧) م^{٢} − ١٣ م ن + ٤٠ ن^{٢}
(٢٨) م^{٢} − ٢٢ م ن + ١٠٥ ن^{٢}
(٢٩) س^{٢} − ٢٣ س ص + ١٣٢ ص^{٢}
(٣٠) س^{٢} − ٢٦ س ص + ١٦٩ ص^{٢}
(٣١) س^{٤} + ٨ س^{٢} + ٧
(٣٢) س^{٤} + ٩ س^{٢}ص^{٢} + ١٤ ص^{٤}
(٣٣) س^{٢} ص^{٢} − ١٦ س ص + ٣٩
(٣٤) س^{٢} + ٤٩ س ص + ٦٠٠ ص^{٢}
(٣٥) س^{٢} ص^{٢} + ٣٤ س ص + ٢٨٩
(٣٦) أ^{٤} ب^{٤} + ٣٧ أ^{٢} ب^{٢} + ٣٠٠
(٣٧) أ^{٢} − ٢٠ أ ب س + ٧٥ ب^{٢} س^{٢}
(٣٨) س^{٢} + ٤٣ س ص + ٣٩٠ ص^{٢}
(٣٩) أ^{٢} − ٢٩ أ ب + ٥٤ ب^{٢}
(٤٠) س^{٤} + ١٦٢ س^{٢} + ٦٥٦١
(٤١) ١٢ − ٧ س + س^{٢}
(٤٢) ٢٠ + ٩ س + س^{٢}
(٤٣) ١٣٢ − ٢٣ س + س^{٢}
(٤٤) ٨٨ + ١٩ س + س^{٢}
(٤٥) ١٣٠ + ٣١ س ص + س^{٢} ص^{٢}
(٤٦) ١٤٣ − ٢٤ س أ + س^{٢} أ^{٢}
(٤٧) ٢٠٤ − ٢٩ س^{٢} + س^{٤}
(٤٨) ٢١٦ + ٣٥ س + س^{٢}

بند **١٢٩** — لنبحث الآن فى تحليل المقادير ذات ثلاثة الحدود إلى عواملها حينما يكون الحدّ الثالث من هذه المقادير سالبا

(مثال ١) لتحليل المقدار س^{٢} + ٢ س − ٣٥ إلى عوامله

نقول إن الحدّين الثانيين للعاملين هما المقداران اللذان حاصل ضربهما − ٣٥ ومجموعهما الجبرى + ٢ فيجب أن تكون علامة أحد الحدّين مخالفة لعلامة الآخر ويجب أن تكون علامة الأكبر + لأنها علامة حاصل جمعهما

فالحدّان إذن + ٧ ، − ٥

∴ س^{٢} + ٢ س − ٣٥ = (س + ٧) (س − ٥)

(مثال ٢) لتحليل المقدار س^{٢} − ٣ س − ٥٤ إلى عوامله

نقول إن الحدّين الثانيين للعاملين المراد إيجادهما هما المقداران اللذان حاصل ضربهما − ٥٤ ومجموعهما الجبرى − ٣ ويجب أن تخالف علامة كل منهما علامة الآخر كما أن علامة أكبرهما يجب أن تكون − لأنها علامة حاصل الجمع

فالحدّان إذن − ٩ ، + ٦

∴ س^{٢} − ٣ س − ٥٤ = (س − ٩) (س + ٦)

وقد يتسنى استعمال الطريقة الآتية لتحليل الكميات التى من هذا القبيل متى راعينا أن علامتى الحدّين الرقميين فى العاملين يجب أن تكونا متضادّتين

(مثال ٣) لتحليل المقدار س^{٢} ص^{٢} + ٢٣ س ص − ٤٢٠ إلى عوامله

نأتى بعددين حاصل ضربهما ٤٢٠ وفرقهما ٢٣ وهما ٣٥ ، ١٢

وبوضع العلامتين قبلهما بحيث تكون علامة الأكبر + ينتج أن

س^{٢} ص^{٢} + ٢٣ س ص − ٤٢٠ = (س ص + ٣٥) (س ص − ١٢)

(تمارين ١٧ د)

حلل كلا من المقادير الآتية إلى عوامله

(١) س^{٢} − س − ٢
(٢) س^{٢} + س − ٢
(٣) س^{٢} − س − ٦
(٤) س^{٢} + س − ٦
(٥) س^{٢} − ٢ س − ٣
(٦) س^{٢} + ٢ س − ٣
(٧) س^{٢} + س − ٥٦
(٨) س^{٢} + ٣ س − ٤٠
(٩) س^{٢} − ٤ س − ١٢
(١٠) ا^{٢} − ا − ٢٠
(١١) ا^{٢} − ٤ ا − ٢١
(١٢) ا^{٢} + ا − ٢٠
(١٣) ا^{٢} − ٤ ا − ١١٧
(١٤) س^{٢} + ٩ س − ٣٦
(١٥) س^{٢} + س − ١٥٦
(١٦) س^{٢} + س − ١١٠
(١٧) س^{٢} − ٩ س − ٩٠
(١٨) س^{٢} − س − ٢٤٠
(١٩) ا^{٢} − ١٢ ا − ٨٥
(٢٠) ا^{٢} − ١١ ا − ١٥٢
(٢١) س^{٢} ص^{٢} − ٥ س ص − ٢٤
(٢٢) س^{٢} + ٧ س ص − ٦٠ ص^{٢}
(٢٣) س^{٢} + ا س − ٤٢ ا^{٢}
(٢٤) س^{٢} − ٣٢ س ص − ١٠٥ ص^{٢}
(٢٥) ا^{٢} − ا ص − ٢١٠ ص^{٢}
(٢٦) س^{٢} + ١٨ س − ١١٥
(٢٧) س^{٢} − ٢٠ س ص − ٩٦ ص^{٢}
(٢٨) س^{٢} + ١٦ س − ٢٦٠
(٢٩) ا^{٢} − ١١ ا − ٢٦
(٣٠) ا^{٢} ص^{٢} + ١٤ ا ص − ٢٤٠
(٣١) ا^{٤} − ا^{٢} ب^{٢} − ٥٦ ب^{٤}
(٣٢) س^{٤} − ١٤ س^{٢} − ٥١
(٣٣) ص^{٤} + ٦ ص^{٢} س^{٢} − ٢٧ س^{٤}
(٣٤) ا^{٢} ب^{٢} − ٣ ا ب ح − ١٠ ح^{٢}
(٣٥) ا^{٢} + ١٢ ا ب س − ٢٨ ب^{٢} س^{٢}
(٣٦) ا^{٢} − ١٨ ا س ص − ٢٤٣ س^{٢} ص^{٢}
(٣٧) س^{٤} + ١٣ ا^{٢} س^{٢} − ٣٠٠ ا^{٤}
(٣٨) س^{٤} − ا^{٢} س^{٢} − ١٣٢ ا^{٤}
(٣٩) س^{٤} − ا^{٢} س^{٢} − ٤٦٢ ا^{٤}
(٤٠) س^{٦} + س^{٣} − ٨٧٠
(٤١) ٢ + س − س^{٢}
(٤٢) ٦ + س − س^{٢}
(٤٣) ١١٠ − س − س^{٢}
(٤٤) ٣٨٠ − س − س^{٢}
(٤٥) ١٢٠ − ١٧ ا س − ا^{٢} س^{٢}
(٤٦) ٦٥ + ٨ س ص − س^{٢} ص^{٢}
(٤٧) ٩٨ − ٧ س − س^{٢}
(٤٨) ٢٠٤ − ٥ س − س^{٢}

[لو أراد الطالب الاطلاع على تمارين متنوعة بسيطة فلينظر فى صفحة ١٣٦]

بند ١٣٠ — نشرع الآن فى بيان كيفية تحليل المقادير ذات الثلاثة الحدود إلى عواملها إذا كان معامل أكبر قوة فيها ليس بالواحد الصحيح

باتباع ماجاء فى الباب الخامس بند ٤٤ يمكننا أن نكتب حواصل الضرب الآتية

(٣ س + ٢) (س + ٤) = ٣ س^{٢} + ١٤ س + ٨ .... (١)

(٣ س − ٢) (س − ٤) = ٣ س^{٢} − ١٤ س + ٨ .... (٢)

(٣ س + ٢) (س − ٤) = ٣ س^{٢} − ١٠ س − ٨ .... (٣)

(٣ س − ٢) (س + ٤) = ٣ س^{٢} + ١٠ س − ٨ .... (٤)

وبالعكس إذا أردنا تحليل مقادير كالتى على يسار هذه المتطابقات إلى عواملها نلاقى صعوبات أشدّ مما لاقينا فى استخراج عوامل المقادير السابقة وقبل أن نأتى بقاعدة عامة لتحليل مثل هذه المقادير يجب أن نبحث بحثا دقيقا فى متطابقتين من المتطابقات الأربع السابقة كما سنبينه

من المتطابقة ٣ س^{٢} − ١٤ س + ٨ = (٣ س − ٢) (س − ٤) نعلم أن

الحدّ الأوّل ٣ س^{٢} حاصل ضرب ٣ س فى س

والحدّ الثالث + ٨ حاصل ضرب − ٢ فى − ٤

والحدّ الأوسط −١٤ س حاصل جمع كل من حاصل ضرب ٣ س × −٤ و س × −٢

ومن المتطابقة ٣ س^{٢} − ١٠ س − ٨ = (٣ س + ٢) (س − ٤) نعلم ان

الحدّ الأوّل ٣ س^{٢} حاصل ضرب ٣ س فى س

والحدّ الثالث − ٨ حاصل ضرب + ٢ فى − ٤

والحدّ الأوسط − ١٠ س حاصل جمع كل من حاصل ضرب ٣ س × − ٤ و س × ٢

وعلامة هذا الحدّ سالبة لأن علامة أكبر حاصلى الضرب سالبة

بند ١٣١ — يصعب على المبتدئ فى غالب الأوقات أن يستخرج العوامل لأول وهلة ولا سبيل لازالة هذه الصعوبة إلا كثرة التمرّن على التحليل فبواسطته يمكنه إيجاد العوامل على وجه الصحة والسرعة معا

(مثال) لتحليل المقدار ٧ س^{٢} − ١٩ س − ٦ إلى عوامله

نجرب أولا (٧ س ٣) (س ٢) ملاحظين أن علامة العدد ٣ يجب أن تكون مخالفة لعلامة ٢ ومن هذين العاملين ينتج ٧ س^{٢} وهو الحدّ الأوّل و − ٦ وهو الحدّ الثالث ولكن لكون ٧ × ٢ − ٣ × ١ = ١١ وهو غير معامل الحدّ الأوسط فالعاملان اللذان اخترناهما لا يأتيان بالغرض المقصود

فنجرب بعد ذلك (٧ س ٢) (س ٣)

ومن حيث إن ٧ × ٣ − ٢ × ١ = ١٩ يكون هذان العاملان حينئذ هما العاملان الصحيحان المطلوبان بعد وضع العلامات بحيث تكون الكمية السالبة هى الأكبر

وإذن يكون ٧ س^{٢} − ١٩ س − ٦ = (٧ س + ٢) (س − ٣)

(وتحقق هذه النتيجة باجراء الضرب عقلا)

بند ١٣٢ — ليس من الضرورى فى تحليل المقادير إلى عواملهـا أن ندوّن جميع هـذه التجارب بالتفصيل فكثرة التمرّن تعود الطالب اختيـار العوامل الصحيحة ونبذ غيرها بمجرد لمحها ويجب الالتفات بنوع خاص إلى ما يأتى

(أوّلا) إذا كان الحدّ الثالث من المقدار ذى الثلاثة الحدود موجبا فعلامة كل من الحدّين الثانيين للعاملين واحدة وهى علامة الحدّ الأوسط من المقدار ذى الثلاثة الحدود

(ثانيـا) إذا كان الحدّ الثالث من المقدار ذى الثلاثة الحدود سالبا كانت علامتا العاملين متضادّتين

(مثـال ١) لتحليل المقدارين الآتيين إلى عواملهما

١٤ س^{٢} + ٢٩ س − ١٥ .... (١)

١٤ س^{٢} − ٢٩ س − ١٥ .... (٢)

نقول إنه يمكن أن نضـع فى كلتا الحالتين (٧ س ٣) (٢ س ٥) على سبيل التجربة مع ملاحظة أن علامة ٣ تكون مخالفة لعلامة ٥ ولكون ٧ × ٥ − ٣ × ٢ = ٢٩ فالعاملان همـا المطلوبان غير أنه يجب الالتفات إلى وضع علامات الحدود

ففى (١) يلزم أن تكون الكمية الموجبة هى الأكبر وفى (٢) يجب أن تكون الكمية السالبة هى الأكبر

وإذن يكون ١٤ س^{٢} + ٢٩ س − ١٥ = (٧ س − ٣) (٢ س + ٥)

، ١٤ س^{٢} − ٢٩ س − ١٥ = (٧ س + ٣) (٢ س − ٥)

(مثـال ٢) لتحليل المقدارين الآتيين إلى عواملهما

٥ س^{٢} + ١٧ س + ٦ .... (١)

٥ س^{٢} − ١٧ س + ٦ .... (٢)

نلاحظ فى (١) أن العاملين اللذين ينتجان ٦ يجب أن يكونا موجبين

ونلاحظ فى (٢) أن العاملين اللذين ينتجان ٦ يجب أن يكونا سالبين

إذن يمكننا أن نضع عاملى (١) هكذا (٥ س +) (س +)

وعاملى (٢) « (٥ س −) (س −)

ولكون ٥ × ٣ + ١ × ٢ = ١٧

يكون ٥ س^{٢} + ١٧ س + ٦ = (٥ س + ٢) (س + ٣)

، ٥ س^{٢} − ١٧ س + ٦ = (٥ س − ٢) (س − ٣)

(ملاحظة) من المحتمل فى كل من المقـدارين السابقين أن يكون ٦ ، ١ عاملى ٦ ولكن من السهل أن نرى أن هذين العاملين لا يوافقان

(مثـال ٣) ٩ س^{٢} − ٤٨ س ص + ٦٤ ص^{٢} = (٣ س − ٨ ص) (٣ س − ٨ ص)

= (٣ س − ٨ ص)^{٢}

(مثـال ٤) ٦ + ٧ س − ٥ س^{٢} = (٣ + ٥ س) (٢ − س)

(تمارين ١٧ هـ)

حلل كلا من المقادير الآتية إلى عوامله

(١) ٢ س^{٢} + ٣ س + ١
(٢) ٣ س^{٢} + ٥ س + ٢
(٣) ٢ س^{٢} + ٥ س + ٢
(٤) ٣ س^{٢} + ١٠ س + ٣
(٥) ٢ س^{٢} + ٩ س + ٤
(٦) ٣ س^{٢} + ٨ س + ٤
(٧) ٢ س^{٢} + ٧ س + ٦
(٨) ٢ س^{٢} + ١١ س + ٥
(٩) ٣ س^{٢} + ١١ س + ٦
(١٠) ٥ س^{٢} + ١١ س + ٢
(١١) ٢ س + ٣ س − ٢
(١٢) ٣ س^{٢} + س − ٢
(١٣) ٤ س^{٢} + ١١ س − ٣
(١٤) ٣ س^{٢} + ١٤ س − ٥
(١٥) ٢ س^{٢} + ١٥ س − ٨
(١٦) ٢ س^{٢} − س − ١
(١٧) ٣ س^{٢} + ٧ س − ٦
(١٨) ٢ س^{٢} + س − ٢٨
(١٩) ٣ س^{٢} + ١٣ س − ٣٠
(٢٠) ٦ س^{٢} + ٧ س − ٣
(٢١) ٦ س^{٢} − ٧ س − ٣
(٢٢) ٣ س^{٢} + ٧ س + ٤
(٢٣) ٣ س^{٢} + ٢٣ س + ١٤
(٢٤) ٢ س^{٢} − س − ١٥
(٢٥) ٣ س^{٢} + ١٩ س − ١٤
(٢٦) ٣ س^{٢} − ١٩ س − ١٤
(٢٧) ٦ س^{٢} − ٣١ س + ٣٥
(٢٨) ٤ س^{٢} + س − ١٤
(٢٩) ٣ س^{٢} − ١٣ س + ١٤
(٣٠) ٣ س^{٢} + ٤١ س + ٢٦
(٣١) ٤ س^{٢} + ٢٣ س + ١٥
(٣٢) ٢ س^{٢} − ٥ س ص − ٣ ص
(٣٣) ٨ س^{٢} − ٣٨ س + ٣٥
(٣٤) ١٢ س^{٢} − ٢٣ س ص + ١٠ ص^{٢}
(٣٥) ١٥ س^{٢} + ٢٢٤ س − ١٥
(٣٦) ١٥ س^{٢} − ٧٧ س + ١٠
(٣٧) ١٢ س^{٢} − ٣١ س − ١٥
(٣٨) ٢٤ س + ٢٢ س − ٢١
(٣٩) ٧٢ س^{٢} − ١٤٥ س + ٧٢
(٤٠) ٢٤ س^{٢} − ٢٩ س ص − ٤ ص^{٢}
(٤١) ٢ − ٣ س − ٢ س^{٢}
(٤٢) ٣ + ١١ س − ٤ س^{٢}
(٤٣) ٦ + ٥ س − ٦ س^{٢}
(٤٤) ٤ − ٥ س − ٦ س^{٢}
(٤٥) ٥ + ٣٢ س − ٢١ س^{٢}
(٤٦) ٧ + ١٠ س + ٣ س^{٢}
(٤٧) ١٨ − ٣٣ س + ٥ س^{٢}
(٤٨) ٨ + ٦ س − ٥ س^{٢}
(٤٩) ٢٠ − ٩ س − ٢٠ س^{٢}
(٥٠) ٢٤ + ٣٧ س − ٧٢ س^{٢}

الفرق بين المربعين

بند ١٣٣ — إذا ضرب (ا + ب) فى (ا − ب) تحدث المتطابقة

(ا + ب) (ا − ب) = ا^{٢} − ب^{٢}

وقد يمكن التعبير عن حاصل الضرب بالعبارة الآتية

حاصل ضرب مجموع كميتين فى فاضلهما يساوى فرق مربعيهما

وبالعكس فرق مربعى أى كميتين يساوى حاصل ضرب مجموعهما فى فاضلهما

وعلى ذلك يمكننا أن نحلل أى مقدار يدل على الفرق بين مربعين إلى عوامله لأول وهلة

(مثال) لتحليل المقدار ٢٥ $س^{٢}$ − ١٦ $ص^{٢}$ إلى عوامله

نقول إن ٢٥ $س^{٢}$ − ١٦ $ص^{٢}$ = $(٥ س)^{٢}$ − $(٤ ص)^{٢}$

إذن العامل الأول حاصل جمع ٥ س ، ٤ ص والثانى فرق ٤ ص من ٥ س

وعلى ذلك يكون ٢٥ $س^{٢}$ − ١٦ $ص^{٢}$ = (٥ س + ٤ ص) (٥ س − ٤ ص)

ويمكن فى غالب الأوقات إهمال السطر الأول من الحل فنذكر العوامل مباشرة

(مثال) ١ − ٤٩ $ح^{٦}$ = (١ + ٧ $ح^{٣}$) (١ − ٧ $ح^{٣}$)

ويمكن معرفة فرق مربعى كميتين عدديتين بواسطة تطبيق القانون $ا^{٢}$ − $ب^{٢}$ = (ا + ب) (ا − ب)

(مثلا) $(٣٢٩)^{٢}$ − $(١٧١)^{٢}$ = (٣٢٩ + ١٧١) (٣٢٩ − ١٧١)

= ٥٠٠ × ١٥٨

= ٧٩٠٠٠

(تمارين ١٧ و)

حلل كلا من المقادير الآتية إلى عوامله

(١) $س^{٢}$ − ٤
(٢) $ا^{٢}$ − ٨١
(٣) $ص^{٢}$ − ١٠٠
(٤) $ح^{٤}$ − ١٤٤
(٥) ٩ − $ا^{٢}$
(٦) ٤٩ − $ح^{٢}$
(٧) ١٢١ − $س^{٢}$
(٨) ٤٠٠ − $ا^{٢}$
(٩) $س^{٢}$ − ٩ $ا^{٢}$
(١٠) $ص^{٢}$ − ٢٥ $س^{٢}$
(١١) ٣٦ $س^{٢}$ − ٢٥ $ب^{٢}$
(١٢) ٩ $س^{٢}$ − ١
(١٣) ٣٦ $ط^{٢}$ − ٤٩ $ك^{٢}$
(١٤) ٤ $س^{٢}$ − ١
(١٥) ٤٩ − ١٠٠ $ى^{٢}$
(١٦) ١ − ٢٥ $س^{٢}$
(١٧) $ا^{٢}$ − ٤ $ب^{٢}$
(١٨) ٩ $س^{٢}$ − $ص^{٢}$
(١٩) $ط^{٢}$ $ك^{٢}$ − ٣٦
(٢٠) $ا^{٢}$ $ب^{٢}$ − ٤ $ح^{٢}$ $ى^{٢}$
(٢١) $س^{٤}$ − ٩
(٢٢) ٩ $ا^{٤}$ − ١٢١
(٢٣) ٢٥ $س^{٢}$ − ٦٤
(٢٤) ٨١ $ا^{٤}$ − ٤٩ $س^{٤}$
(٢٥) $س^{٦}$ − ٢٥
(٢٦) ١ − ٣٦ $ا^{٦}$
(٢٧) ٩ $س^{٤}$ − $ا^{٢}$
(٢٨) ٨١ $س^{٦}$ − ٢٥ $ا^{٢}$
(٢٩) $س^{٤}$ $ا^{٢}$ − ٤٩
(٣٠) $ا^{٢}$ − ٦٤ $س^{٦}$
(٣١) $ا^{٢}$ $ب^{٢}$ − ٩ $س^{٦}$
(٣٢) $س^{٦}$ $ص^{٦}$ − ٤
(٣٣) ١ − $ا^{٢}$ $ب^{٢}$
(٣٤) ٤ − س
(٣٥) ٩ − ٤ $ا^{٢}$
(٣٦) ٩ $ا^{٤}$ − ٢٥ $ب^{٤}$
(٣٧) $س^{٤}$ − ١٦ $ب^{٢}$
(٣٨) $س^{٢}$ − ٢٥ $ص^{٢}$
(٣٩) ١ − ١٠٠ $ب^{٢}$
(٤٠) ٢٥ − ٦٤ $س^{٢}$
(٤١) ١٢١ $ا^{٢}$ − ٨١ $س^{٢}$
(٤٢) $ط^{٢}$ $ك^{٢}$ − ٦٤ $ا^{٤}$
(٤٣) ٦٤ $س^{٢}$ − ٢٥ $ع^{٦}$
(٤٤) ٤٩ $س^{٤}$ − ١٦ $ص^{٢}$
(٤٥) ٨١ $ط^{٤}$ $ع^{٦}$ − ٢٥ $ب^{٢}$
(٤٦) ١٦ $س^{١٦}$ − ٩ $ص^{٦}$
(٤٧) ٣٦ $س^{٣٦}$ − ٤٩ $ا^{١٤}$
(٤٨) ١ − ١٠٠ $ا^{٦}$ $ب^{٤}$ $ح^{٢}$
(٤٩) ٢٥ $س^{١٠}$ − ١٦ $ا^{٨}$
(٥٠) $ا^{٢}$ $ب^{٤}$ $ح^{٦}$ − $س^{١٦}$

أوجد قيمة كل من المقادير الآتية بواسطة تحليله إلى عوامله

(٥١) $(٥٧٥)^{٢}$ − $(٤٢٥)^{٢}$
(٥٢) $(١٢١)^{٢}$ − $(١٢٠)^{٢}$
(٥٣) $(٧٥٠)^{٢}$ − $(٢٥٠)^{٢}$
(٥٤) $(٣٣٩)^{٢}$ − $(٣١٩)^{٢}$
(٥٥) $(٧٥٣)^{٢}$ − $(٢٥٣)^{٢}$
(٥٦) $(١٠١)^{٢}$ − $(٩٩)^{٢}$
(٥٧) $(١٧٢٣)^{٢}$ − $(٢٧٧)^{٢}$
(٥٨) $(١٦٣٩)^{٢}$ − $(٧٣٩)^{٢}$
(٥٩) $(١٨١١)^{٢}$ − $(٦٨٩)^{٢}$
(٦٠) $(٢٧٣١)^{٢}$ − $(٢٦٩)^{٢}$
(٦١) $(٨١٣٣)^{٢}$ − $(٨١٣١)^{٢}$
(٦٢) $(١٠٠٠١)^{٢}$ − ١

بند ١٣٤ — نستعمل الطريقة المتقدّمة فى التحليل حينما يكون أحد المربعين أو كلاهما مركبا

(مثال ١) لتحليل المقدار $(ا + ٢ ب)^{٢} - ١٦ س^{٢}$ إلى عوامله

نقول إن مجموع $ا + ٢ ب$ و $٤ س$ هو $ا + ٢ ب + ٤ س$ وفرقهما هو $ا + ٢ ب - ٤ س$

$$\therefore \quad (ا + ٢ ب)^{٢} - ١٦ س^{٢} = (ا + ٢ ب + ٤ س)(ا + ٢ ب - ٤ س)$$

(مثال ٢) لتحليل المقدار $س^{٢} - (٢ ب - ٣ حـ)^{٢}$ إلى عوامله

نقول إن مجموع $س$ و $٢ ب - ٣ حـ$ هو $س + ٢ ب - ٣ حـ$ وفرقهما هو

$$س - (٢ ب - ٣ حـ) = س - ٢ ب + ٣ حـ$$

$$\therefore \quad س^{٢} - (٢ ب - ٣ حـ)^{٢} = (س + ٢ ب - ٣ حـ)(س - ٢ ب + ٣ حـ)$$

وإذا اشتملت العوامل على حدود متشابهة تختصر تلك الحدود وتكتب العوامل بأبسط صورها

(مثال ٣) : $(٣ س + ٧ ص)^{٢} - (٢ س - ٣ ص)^{٢}$

$$= \{(٣ س + ٧ ص) + (٢ س - ٣ ص)\}\{(٣ س + ٧ ص) - (٢ س - ٣ ص)\}$$

$$= (٣ س + ٧ ص + ٢ س - ٣ ص)(٣ س + ٧ ص - ٢ س + ٣ ص)$$

$$= (٥ س + ٤ ص)(س + ١٠ ص)$$

(تمرين ١٧ م)

حلل كلا من المقادير الآتية إلى عوامله

(١) $(ا + ب)^{٢} - حـ^{٢}$

(٢) $(ا - ب)^{٢} - حـ^{٢}$

(٣) $(س + ص)^{٢} - ٤ ع^{٢}$

(٤) $(س + ٢ ص)^{٢} - ا^{٢}$

(٥) $(ا + ٣ ب)^{٢} - ١٦ س^{٢}$

(٦) $(س + ٥ ا)^{٢} - ٩ ص^{٢}$

(٧) $(س + ٥ حـ)^{٢} - ١$

(٨) $(ا - ٢ س)^{٢} - ب^{٢}$

(٩) $(٢ س - ٣ ا)^{٢} - ٩ حـ^{٢}$

(١٠) $ا^{٢} - (ب - حـ)^{٢}$

(١١) $س^{٢} - (ص + ع)^{٢}$

(١٢) $٤ ا^{٢} - (ص - ع)^{٢}$

(١٣) $٩ س^{٢} - (٢ ا - ٣ ب)$

(١٤) $١ - (ا - ب)^{٢}$

(١٥) $حـ^{٢} - (٥ ا - ٣ ب)^{٢}$

(١٦) $(ا + ب)^{٢} - (حـ + د)^{٢}$

(١٧) $(ا - ب)^{٢} - (س + ص)^{٢}$

(١٨) $(٧ س + ص)^{٢} - ١$

(١٩) $(ا + ب)^{٢} - (م - ن)^{٢}$

(٢٠) $(ا - ن)^{٢} - (ب + م)^{٢}$

(٢١) $(ب - حـ)^{٢} - (ا - س)^{٢}$

(٢٢) $(٤ ا + س)^{٢} - (ب + ص)^{٢}$

(٢٣) $(ا + ٢ ب)^{٢} - (٣ س + ٤ ص)^{٢}$

(٢٤) $١ - (٧ ا - ٣ ب)^{٢}$

(٢٥) $(ا - ب)^{٢} - (س - ص)^{٢}$

(٢٦) $(ا - ٣ س)^{٢} - ١٦ ص^{٢}$

(٢٧) $(٢ ا - ٥ س)^{٢} - ١$

(٢٨) $(ا + ب - حـ)^{٢} - (س - ص + ع)^{٢}$

(٢٩) $(٣ ا + ٢ ب)^{٢} - (حـ + س - ٢ ص)^{٢}$

حلل كلا من المقادير الآتية إلى عوامله ثم أجر عملية الاختصار فى كل من النواتج

(٣٠) (س + ص)^{٢} − س^{٢}

(٣١) س^{٢} − (ص − س)^{٢}

(٣٢) (س + ٣ ص)^{٢} − ٤ ص^{٢}

(٣٣) (٢٤ س + ص)^{٢} − (٢٣ س − ص)^{٢}

(٣٤) (٥ س + ٢ ص) − (٣ س − ص)^{٢}

(٣٥) ٩ س^{٢} − (٣ س − ٥ ص)^{٢}

(٣٦) (٧ س + ٣)^{٢} − (٥ س − ٤)^{٢}

(٣٧) (٣ ا + ١)^{٢} − (٢ ا − ١)^{٢}

(٣٨) ١٦ ا^{٢} − (٣ ا + ١)

(٣٩) (٢ ا + ب − ح)^{٢} − (ا − ب + ح)^{٢}

(٤٠) (س − ٧ ص + ع)^{٢} − (٧ ص − ع)^{٢}

(٤١) (س + ص − ٨)^{٢} − (س − ٨)^{٢}

(٤٢) (٢ س + ا − ٣)^{٢} − (٣ − ٢ س)^{٢}

بند **١٣٥** — يمكن فى بعض الاحيان وضع أى مقدار مركب على صورة الفرق بين مربعين وذلك بتقسيم حدوده إلى قسمين بطريقة مناسبة وفى هذه الحالة يمكن تحليل المقدار إلى عوامله بالطريقة المتقدمة فى التحليل

(مثال ١) لتحليل المقدار ا^{٢} − ٢ ا س + س^{٢} − ٤ ب^{٢} إلى عوامله

نقول إن ا^{٢} − ٢ ا س + س^{٢} − ٤ ب^{٢} = (ا^{٢} − ٢ ا س + س^{٢}) − ٤ ب^{٢}

= (ا − س)^{٢} − (٢ ب)^{٢}

= (ا − س + ٢ ب) (ا − س − ٢ ب)

(مثال ٢) لتحليل المقدار ٩ ا^{٢} − ح^{٢} + ٤ ح س − ٤ س^{٢} إلى عوامله

نقول إن ٩ ا^{٢} − ح^{٢} + ٤ ح س − ٤ س^{٢} = ٩ ا^{٢} − (ح^{٢} − ٤ ح س + ٤ س^{٢})

= (٣ ا)^{٢} − (ح − ٢ س)^{٢}

= (٣ ا + ح − ٢ س) (٣ ا − ح + ٢ س)

(مثال ٣) لتحليل المقدار ٢ ب ء − ا^{٢} − ح^{٢} + ب^{٢} + ء^{٢} + ٢ ا ح إلى عوامله

نقول إن وجود الحدين ٢ ب ء و ٢ ا ح يرشدنا إلى كيفية ترتيب حدود المقدار وذلك بأن نقول إن

٢ ب ء − ا^{٢} − ح^{٢} + ب^{٢} + ء^{٢} + ٢ ا ح = ب^{٢} + ٢ ب ء + ء^{٢} − ا^{٢} + ٢ ا ح − ح^{٢}

= ب^{٢} + ٢ ب ء + ء^{٢} − (ا^{٢} − ٢ ا ح + ح^{٢})

= (ب + ء)^{٢} − (ا − ح)^{٢}

= (ب + ء + ا − ح) (ب + ء − ا + ح)

(مثال ٤) لتحليل المقدار س^{٤} + س^{٢} ص^{٢} + ص^{٤} إلى عوامله

نقول إن س^{٤} + س^{٢} ص^{٢} + ص^{٤} = (س^{٤} + ٢ س^{٢} ص^{٢} + ص^{٤}) − س^{٢} ص^{٢}

= (س^{٢} + ص^{٢})^{٢} − (س ص)^{٢}

= (س^{٢} + ص^{٢} + س ص) (س^{٢} + ص^{٢} − س ص)

= (س^{٢} + س ص + ص^{٢}) (س^{٢} − س ص + ص^{٢})

هذه النتيجة مهمة جدا وسنعود إليها فيما بعد فى الباب الثامن والعشرين

(تمارين ١٧ ج)

حلل كلا من المقادير الآتية إلى عوامله

(١) س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢} − ا^{٢}

(٢) ا^{٢} − ٢ ا ب + ب^{٢} − س^{٢}

(٣) س^{٢} − ٦ ا س + ٩ ا^{٢} − ١٦ ب^{٢}

(٤) ٤ ا^{٢} + ٤ ا ب + ب^{٢} − ٩ ح^{٢}

(٥) س^{٢} + ا^{٢} + ٢ ا س − ص^{٢}

(٦) ٢ ا ص + ا^{٢} + ص^{٢} − س^{٢}

(٧) س^{٢} − ا^{٢} − ٢ ا ب − ب^{٢}

(٨) ص^{٢} − ح^{٢} + ٢ ح س − س^{٢}

(٩) ١ − س^{٢} − ٢ س ص − ص^{٢}

(١٠) ح^{٢} − س^{٢} − ص^{٢} + ٢ س ص

(١١) س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س ص − ٤ س^{٢} ص^{٢}

(١٢) ا^{٢} − ٤ ا ب + ٤ ب^{٢} − ٩ ا^{٢} ح^{٢}

(١٣) س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢} − ا^{٢} − ٢ ا ب − ب^{٢}

(١٤) ا^{٢} − ٢ ا ب + ب^{٢} − ح^{٢} − ٢ ح د − د^{٢}

(١٥) س^{٢} − ٤ ا س + ٤ ا^{٢} − ب^{٢} + ٢ ب ص − ص^{٢}

(١٦) ص^{٢} + ٢ ب ص + ب^{٢} − ا^{٢} − ٦ ا س − ٩ س^{٢}

(١٧) س^{٢} − ٢ س + ١ − ا^{٢} − ٤ ا ب − ٤ ب^{٢}

(١٨) ٩ ا^{٢} − ٦ ا + ١ − س^{٢} − ٨ د س − ١٦ د^{٢}

(١٩) س^{٢} − ا^{٢} + ص^{٢} − ب^{٢} − ٢ س ص + ٢ ا ب

(٢٠) ا^{٢} + ب^{٢} − ٢ ا ب − ح^{٢} − د^{٢} − ٢ ح د

(٢١) ٤ س^{٢} − ١٢ ا س − ح^{٢} − د^{٢} − ٢ ح د + ٩ ا^{٢}

(٢٢) ا^{٢} + ٦ ب س − ٩ ب^{٢} س^{٢} − ١٠ ا ب − ١ + ٢٥ ب^{٢}

(٢٣) ا^{٤} − ٢٥ س^{٦} + ١٨ ا س^{٢} − ٩ + ٣٠ س^{٣} + ١٦ س^{٤}

(٢٤) س^{٤} − س^{٢} − ٩ − ١٢ ا س^{٢} + ا^{٤} + ٦ س

(٢٥) ا^{٤} + ا^{٢} ب^{٢} + ب^{٤}

(٢٦) س^{٤} + ٤ س ص + ١٦ ص^{٤}

(٢٧) ط^{٤} + ٩ ط^{٢} ك^{٢} + ٨١ ك^{٤}

(٢٨) ح^{٤} + ٣ ح^{٢} د^{٢} + ٤ د^{٤}

(٢٩) س^{٤} + ص^{٤} − ١١ س^{٢} ص^{٢}

(٣٠) ٤ م^{٤} − ٥ م^{٢} ن^{٢} + ن^{٤}

مجموع مكعبين أو فرقهما

بند ١٣٦ — إذا قسمنا ا^{٣} + ب^{٣} على ا + ب فالخارج يكون ا^{٢} − ا ب + ب^{٢}
وإذا قسمنا ا^{٣} − ب^{٣} على ا − ب فالخارج يكون ا^{٢} + ا ب + ب^{٢} ومن هنا نستنتج المتطابقتين الآتيتين

(١) ا^{٣} + ب^{٣} = (ا + ب) (ا^{٢} − ا ب + ب^{٢})

(٢) ا^{٣} − ب^{٣} = (ا − ب) (ا^{٢} + ا ب + ب^{٢})

ومن هاتين المتطابقتين يمكننا أن نستنتج كيفية تحليل أى مقدار يمكن وضعه على هيئة مجموع مكعبين أو فرقهما

(مثال ١) ٨ س^{٣} − ٢٧ ص^{٣} = (٢ س)^{٣} − (٣ ص)^{٣}
= (٢ س − ٣ ص) (٤ س^{٢} + ٦ س ص + ٩ ص^{٢})

(ملاحظة) الحد الأوسط ٦ س ص حاصل ضرب ٢ س فى ٣ ص

(مثال ٢) ٦٤ ا^{٣} + ١ = (٤ ا)^{٣} + (١)^{٣}
= (٤ ا + ١) (١٦ ا^{٢} − ٤ ا + ١)

ويحسن أن يهمل السطر الأول من العمل وتكتب العوامل لأول وهلة

(مثالان) ٣٤٣ ا^{٦} − ٢٧ س^{٣} = (٧ ا^{٢} − ٣ س) (٤٩ ا^{٤} + ٢١ ا^{٢} س + ٩ س^{٢})
٨ س^{٦} + ٧٢٩ = (٢ س^{٢} + ٩) (٤ س^{٤} − ١٨ س^{٢} + ٨١)

(تمارين ١٧ ط)

حلل كلا من المقادير الآتية إلى عوامله

(١) س^{٣} − ص^{٣}
(٢) س^{٣} + ص^{٣}
(٣) س^{٣} − ١
(٤) ١ + ا^{٣}
(٥) ٨ س^{٣} − ص^{٣}
(٦) س^{٣} + ٨ ص^{٣}
(٧) ٢٧ س^{٣} + ١
(٨) ١ − ٨ ص^{٣}
(٩) ا^{٣} ب^{٣} − ح^{٣}
(١٠) ٨ س^{٣} + ٢٧ ص^{٣}
(١١) ١ − ٣٤٣ س^{٣}
(١٢) ٦٤ + ص^{٣}
(١٣) ١٢٥ + ا^{٣}
(١٤) ٢١٦ − ا^{٣}

(١٥) ا^{٣} ب^{٣} + ٥١٢
(١٦) ١٠٠٠ ص^{٣} − ١
(١٧) س^{٣} + ٦٤ ص^{٣}
(١٨) ٢٧ − ١٠٠٠ س^{٣}
(١٩) ا^{٣} ب^{٣} + ٢١٦ ح^{٣}
(٢٠) ٣٤٣ − ٨ س^{٣}
(٢١) ا^{٣} + ٢٧ ب^{٣}
(٢٢) ٢٧ س^{٣} − ٦٤ ص^{٣}
(٢٣) ١٢٥ س^{٣} − ١
(٢٤) ٢١٦ ط^{٣} − ٣٤٣
(٢٥) س^{٣} ص^{٣} + ع^{٣}
(٢٦) ا^{٣} ب^{٣} ح^{٣} − ١
(٢٧) ٣٤٣ س^{٣} + ١٠٠٠ ص^{٣}
(٢٨) ٧٢٩ ا^{٣} − ٦٤ ب^{٣}

(٢٩) ٨ ا^{٣} ب^{٣} + ١٢٥ س^{٣}
(٣٠) س^{٣} ص^{٣} − ٢١٦ ع^{٣}
(٣١) س^{٦} − ٢٧ ص^{٣}
(٣٢) ٦٤ س^{٦} + ١٢٥ ص^{٣}
(٣٣) ٨ س^{٣} − ع^{٦}
(٣٤) ٢١٦ س^{٦} − ب^{٣}
(٣٥) ا^{٣} + ٣٤٣ ب^{٣}
(٣٦) ا^{٦} + ٧٢٩ ب^{٣}
(٣٧) ٨ س^{٣} − ٧٢٩ ص^{٦}
(٣٨) ط^{٣} ك^{٣} − ٢٧ س^{٣}
(٣٩) ع^{٣} − ٦٤ ص^{٦}
(٤٠) س^{٣} ص^{٣} − ٥١٢

بند ١٣٦ — (١) أوضحنا فى البنود من ١٢٨ إلى ١٣٢ كيفيـة تحليل المقادير ذات الثلاثة الحدود إلى عواملها بطريقة التجربة وفى البنود من ١٣٣ إلى ١٣٥ بينا طريقة تحليل فرق أى مربعين إلى عاملين والآن نشرح القاعدة العامة التى بها يمكن وضع أى مقدار مثل

$س^{٢} + ط س + ك$ أو $ا س + ب س + ح$

فى صورة مقدار مكوّن من فرق مربعين

علمنا من البند ١١٢ أن $س^{٢} + ٢ ا س + ا^{٢} = (س + ا)^{٢}$

وأن $س^{٢} - ٢ ا س + ا^{٢} = (س - ا)^{٢}$

إذن إذا كان المقدار ذو الثلاثة الحدود مربعا كاملا وكان معامل أكبر قوة وهى هنا $س^{٢}$ الوحدة فالحدّ المجرّد عن س يساوى دائمـا مربع نصف معـامل س وعلى ذلك إذا علم الحدّان الأوّل والثانى (أى اللذان يشتملان على $س^{٢}$ ، ٦ س هنا) من مقدار ذى ثلاثة حدود يمكن جعل المربع كاملا باضافة مربع نصف معامل س

فمثلا المقدار $س^{٢} + ٦ س$ يصير مربعا كاملا إذا أضفنا إليه $(\frac{٦}{٢})^{٢}$ أى ٩

وحينئذ يكون $س^{٢} + ٦ س + ٩$ أى $(س + ٣)^{٢}$

وكذلك نجعل المقدار $س^{٢} - ٧ س$ مربعا كاملا بأن نضم إليه $(-\frac{٧}{٢})^{٢}$ أى $\frac{٤٩}{٤}$

وحينئذ يكون $س^{٢} - ٧ س + \frac{٤٩}{٤}$ أى $(س - \frac{٧}{٢})^{٢}$

(ملاحظة) الحدّ المضاف لتكميل المربع دائمـا موجب

(مثـال ١) لتحليل المقدار $س^{٢} + ٦ س + ٥$ إلى عوامله

نقول يمكن وضع هذا المقدار هكذا $(س^{٢} + ٦ س + ٩) + ٥ - ٩$

أى أن $س^{٢} + ٦ س + ٥ = (س + ٣)^{٢} - ٤$

$= (س+٣+٢)(س+٣-٢)$

$= (س+٥)(س+١)$

(مثـال ٢) ما عاملا $س^{٢} - ٧ س - ٢٢٨$

لذلك نقول إن $س^{٢} - ٧ س - ٢٢٨ = (س^{٢} - ٧ س + \frac{٤٩}{٤}) - ٢٢٨ - \frac{٤٩}{٤}$

$= (س - \frac{٧}{٢})^{٢} - \frac{٩٦١}{٤}$

$= (س - \frac{٧}{٢} + \frac{٣١}{٢})(س - \frac{٧}{٢} - \frac{٣١}{٢})$

$= (س + ١٢)(س - ١٩)$

(مثـال ٣) ما عاملا $٣ س^{٢} - ١٣ س + ١٤$

لذلك نقول إن $٣ س^{٢} - ١٣ س + ١٤ = ٣ (س^{٢} - \frac{١٣}{٣} س + \frac{١٤}{٣})$

$= ٣ \{ س^{٢} - \frac{١٣ س}{٣} + (\frac{١٣}{٦})^{٢} + \frac{١٤}{٣} - \frac{١٦٩}{٣٦} \}$

$= ٣ \{ (س - \frac{١٣}{٦})^{٢} - \frac{١}{٣٦} \}$

$= ٣ (س - \frac{١٣}{٦} + \frac{١}{٦})(س - \frac{١٣}{٦} - \frac{١}{٦})$

$= ٣ (س - \frac{٧}{٣})(س - ٢)$

$= (٣ س - ٧)(س - ٢)$

بمـا أن طريقة التحليل بجعل المربع كاملا عامة وتنطبق على كافة الاحوال يحسن استعمالهـا فيما إذا رأى المتعلم أن التحليل بطريقة التجربة غير مؤكد وممل

(مثلا) إذا أريد تحليل المقدار ٢٤ س^{٢} + ١١٨ س — ٢٤٧ إلى عوامله يفضل استخدام الطريقة العامة لأول وهلة

بند ١٣٦ — (ب) تشتمل التمارين الآتيـــة على أمثلة بسيطة متنوعة على الأحوال المختلفة التى سبق شرحها فى هذا الباب

(تمـارين متنوعة ١٧ ى)

تطبيقات على البندين ١٢٨ و ١٢٩

حلل كلا من المقـادير الآتية إلى عوامله

(١) س^{٢} — ٣ س + ٢
(٢) ا^{٢} + ٧ ا + ١٠
(٣) ب^{٢} + ب — ١٢
(٤) ص^{٢} — ٤ ص — ٢١
(٥) ح^{٢} + ١٢ ح + ١١
(٦) س^{٢} — ٤ س — ٥
(٧) س^{٢} + ١٢ س + ٢٠
(٨) ص^{٢} + ٩ ص — ١٠
(٩) ط^{٢} — ٢ ط س — ٢٤ س^{٢}
(١٠) ص^{٢} + ص — ١١٠
(١١) ع^{٢} — ٩ ع — ٩٠
(١٢) ك^{٢} — ١٤ ك + ٤٨
(١٣) ا^{٢} + ١٨ ا + ٨١
(١٤) ب^{٢} — ٢٤ ب — ٨١
(١٥) ح^{٢} + ٣٠ ح + ٨١
(١٦) س^{٢} — ١٤ س + ٤٩
(١٧) ص^{٢} + ١٠ ص ع + ٢١ ع^{٢}
(١٨) ع^{٢} + ٢ ع — ٦٣
(١٩) س + ١١ س + ٢٤
(٢٠) ط^{٢} — ٥ ط — ٢٤
(٢١) ل^{٢} + ٩ ل — ٣٦
(٢٢) ا^{٢} ب^{٢} — ٤ ا ب + ٤
(٢٣) ا^{٢} ب^{٢} + ١٠ ا ب + ١٦
(٢٤) ب^{٢} — ٤ ب — ٤٥
(٢٥) م^{٢} + ٣ م — ٨٨
(٢٦) س^{٢} — ١٢ س — ٤٥
(٢٧) ط^{٢} + ١٠ ط — ٣٩
(٢٨) س^{٢} ص^{٢} — س ص — ٧٢
(٢٩) ع^{٢} — ع — ٢٠
(٣٠) س^{٢} + س ص — ٥٦ ص^{٢}
(٣١) ا^{٢} — ١١ ا ب — ٢٦ ب^{٢}
(٣٢) ا^{٢} ب — ا ب — ٥٦
(٣٣) ص^{٤} + ص^{٢} — ١٥٦
(٣٤) ع^{٤} — ٧ ع^{٢} — ٧٨
(٣٥) ص^{٤} — ٢ ص — ٣٥
(٣٦) س^{٢} + ٦ س ص — ٩١ ص^{٢}

(تطبيقات على البنود من ١٢٥ إلى ١٣٢)

حلل كلا من المقادير الآتية إلى عاملين أو أكثر

(٣٧) م^{٣} س^{٢} — ٣ م^{٢} س^{٣}
(٣٨) ١٠ س^{٣} + ٢٥ س^{٤} ص
(٣٩) ص^{٢} — ٢ ص — ١٥
(٤٠) (ا + ب) س + (ا + ب) ص
(٤١) س^{٢} — س ع + س ص — ص ع
(٤٢) ٣ ح^{٢} + ح — ٢

(٤٣) $٢ ب^{٢} + ١١ ب + ٥$

(٤٤) $س^{٢} - ٦ س ص + ٩ ص^{٢}$

(٤٥) $٣ س^{٢} - ١٠ س + ٣$

(٤٦) $ح^{٢} د^{٢} - ح د - ٢$

(٤٧) $٦ س^{٢} + ٧ س - ٣$

(٤٨) $٤ (ا - ب) - ح (ا - ب)$

(٤٩) $ا^{٤} + ا^{٣} + ٢ ا + ٢$

(٥٠) $٢ ح^{٣} د - ٦ ح^{٢} د^{٢} + ٢ ح^{٢} د^{٣}$

(٥١) $س^{٣} ص + ٢ س^{٢} ص - ٦٣ س ص$

(٥٢) $٦ ص^{٢} - ٧ ص - ٣$

(٥٣) $٤ س^{٢} - ١٢ س + ٩$

(٥٤) $٣ - ٥ ط - ١٢ ط^{٢}$

(٥٥) $١٦ + ٨ ط ك + ط^{٢} ك^{٢}$

(٥٦) $٤ ع^{٣} + ٥ ع^{٢} - ٦ ع$

(٥٧) $ا^{٣} + ا^{٢} - ٤٢ ا$

(٥٨) $٢ م^{٤} - م^{٣} + ٤ م - ٢$

(٥٩) $ا^{٤} - ٣ ا^{٣} - ا^{٣} ب + ٣ ا^{٢} ب$

(٦٠) $١٤ - ٥ س - س^{٢}$

(٦١) $١٧ - ١٨ ع + ع^{٢}$

(٦٢) $٢ م^{٤} - ١١ م^{٢} - ٢١$

(٦٣) $٥ س^{٢} + ٧ س ص - ٦ ص^{٢}$

(٦٤) $٦ م^{٦} + ١٧ م^{٣} - ٤٥$

(٦٥) $٩ م^{٢} - ٢٤ م + ١٦$

(تطبيقات على البنود من ١٢٥ إلى ١٣٦ ا)

(٦٦) $٢٥ - ٨١ ا^{٢}$

(٦٧) $ا^{٤} ب^{٤} - ٩$

(٦٨) $٢٧ + ب^{٣}$

(٦٩) $١ - ٦٤ م^{٣}$

(٧٠) $د^{٤} - ٢٥ ل^{٢}$

(٧١) $ح^{٣} ك^{٣} - ١$

(٧٢) $٨ ع^{٣} + ١$

(٧٣) $١ - ٦٤ س^{٢}$

(٧٤) $٢٥٠ ط^{٣} + ٢$

(٧٥) $١٠٠ ا^{٢} ب^{٤} - ٤$

(٧٦) $٧٢٩ + ح^{٣} د^{٣}$

(٧٧) $(ا + س)^{٢} - ١$

(٧٨) $١٦ - (ب - ح)^{٢}$

(٧٩) $٩ س^{٣} - ٤ س ص^{٢}$

(٨٠) $ط^{٢} - ط ك - ٢٠ ك^{٢}$

(٨١) $ل^{٣} - ل^{٢} - ٤٢ ل$

(٨٢) $ا^{٢} ب^{٢} ح^{٢} - ٨١ د^{٢}$

(٨٣) $٦٤ س^{٦} - ٢٧ ص^{٣}$

(٨٤) $س^{٢} + ٢ س - ٣٢٣$

(٨٥) $س^{٤} - ٢٨٩$

(٨٦) $ل^{٢} + ل - ٢٧٢$

(٨٧) $١٠٠٠ ع^{٣} - ٢٧$

(٨٨) $ا^{٢} + ١٠ ا - ٢٩٩$

(٨٩) $ا^{٢} - ب^{٢} - ٢ ب ح - ح^{٢}$

(٩٠) $١ - س^{٢} + ٦ س ص - ٩ ص^{٢}$

(٩١) $س^{٤} + ص^{٤} - ٧ س^{٢} ص^{٢}$

(٩٢) $ا^{٤} + ٣ ا^{٢} + ٤$

(٩٣) $ب^{٢} - ٢ ب - ٧٨٣$

بند ١٣٧ — أمثلة متنوعة على تحليل المقادير إلى عواملها

(مثال ١) لتحليل المقدار $١٦ ا^{٤} - ٨١ ب^{٤}$ إلى عوامله

نقول إن $١٦ ا^{٤} - ٨١ ب^{٤} = (٤ ا^{٢} + ٩ ب^{٢}) (٤ ا^{٢} - ٩ ب^{٢})$

$= (٤ ا^{٢} + ٩ ب^{٢}) (٢ ا + ٣ ب) (٢ ا - ٣ ب)$

(مثال ٢) لتحليل المقدار $س^{٦} - ص^{٦}$ إلى عوامله

نقول إن $س^{٦} - ص^{٦} = (س^{٣} + ص^{٣}) (س^{٣} - ص^{٣})$

$= (س + ص) (س^{٢} - س ص + ص^{٢}) (س - ص) (س^{٢} + س ص + ص^{٢})$

(ملاحظة) إذا أمكن وضع مقدار جبرى على صورة الفرق بين مربعين أو على صورة الفرق بين الكعبين فالأسهل فى تحليله أن نبتدئ باستعمال قاعدة الفرق بين مربعين

(مثـال ٣) لتحليل المقدار ٢٨ سـ^٤ صـ + ٦٤ سـ^٣ صـ − ٦٠ سـ^٢ صـ إلى عوامله
نقول إن ٢٨ سـ^٤ صـ + ٦٤ سـ^٣ صـ − ٦٠ سـ^٢ صـ = ٤ سـ^٢ صـ (٧ سـ^٢ + ١٦ سـ − ١٥)
= ٤ سـ^٢ صـ (٧ سـ − ٥) (سـ + ٣)

(مثـال ٤) لتحليل المقدار سـ^٣ حـ^٢ − ٨ صـ^٣ حـ^٢ − ٤ سـ^٣ ء^٢ + ٣٢ صـ^٣ ء^٢ إلى عوامله
نقول إن هذا المقدار = حـ^٢ (سـ^٣ − ٨ صـ^٣) − ٤ ء^٢ (سـ^٣ − ٨ صـ^٣)
= (سـ^٣ − ٨ صـ^٣) (حـ^٢ − ٤ ء^٢)
= (سـ − ٢ صـ) (سـ^٢ + ٢ سـ صـ + ٤ صـ^٢) (حـ + ٢ء) (حـ − ٢ء)

(مثـال ٥) لتحليل المقدار ٤ سـ^٢ − ٢٥ صـ^٢ + ٢ سـ + ٥ صـ إلى عوامله
نقول إن ٤ سـ^٢ − ٢٥ صـ^٢ + ٢ سـ + ٥ صـ = (٢ سـ + ٥ صـ) (٢ سـ − ٥ صـ) + ٢ سـ + ٥ صـ
= (٢ سـ + ٥ صـ) (٢ سـ − ٥ صـ + ١)

حلل كلا من المقادير الآتية إلى عاملين أو أكثر

(٩٤) سـ^٦ − ٦٤
(٩٥) ٧٢٩ صـ^٦ − ٦٤ سـ^٦
(٩٦) سـ^٨ − ١
(٩٧) ٧٢٩ ا^٧ ب − ا ب^٧
(٩٨) ا^٨ سـ^٦ − ٦٤ ا^٢ صـ^٦
(٩٩) ا^{١٢} − ب^{١٢}
(١٠٠) سـ^٤ + ٤ سـ^٢ صـ^٢ ع^٢ + ٤ صـ^٤ ع^٤
(١٠١) ا^٣ ب^٣ + ٥١٢
(١٠٢) ٢ سـ^٢ + ١٧ سـ + ٣٥
(١٠٣) ٥٠٠ سـ^٢ صـ − ٢٠ صـ^٣
(١٠٤) (ا + ب)^٤ − ١
(١٠٥) (حـ + ء)^٣ − ١
(١٠٦) ١ − (سـ − صـ)^٣
(١٠٧) سـ^٢ − ٦ سـ − ٢٤٧
(١٠٨) ا^٢ − ٢٢ ا − ٢٧٩
(١٠٩) ٢٥٠ (ا − ب)^٣ + ٢
(١١٠) (حـ + ء)^٣ + (حـ − ء)^٣
(١١١) ٨ (سـ + صـ)^٣ − (٢ سـ − صـ)
(١١٢) سـ^٢ − ٤ صـ^٢ + سـ − ٢ صـ
(١١٣) ا^٢ − ب^٢ + ا − ب
(١١٤) (ا + ب)^٢ + ا + ب
(١١٥) ا^٣ + ب^٣ + ا + ب
(١١٦) ا^٢ − ٩ ب^٢ + ا + ٣ ب
(١١٧) ٤ (سـ − صـ)^٣ − (سـ − صـ)
(١١٨) سـ^٤ صـ − سـ^٢ صـ^٣ − سـ^٣ صـ^٢ + سـ صـ^٤

[البـاب الثامن والعشرون وكذلك الأسئلة المتنوعة (٤) الواردة فى صفحة ١٨٠ تفيد فى التمرن على تحليل المقادير الجبرية إلى عواملها]

أسئلة متنوعة (٣)

(١) اطرح ٣ سـ^٣ − ٧ سـ + ١ من ٢ سـ^٢ − ٥ سـ − ٣ ثم اطرح البـاقى من صـفر وضم هذا الناتج الأخير إلى ٢ سـ^٢ − ٢ سـ^٣ − ٤

(٢) إختصر ٢ { ٣ ا − (٤ ب − ٥ حـ) } + ٤ { ٤ ا − (٥ ب − ٢ حـ) } + ٤ { ٥ ا − ٣ (ب − حـ) }

(٣) ما حاصل ضرب ا^٣ − ٢ ا^٢ حـ + ٢ ا حـ^٢ − حـ^٣ فى ا^٣ + ٢ ا^٢ حـ + ٢ ا حـ^٢ + حـ^٣

(٤) حل المعادلات (١) $\frac{\text{س}}{2} + \frac{\text{س}}{3} = \frac{\text{س}}{4} + 7$

(٢) $9\,\text{س} + 5\,\text{ص} = 75$

$7\,\text{س} - 4\,\text{ص} = 11$

(٥) ما الجذر التربيعى للقدار $8\,\text{س}^{4} + 16\,\text{س}^{2} + 1 - 8\,\text{س} - 2\,\text{س}^{3} + \text{س}$

(٦) ما العدد الذى ثلثه وربعه وسدسه وثمنه معا تساوى ٦٣

(٧) إذا كان ا = ٤ ، ب = ٣ ، ح = ٢ فما قيمة

$$\frac{\text{ا}^{2} - \text{ب}^{2}}{\text{ب} + \text{ح}} + \frac{\text{ب}^{2} - \text{ح}^{2}}{\text{ح} + \text{ا}} + \frac{\text{ح}^{2} - \text{ا}^{2}}{\text{ا} + \text{ب}}$$

(٨) إقسم $\text{س} + \frac{9}{4}\text{س}^{3} + \frac{21}{8}\text{س}^{2} + \frac{33}{16}\text{س} + \frac{5}{16}$ على $\text{س}^{2} + \frac{3\,\text{س}}{2} + \frac{1}{4}$

(٩) ضم $5\,\text{س}^{2} - 6\,\text{س}$ إلى زيادة الواحد الصحيح عن $3\,\text{س}^{2} - 5\,\text{س} + 1$

(١٠) ما عوامل (١) $\text{ا}^{2}\,\text{س}^{2} - 2\,\text{ا}\,\text{س} - 15$

(٢) $4\,\text{م}^{4} - 81\,\text{ط}^{2}\,\text{ك}^{2}$

(١١) حل المعادلات (١) $13\,\text{س} + 11\,\text{ص} = 18$

$11\,\text{س} + 13\,\text{ص} = 30$

(٢) $57\,\text{س} + 52\,\text{ص} = 181$

$76\,\text{س} - 39\,\text{ص} = 458$

(١٢) سرعة قطار يسير ا من الكيلومترات فى ب من الساعات تساوى سرعة عربة ط من المترات فاذا سارت العربة م من الساعات لتقطع المسافة بين بلدين فما طول هذه المسافة مقدرة بالكيلومترات

(١٣) ماهو حاصل ضرب المقادير الآتية بعضها فى بعض

$3\,\text{س}^{2} - 2\,\text{س} + 3$ ، $4\,\text{س} + 5$ ، $7\,\text{س} - 2$

(١٤) حل المعادلتين

(١) $\frac{5\,\text{س}}{7} - \frac{4}{5}\left(\text{س} - \frac{3}{4}\right) - \frac{2}{21}\left(\text{س} + \frac{7}{2}\right) + 1 = 0$

(٢) $2\left(\frac{5\,\text{س}}{3} - 1\right) + \frac{11}{5}\left(1 + \frac{14\,\text{س}}{33}\right) = \frac{2\,\text{س} + 7}{5} - 7$

(١٥) اكتب مربع $\text{س}^{2} + 7\,\text{س} - 11$ بدون إجراء عملية الضرب

(١٦) حلل المقدارين الآتيين إلى عواملهما

(١) $\text{س}^{2} + 2\,\text{ا}\,\text{س} - \text{ب}\,\text{س} - 2\,\text{ا}\,\text{ب}$

(٢) $\text{س}^{4} + 10\,\text{س}^{2}\,\text{ص} - 56\,\text{ص}$

(١٧) ما العامل المشترك الأعلى والمضاعف المشترك البسيط للقادير الآتية

$49\,\text{ب}\,\text{ح}^{3}$ ، $21\,\text{ا}^{2}\,\text{ب}^{2}$ ، $56\,\text{ح}\,\text{ا}^{3}$ ، $63\,\text{ا}\,\text{ب}\,\text{ح}^{2}$

(١٨) رجل معه ٥٠ جنيها فى جيب و ٦ جنيهات فى جيب آخر فأخذ من الجيب الأوّل مبلغا ووضعه فى الثانى وبذا صار ما فى هذا الأخير ٥/٩ ما بقى فى الجيب الأوّل فما المبلغ الذى نقل للجيب الثانى

(١٩) إختصر (١٥ أ^٢ ط^٣)/(٥٦ م هـ) × (٤٩ أ هـ^٥)/(٤٠ ط^٢ م^٢) ÷ (٧ أ^٣ هـ^٣)/(٦٤ م^٤)

(٢٠) بيّن أن أ (أ − ١) (أ − ٢) (أ − ٣) = (أ^٢ − ٣ أ + ١)^٢ − ١

(٢١) بيّن بالرموز الجبرية أن

(١) زيادة م على ن أكبر من ا بمقدار حـ

(٢) ثلاثة أمثال مربع ا ب مضافا اليها مكعب حـ تساوى مجموع م ، ن مكررا ط من المرّات

(٢٢) حل المعادلة س/٤ (٣ − ٨/س) − ٧/٨ (٧ − ٣س/٤) = ١٥ (١/٣ − س/٦٤)

وبرهن أنها لا تصح إذا كانت س = ٢

(٢٣) إقسم حاصل ضرب ٣ س^٢ − ٢ س ص − ص^٢ فى ٢ س − ص على س − ص

(٢٤) ما ثمن كل من ١٢ تفاحة و ٢٠ بيضة إذا كان ثمن ٦٠ تفاحة و ١٠٠ بيضة ٤٠ قرشا وثمن ٧٢ تفاحة يساوى ثمن ٣٠ بيضة

(٢٥) أكتب حاصل الضرب (٢ س^٢ − ١٣ س + ١٥) (س^٢ − ٤ س − ٥) (٢ س^٢ − س − ٣) على صورة عوامل بسيطة واستنتج من ذلك جذره التربيعى وضعه على صورة حاصل ضرب ثلاثة عوامل كل منها ذو حدّين

(٢٦) إذا كانت س = ٦ ، ص = ٧ ، ع = ٨ فما قيمة

س − (ص − ع) − ٢ [س + ع − ٣ { − ٢ (ص − ١)}] + ٤ [س/٢ − (٣ − ٩/٢ ص)]

(٢٧) إقسم ٦ س^٥ + ٥٧ س^٤ ص + ١٢٨ س^٣ ص^٢ − ٦٠ س^٢ ص^٣ − ١٣٠ س ص^٤ + ٦٣ ص^٥ على ٣ س^٣ + ١٥ س^٢ ص + ٧ س ص^٢ − ٩ ص^٣

(٢٨) حل المعادلات فى المجموعة الآتية

٤ س + ٢ ص + ع = ١٤ ، ٣ س − ص + ٢ ع = ٣ ، س + ٧ ص − ع = ٢٣

(٢٩) حلل كلا من

(١) س^٣ ص − ٤ س ص^٣

(٢) ٢ م^٤ + م^٢ ن^٢ − ٣ ن^٤

إلى عاملين أو أكثر .

(٣٠) فى كم يوم يتم ا من الرجال ١/م من عمل يمكن إتمامه جميعه بواسطة ب من الرجال فى حـ من الأيام؟ اذكر المقدار الرقمى للجواب إذا كانت م = ٤ ، ا = ٢٤ ، ب = ١٤ ، حـ = ١٨

الباب الثامن عشر – العامل المشترك الأعلى

بند ١٣٨ — تعريف : العامل المشترك الأعلى لمقدارين جبريين أو أكثر هو المقدار الأعلى درجة الذى يقسم كلا منهما بدون باق

(ملاحظة) قد تستعمل العبارة القاسم المشترك الأعظم بدلا من العبارة العامل المشترك الأعلى إلا أنه مراعاة للدقة فى التعبير يجب أن لاتستعمل العبارة الأولى إلا فى الحساب

وسنبين فى البند ١٤٥ أنه لايشترط أن يكون العامل المشترك الأعلى لمقدارين أو أكثر هو القاسم المشترك الأعظم لهما

قد أوضحنا فى الباب الحادى عشر كيفية كتابة العامل المشترك الأعلى للمقادير البسيطة بمجرد النظر إليها وقد يمكننا بطريقة مشابهة للمتقدمة إيجاد العامل المشترك الأعلى للمقادير المركبة الموضوعة على صورة حاصل ضرب عوامل أو التى يسهل تحليلها إلى عوامل

(مثال ١) لايجاد العامل المشترك الأعلى للمقدارين

٤ حـ سـ^{3} ، ٢ حـ سـ^{3} + ٤ حـ^{2} سـ^{2}

نرى أنه من السهل استخراج العوامل المشتركة إذا وضعنا المقدارين على الصورتين الآتيتين

٤ حـ سـ^{3} = ٤ حـ سـ^{3}

٢ حـ سـ^{3} + ٤ حـ^{2} سـ^{2} = ٢ حـ سـ^{2} (سـ + ٢ حـ)

فالعامل المشترك الأعلى إذن ٢ حـ سـ^{2}

(مثال ٢) لايجاد العامل المشترك الأعلى للقادير

٣ ا^{2} + ٩ ا ب ، ا^{3} − ٩ ا ب^{2} ، ا^{3} + ٦ ا^{2} ب + ٩ ا ب^{2}

نحللها إلى عواملها فينتج أن

٣ ا^{2} + ٩ ا ب = ٣ ا (ا + ٣ ب)

و ا^{3} − ٩ ا ب^{2} = ا (ا + ٣ ب) (ا − ٣ ب)

و ا^{3} + ٦ ا^{2} ب + ٩ ا ب^{2} = ا (ا + ٣ ب) (ا + ٣ ب)

فالعامل المشترك الأعلى إذن ا (ا + ٣ ب)

بند ١٣٩ — إذا اشتملت المقادير على قوى مختلفة لعامل مركب مشترك بينها يجب أن يلاحظ أن العامل المشترك الأعلى يشتمل على أعلى قوة لذلك العامل المركب تكون مشتركة بين جميع المقادير

(مثال ١) العامل المشترك الأعلى للقادير

سـ (ا − سـ)^{2} ، ا (ا − سـ)^{3} ، ٢ ا سـ (ا − سـ)^{5} هو (ا − سـ)^{2}

(مثال ٢) لايجاد العامل المشترك الأعلى للقادير

ا سـ^{2} + ٢ ا^{2} سـ + ا^{3} ، ٢ ا سـ^{2} − ٤ ا^{2} سـ − ٦ ا^{3} ، ٣ (ا سـ + ا)

نرى أنه بتحليل المقادير إلى عواملها يحدث أن

ا سـ^٢ + ٢ ا^٢ سـ + ا^٣ = ا (سـ^٢ + ٢ ا سـ + ا^٢)

= ا (سـ + ا)^٢ .... (١)

و ٢ ا سـ^٢ − ٤ ا^٢ سـ − ٦ ا^٣ = ٢ ا (سـ^٢ − ٢ ا سـ − ٣ ا^٢)

= ٢ ا (سـ + ا) (سـ − ٣ ا) .... (٢)

و ٣ (ا سـ + ا^٢)^٢ = ٣ ا^٢ (سـ + ا)^٢ .... (٣)

وبمجرد النظر فى النتائج (١) ، (٢) ، (٣) نرى أن العامل المشترك الأعلى ا (سـ + ا)

(تمارين ١٨ ا)

أوجد العامل المشترك الأعلى للمقادير الآتية

(١) ا^٢ + ا ب ، ا^٢ − ب^٢

(٢) (سـ + صـ)^٢ ، سـ^٢ − صـ^٢

(٣) ٢ سـ^٢ − ٢ سـ صـ ، سـ^٢ − سـ^٢ صـ

(٤) ٦ سـ^٢ − ٩ سـ صـ ، ٤ سـ^٢ − ٩ صـ^٢

(٥) سـ^٣ + سـ^٢ صـ ، سـ^٣ + صـ^٣

(٦) ا^٣ ب − ا ب^٣ ، ا^٥ ب^٢ − ا^٢ ب^٥

(٧) ا^٣ − ا^٢ سـ ، ا^٣ − ا سـ^٢ ، ا^٤ − ا سـ^٣

(٨) ا^٢ − ٤ سـ^٢ ، ا^٢ + ٢ ا سـ

(٩) ا^٢ ب سـ + ا ب^٢ سـ ، ا^٢ ب − ب^٢

(١٠) ٢ سـ^٢ صـ − ٦ سـ صـ^٢ ، سـ^٢ − ٩ صـ^٢

(١١) ا^٢ − سـ^٢ ، ا^٢ − ا سـ ، ا^٢ سـ − ا سـ^٢

(١٢) ٤ سـ^٢ + ٢ سـ صـ ، ١٢ سـ^٢ صـ − ٣ صـ^٣

(١٣) ٢٠ سـ − ٤ ، ٥٠ سـ^٢ − ٢

(١٤) ٦ ب سـ + ٤ ب صـ ، ٩ حـ سـ + ٦ حـ صـ

(١٥) سـ^٢ + سـ ، (سـ + ١)^٢ ، سـ^٣ + ١

(١٦) سـ صـ − صـ ، سـ^٤ صـ − سـ صـ

(١٧) سـ^٢ − ٢ سـ صـ + صـ ، (سـ − صـ)^٣

(١٨) سـ^٣ + ا^٢ سـ ، سـ^٤ − ا^٤

(١٩) سـ^٣ + ٨ صـ^٣ ، سـ^٢ + سـ صـ − ٢ صـ^٢

(٢٠) سـ^٤ − ٢٧ ا^٣ سـ ، (سـ − ٣ ا)

(٢١) سـ^٢ + ٣ سـ + ٢ ، سـ^٢ − ٤

(٢٢) سـ^٢ − سـ − ٢٠ ، سـ^٢ − ٩ سـ + ٢٠

(٢٣) سـ^٢ − ١٨ سـ + ٤٥ ، سـ^٢ − ٩

(٢٤) ٢ سـ^٢ − ٧ سـ + ٣ ، ٣ سـ^٢ − ٧ سـ − ٦

(٢٥) ١٢ سـ^٢ + سـ − ١ ، ١٥ سـ^٢ + ٨ سـ + ١

(٢٦) ٢ سـ^٢ − سـ − ١ ، ٣ سـ^٢ − سـ − ٢

(٢٧) حـ^٢ سـ^٢ − ء^٢ ، ا حـ سـ^٢ − ب حـ سـ + ا ء سـ − ب ء

(٢٨) سـ^٥ − سـ صـ^٤ ، سـ^٣ + سـ^٢ صـ + سـ صـ^٢ + صـ^٣

(٢٩) ا^{٣} س − ا^{٢} ب س − ٦ ا ب^{٢} س ، ٦ ا^{٢} ب س^{٢} − ٤ ا ب^{٢} س^{٢} + ٣ ب^{٣} س^{٢}

(٣٠) ٢ س^{٢} + ٩ س + ٤ ، ٢ س^{٢} + ١١ س + ٥ ، ٢ س^{٢} − ٣ س − ٢

(٣١) ٣ س^{٤} + ٨ س^{٣} + ٤ س^{٢} ، ٣ س^{٥} + ١١ س^{٤} + ٦ س^{٣}
، ٣ س^{٤} − ١٦ س^{٣} − ١٢ س^{٢}

بند ١٤٠ — ينبغى إيجاد العامل المشترك الأعلى بمجرد النظر كلما تيسر ذلك ولكن لا يسهل أحيانا تحليل المقادير إلى عواملها فتستعمل عند ذلك طريقة مشابهة للطريقة المستعملة فى الحساب لاستخراج القاسم المشترك الأعظم بين عددين أو أكثر

بند ١٤١ — سنبين الآن الطريقة الجبرية لايجاد العامل المشترك الأعلى بايراد بعض أمثلة مؤجلين شرح البرهان الوافى لتلك الطريقة إلى مابعد ولكن نذكر قاعدتين يجب أن يلتفت إليهما عند حل الأمثلة الآتية :

(١) إذا اشتمل مقدار ما على عامل فكل مكرر لهذا المقدار يقبل القسمة على ذلك العامل

(٢) إذا كان لمقدارين عامل مشترك فانه يقسم كلا من حاصل جمعهما و باقى طرحهما كما أنه يقسم كلا من حاصل جمع أو باقى طرح أى مكررين لهما

(مثال) أوجد العامل المشترك الأعلى للقدارين الآتيين

٤ س^{٣} − ٣ س^{٢} − ٢٤ س − ٩ ، ٨ س^{٣} − ٢ س^{٢} − ٥٣ س − ٣٩

٢	٤ س^{٣} − ٣ س^{٢} − ٢٤ س − ٩	٨ س^{٣} − ٢ س^{٢} − ٥٣ س − ٣٩	
	٤ س^{٣} − ٥ س^{٢} − ٢١ س	٨ س^{٣} − ٦ س^{٢} − ٤٨ س − ١٨	
٢	٢ س^{٢} − ٣ س − ٩	٤ س^{٢} − ٥ س − ٢١	س
	٢ س^{٢} − ٦ س	٤ س^{٢} − ٦ س − ١٨	
	٣ س − ٩	س − ٣	٢ س + ٣
	٣ س − ٩		

وحينئذ يكون س − ٣ العامل المشترك الأعلى

(شرح العملية) أولا نرتب كلا من المقدارين المعلومين حسب القوى الصاعدة أو النازلة لحرف س ولكون درجة الحدّ الأوّل فى كل من المقدارين واحدة يجعل المقدار الذى يكون فيه معامل الحدّ الأعلى درجة أصغر منه فى الآخر مقسوما عليه ويرتب العمل فى خانات يوازى بعضها بعضا كما هو مبين آنفا ونضع خارج القسمة ٢ على يسار المقسوم عليه

وحينما يصير أول باق وهو ٤ س^{٢} − ٥ س − ٢١ مقسوما عليه نضع الخارج س على يمينه وإذا ما جعلنا الباقى الثانى وهو ٢ س^{٢} − ٣ س − ٩ مقسوما عليه نضع الخارج ٢ على يساره وهكذا فالمقسوم عليه الأخير س − ٣ يكون العامل المشترك الأعلى المطلوب كما فى علم الحساب

بند ١٤٢ — تستعمل هذه الطريقة فى استخراج العامل المشترك الأعلى المركب فقط وليلاحظ أنه من الواجب عزل العوامل البسيطة المشتركة فى المقادير المفروضة ثم حفظ عاملها المشترك الأعلى إن كان لها عامل مشترك أعلى وضربه فى العامل المركب الذى يستخرج بالطريقة السابق شرحها

(مثال) ما العامل المشترك الأعلى للمقادير

٢٤ س^{٤} − ٢ س^{٣} − ٦٠ س^{٢} − ٣٢ س ، ١٨ س^{٤} − ٦ س^{٣} − ٣٩ س^{٢} − ١٨ س

لذلك نقول إن ٢٤ س^{٤} − ٢ س^{٣} − ٦٠ س^{٢} − ٣٢ س = ٢ س (١٢ س^{٣} − س^{٢} − ٣٠ س − ١٦)

وإن ١٨ س^{٤} − ٦ س^{٣} − ٣٩ س^{٢} − ١٨ س = ٣ س (٦ س^{٣} − ٢ س^{٢} − ١٣ س − ٦)

والعامل المشترك بين ٢ س ، ٣ س هو س

فنعزل العاملين البسيطين ٢ س ، ٣ س من المقدارين المعلومين ونحفظ العامل المشترك بينهما وهو س ونجرى باقى العمل كما فى بند ١٤١ على الوجه الآتى

	١٢ س^{٣} − س^{٢} − ٣٠ س − ١٦	٦ س^{٣} − ٢ س^{٢} − ١٣ س − ٦	٢
	١٢ س^{٣} − ٤ س^{٢} − ٢٦ س − ١٢	٦ س^{٣} − ٨ س^{٢} − ٨ س	
٢ س + ٢	٣ س^{٢} − ٤ س − ٤	٦ س^{٢} − ٥ س − ٦	
	٣ س^{٢} + ٢ س	٦ س^{٢} − ٨ س − ٨	
	− ٦ س − ٤	٣ س + ٢	س − ٢
	− ٦ س − ٤		

فالعامل المشترك الأعلى المراد استخراجه إذن

س (٣ س + ٢)

بند ١٤٣ — رأينا فى جميع الأمثلة المتقدمة أن طريقة استخراج القاسم المشترك الأعظم فى الحساب تنطبق تماما على المقادير الجبرية التى أوردناها ولكن قد يكون من الضرورى فى بعض الأحيان إدخال بعض التغييرات على الطريقة الحسابية وهذه التغييرات يمكن فهمها متى راعينا أن كل باق فى العملية يشمل العامل المراد استخراجه [راجع القاعدتين ١ ، ٢ من بند ١٤١]

(مثال ١) لايجاد العامل المشترك الأعلى للمقادير

٣ س^{٣} − ١٣ س^{٢} + ٢٣ س − ٢١ ، ٦ س^{٣} + س^{٢} − ٤٤ س + ٢١

نجرى العمل هكذا

٦ س^{٣} + س^{٢} − ٤٤ س + ٢١	٣ س^{٣} − ١٣ س^{٢} + ٢٣ س − ٢١	٢
٦ س^{٣} − ٢٦ س^{٢} + ٤٦ س − ٤٢		
٢٧ س^{٢} − ٩٠ س + ٦٣		

فاذا جعلنا $٢٧ س^{٢} - ٩٠ س + ٦٣$ مقسوما عليه نجد أن $٣ س^{٣} - ١٣ س^{٢} + ٢٣ س - ٢١$ لا يشتمل عليه مرات صحيحة ولكوننا نرى أنه يمكن كتابة $٢٧ س^{٢} - ٩٠ س + ٦٣$ هكذا $٩ (٣ س^{٢} - ١٠ س + ٧)$ ونعلم أن كل باق فى العملية يشتمل على العامل المشترك الأعلى المطلوب نستنتج من ذلك أن العامل المذكور يوجد فى المقدار $٩ (٣ س^{٢} - ١٠ س + ٧)$

وبما أن المقدارين الأصليين ليس لهما عامل بسيط مشترك فعاملهما المشترك الأعلى إذن لا يشتمل على عامل بسيط وعلى ذلك يمكننا إخراج العامل ٩ من المقسوم عليه والاستمرار فى العملية بأن نجعل $٣ س^{٢} - ١٠ س + ٧$ مقسوما عليه كما يلى

$٣ س^{٣} - ١٣ س^{٢} + ٢٣ س - ٢١$	$٣ س^{٢} - ١٠ س + ٧$	$س - ١$
$٣ س^{٣} - ١٠ س^{٢} + ٧ س$	$٣ س^{٢} - ٧ س$	
$- ٣ س^{٢} + ١٦ س - ٢١$	$- ٣ س + ٧$	
$- ٣ س^{٢} + ١٠ س - ٧$	$- ٣ س + ٧$	
٢ | $٦ س - ١٤$		
$٣ س - ٧$	$س - ١$	

فالعامل المشترك الأعلى إذن $٣ س - ٧$

وقد حذف العامل ٢ لنفس السبب الذى لأجله حذف العامل ٩ من قبل

(مثال ٢) لايجاد العامل المشترك الأعلى للقدارين

$٢ س^{٣} + س^{٢} - س - ٢$ ... ... (١)

و $٣ س^{٣} - ٢ س^{٢} + س - ٢$ ... ... (٢)

نقول إننا لو قسمنا أحد المقدارين على الآخر مباشرة لكان خارج القسمة كسرا ولازالة هذه العقبة نضرب أحد المقدارين فى عامل مناسب كما سبق أننا حذفنا عاملا فى المثال السابق لتسهيل عملية القسمة وجعلها كالمعتاد

ولكون المقدارين ليس لهما عامل بسيط مشترك فلا يتغير عاملهما المشترك الأعلى إذا ضربنا أحدهما فى أى عامل بسيط فنضرب (٢) فى ٢ ثم نجعل (١) مقسوما عليه هكذا

$٦ س^{٣} - ٤ س^{٢} + ٢ س - ٤$		$٢ س^{٣} + س^{٢} - س - ٢$	٣
$٦ س^{٣} + ٣ س^{٢} - ٣ س - ٦$		٧	
$- ٧ س^{٢} + ٥ س + ٢$	$- ٢ س$	$١٤ س^{٣} + ٧ س^{٢} - ٧ س - ١٤$	
١٧		$١٤ س^{٣} - ١٠ س^{٢} - ٤ س$	
$- ١١٩ س^{٢} + ٨٥ س + ٣٤$		$١٧ س^{٢} - ٣ س - ١٤$	$- ٧$
$- ١١٩ س^{٢} + ٢١ س + ٩٨$		$١٧ س^{٢} - ١٧ س$	
٦٤ | $٦٤ س - ٦٤$		$١٤ س - ١٤$	
$١٧ س + ١٤$ | $س - ١$		$١٤ س - ١٤$	

فالعامل المشترك الأعلى المطلوب إذن سـ − ١

أدخلنا العامل ٧ بعد اول عملية قسمة لأن − ٧ سـ^{٢} + ٥ سـ + ٢ الذى هو أول باق لا يقسم ٢ سـ^{٣} + سـ^{٢} − سـ − ٢ وقبل البدء فى عملية القسمة التالية ادخلنا العامل ١٧ للسبب السابق عينه ثم حذفنا العامل ٦٤ للسبب الذى أوضحناه فى المثال الأول

(ملاحظة) كان الأسهل فى المثال الاخير أن نوجد العامل المشترك الاعلى بترتيب المقدارين حسب القوى الصاعدة للحرف سـ وحينئذ لا نحتاج إلى إدخال عوامل رقمية أثناء العملية . وكان من المفيد هنا أيضا استعمال طريقة المكررات المنعزلة التى أوضحناها فى بند ٤٥ فانها قد تفيد فى اختصار العمل كثيرا

بند ١٤٤ — يظهر من المثالين الأخيرين أنه يمكننا ضرب أو قسمة المقدارين أو أى باق ينتج أثناء العمل فى أى عامل لا يقسم كلا من المقدارين الاصليين

بند ١٤٥ — إذا وضعنا المقدارين المذكورين فى المثال الثانى من بند ١٤٣ على الوجه الآتى

٢ سـ^{٣} + سـ^{٢} − سـ − ٢ = (سـ − ١) (٢ سـ^{٢} + ٣ سـ + ٢)

، ٣ سـ^{٣} − ٢ سـ^{٢} + سـ − ٢ = (سـ − ١) (٣ سـ^{٢} + سـ + ٢)

نرى أن عاملهما المشترك الاعلى سـ − ١ وإذن لا يوجد عامل مشترك جبرى للمقدارين ٢ سـ^{٢} + ٣ سـ + ٢ ، ٣ سـ^{٢} + سـ + ٢ ولكن إذا جعلنا سـ = ٦ نجد أن

٢ سـ^{٣} + سـ^{٢} − سـ − ٢ = ٤٦٠

، ٣ سـ^{٣} − ٢ سـ^{٢} + سـ − ٢ = ٥٨٠

والقاسم المشترك الاعظم للعددين ٤٦٠ ، ٥٨٠ هو ٢٠ مع أن سـ − ١ وهى العامل المشترك الاعلى الجبرى تساوى ٥ فقط ففى هذه الحالة نرى أن المقدارين الرقميين لكل من العامل المشترك الأعلى الجبرى والقاسم المشترك الأعظم الحسابى لا يتساويان ويمكن التعبير عن سبب هذا الاختلاف بما يأتى إذا كانت سـ = ٦ يصير المقدار

٢ سـ^{٢} + ٣ سـ + ٢ مساويا ٩٢ وكذا المقدار ٣ سـ^{٢} + سـ + ٢ مساويا ١١٦

ولهذين العددين قاسم مشترك حسابى وهو ٤ مع ان المقدارين ليس لهما عامل مشترك جبرى فيظهر أنه كثيرا ما يختلف القاسم المشترك الأعظم الحسابى والعامل المشترك الأعلى الجبرى إذا وضعت للحروف مقادير عددية مخصوصة فليس من الصواب إذن استعمال عبارة قاسم مشترك أعظم فى المقادير الجبرية

(تمارين ١٨ ب)

ما العامل المشترك الأعلى للمقادير الاتية

(١) سـ^{٣} + ٢ سـ^{٢} − ١٣ سـ + ١٠ ، سـ^{٣} + سـ^{٢} − ١٠ سـ + ٨

(٢) سـ^{٣} − ٥ سـ^{٢} − ٩٩ سـ + ٤٠ ، سـ^{٣} − ٦ سـ^{٢} − ٨٦ سـ + ٣٥

(٣) سـ^{٣} + ٢ سـ^{٢} − ٨ سـ − ١٦ ، سـ^{٣} + ٣ سـ^{٢} − ٨ سـ − ٢٤

(٤) سـ^{٣} + ٤ سـ^{٢} − ٥ سـ − ٢٠ ، سـ^{٣} + ٦ سـ^{٢} − ٥ سـ − ٣٠

(٥) سـ^{٣} − سـ^{٢} − ٥ سـ − ٣ ، سـ^{٣} − ٤ سـ^{٢} − ١١ سـ − ٦

(٦) سـ^{٣} + ٣ سـ^{٢} − ٨ سـ − ٢٤ ، سـ^{٣} + ٣ سـ^{٢} − ٣ سـ − ٩

(٧) ا^{٢} — ٥ ا^{٢} سـ + ١٧ ا سـ^{٢} — ٣ سـ^{٣} ، ا^{٣} — ١٣ ا سـ^{٢} + ٢ سـ^{٣}

(٨) سـ^{٤} — ٢ سـ^{٣} — ٤ سـ — ٧ ، سـ^{٤} + سـ^{٣} — ٣ سـ^{٢} — سـ + ٢

(٩) ٢ سـ^{٣} — ٥ سـ^{٢} + ١١ سـ + ٧ ، ٤ سـ^{٣} — ١١ سـ^{٢} + ٢٥ سـ + ٧

(١٠) ٢ سـ^{٣} + ٤ سـ^{٢} — ٧ سـ — ١٤ ، ٦ سـ^{٣} — ١٠ سـ^{٢} — ٢١ سـ + ٣٥

(١١) ٣ سـ^{٤} — ٣ سـ^{٣} — ٢ سـ^{٢} — سـ — ١ ، ٩ سـ^{٤} — ٣ سـ^{٣} — سـ — ١

(١٢) ٢ سـ^{٤} — ٢ سـ^{٣} + سـ + ٣ سـ — ٦ ، ٤ سـ^{٤} — ٢ سـ^{٣} + ٣ سـ — ٩

(١٣) ٣ سـ^{٣} — ٣ ا سـ^{٢} + ٢ ا^{٢} سـ — ٢ ا^{٣} ، ٣ سـ^{٣} + ١٢ ا سـ^{٢} + ٢ ا سـ + ٨ ا^{٣}

(١٤) ٢ سـ^{٣} — ٩ ا سـ^{٢} + ١٩ ا سـ — ٧ ا^{٣} ، ٤ سـ^{٣} — ٢٠ ا سـ^{٢} + ٢٠ ا^{٢} سـ — ١٦ ا^{٣}

(١٥) ١٠ سـ^{٣} + ٢٥ ا سـ^{٢} — ٥ ا^{٣} ، ٤ سـ^{٣} + ٩ ا سـ — ٢ ا^{٢} سـ — ا^{٣}

(١٦) ٦ ا^{٣} + ١٣ ا^{٢} سـ — ٩ ا سـ — ١٠ سـ^{٣} ، ٩ ا^{٣} + ١٢ ا^{٢} سـ — ١١ ا سـ^{٢} — ١٠ سـ^{٣}

(١٧) ٢٤ سـ^{٤} صـ + ٧٢ سـ^{٣} صـ^{٢} — ٦ سـ^{٢} صـ^{٣} — ٩٠ سـ صـ^{٤} .
، ٦ سـ^{٤} صـ^{٢} + ١٣ سـ^{٣} صـ^{٣} — ٤ سـ^{٢} صـ^{٤} — ١٥ سـ صـ^{٥}

(١٨) ٤ سـ^{٥} ا^{٢} + ١٠ سـ^{٤} ا^{٣} — ٦٠ سـ^{٣} ا^{٤} + ٥٤ سـ^{٢} ا^{٥} ، ٢٤ سـ^{٥} ا^{٢} + ٣٠ سـ^{٢} ا^{٥} — ١٣٦ سـ ا

(١٩) ٤ سـ^{٥} + ١٤ سـ^{٤} + ٢٠ سـ^{٣} + ٧٠ سـ^{٢} ، ٨ سـ^{٧} + ٢٨ سـ^{٦} — ٨ سـ^{٥}
— ١٢ سـ^{٤} + ٥٦ سـ^{٣}

(٢٠) ٧٢ سـ^{٣} — ١٢ ا سـ^{٢} + ٧٢ ا^{٢} سـ — ٤٢٠ ا^{٣} ، ١٨ سـ^{٣} + ٤٢ ا سـ^{٢}
— ٢٨٢ ا^{٢} سـ + ٢٧٠ ا^{٣}

(٢١) ٩ سـ^{٤} + ٢ سـ صـ^{٢} + صـ^{٤} ، ٣ سـ^{٤} — ٨ سـ^{٣} صـ + ٥ سـ^{٢} صـ^{٢} — ٢ سـ صـ^{٣}

(٢٢) سـ^{٥} — سـ^{٣} — سـ + ١ ، سـ^{٧} + سـ^{٦} + سـ^{٤} — ١

(٢٣) ١ + سـ + سـ^{٣} — سـ^{٥} ، ١ — سـ^{٤} — سـ^{٦} + سـ^{٧}

(٢٤) ٦ — ٨ ا — ٣٢ ا^{٢} — ١٨ ا^{٣} ، ٢٠ — ٣٥ ا — ٩٥ ا^{٢} — ٤٠ ا^{٣}

(٢٥) ٩ سـ^{٢} — ١٥ سـ^{٣} — ٤٥ سـ^{٤} — ١٢ سـ^{٥} ، ٤٢ سـ — ٤٩ سـ^{٢} — ٢٠٣ سـ^{٣} — ٨٤ سـ^{٤}

(٢٦) ٣ سـ^{٥} — ٥ سـ^{٣} + ٢ ، ٢ سـ^{٥} — ٥ سـ^{٢} + ٣

(٢٧) ٤ سـ^{٥} — ٦ سـ^{٣} — ٢٨ سـ ، ٦ سـ^{٤} + ١٠ سـ^{٣} — ١٧ سـ^{٢} — ٣٥ سـ — ١٤

بند ١٤٦ — يمكن إثبات صحة ما ورد فى بند ١٤١ كما يأتى :

(أولا) إذا كانت ں تقسم ا فلا بد أن تقسم م ا

البرهان : إفرض أن ا = اَ ں إذن م ا = م اَ ں وعليه يكون ں عاملا من عوامل م ا

(ثانيا) إذا كانت ں تقسم ا ، ب فلا بد ان تقسم م ا ± ه ب

البرهان : إفرض أن ا = اَ ں وكذا ب = بَ ں

إذن م ا ± ه ب = م اَ ں ± ه بَ ں

= ں (م اَ ± ه بَ)

∴ ں تقسم م ا ± ه ب

بند ١٤٧ — سنذكر الان قاعدة إيجاد العامل المشترك الاعلى لأى مقدارين جبريين مركبين وكذا برهانها

فنفرض أولا أننا عزلنا كل العوامل البسيطة (راجع المثال فى بند ١٤٢)

ونفرض أن ا ، ب المقداران الجبريان بعد عزل العوامل البسيطة منهما ونفرض أيضا أنهما مرتبان حسب القوى النازلة أو الصاعدة لحرف مشترك فيهما وأن أكبر قوة لذلك الحرف فى ب ليست أقل من أكبر قوة للحرف نفسه فى ا

فنقسم ب على ا ونفرض أن ط خارج القسمة ، حـ باقيها ونفرض أن حـ تشتمل على عامل بسيط م فاذا أخرج منه ذلك العامل ينتج مقسوم عليه جديد وليكن د ونفرض أنه لامكان قسمة ا على د يلزم ضرب ا فى عامل بسيط مثل ه وأن خارج القسمة الثانى ك والباقى ى ثم تقسم د على ى ونفرض أن ر الخارج وأنه لا باقى للقسمة فتكون ى العامل المشترك الأعلى المطلوب ويوضع العمل هكذا

	ب	ا	ط
	ط ا		
م	حـ		
ك	د	ه ا ك د	
	ر ى	ى	ر

(أولا) للبرهنة على أن ى عامل مشترك بين ا ، ب نقول

بالتأمل فى خطوات العملية يتضح أن ى تقسم د وحينئذ تقسم ك د وتقسم أيضا ك د + ى وإذن تقسم ه ا وعلى ذلك فهى تقسم ا لكون ه عاملا بسيطا

وأيضا بما أن ى تقسم د فهى تقسم م د أى حـ ولكون ى تقسم كلا من ا ، حـ فهى تقسم أيضا ط ا + حـ أى ب وعليه فان ى تقسم كلا من ا ، ب

(ثانيا) للبرهنة على أن ى العامل المشترك الأعلى نقول

إذا لم تكن كذلك نفرض أن س عامل آخر مشترك درجته أعلى من درجة ى

إذن س تقسم ا ، ب وهى لذلك تقسم ب — ط ا أى حـ وحينئذ تقسم د (لأن م عامل بسيط) وعلى ذلك تقسم ه ا — ك د أى ى وهذا مستحيل لأن س أعلى درجة من ى فرضا إذن ى العامل المشترك الأعلى

بند ١٤٨ — يمكن استخراج العامل المشترك الأعلى لثلاثة مقادير مثل ا ، ب ، حـ كما يأتى

(أولا) يستخرج العامل المشترك الأعلى للقدارين ا ، ب وليكن ن ثم يستخرج العامل المشترك الأعلى للقدارين ن ، حـ وليكن ع فيكون ع العامل المشترك الاعلى للقادير ا ، ب ، حـ

وذلك لأن ن تشتمل على كل عامل مشترك للقدارين ا ، ب ولكون ع العامل المشترك الأعلى للقدارين ن ، حـ فهى إذن العامل المشترك الأعلى للقادير ا ، ب ، حـ

الباب التاسع عشر – الكسور

بند ١٤٩ — بحثنا فى الباب الثانى عشر فى الكسور البسيطة متبعين فى بحثنا القواعد الحسابية وسنأتى فى هذا الباب على براهين تلك القواعد ونوضح إمكان تطبيقها على الكسور الجبرية

(تعريف) إذا قسمت كمية س إلى أجزاء متساوية عددها ب ثم اخذنا ا من تلك الأجزاء فالمأخوذ يسمى الكسر $\frac{ا}{ب}$ من س واذا كانت س الوحدة فالكسر $\frac{ا}{ب}$ من س يسمى الكسر $\frac{ا}{ب}$ بدون ذكر الوحدة فالكسر $\frac{ا}{ب}$ يدل إذن على أجزاء متساوية عددها ا لو أخذ منها عدد يساوى ب لكوّن الوحدة

(ملاحظة) يستدعى هذا التعريف أن يكون كل من ا ، ب عددا صحيحا موجبا ولكنا سنورد تعريفا آخر فى بند ١٥٥ يزول به هذا الشرط

بند ١٥٠ — للبرهان على أن $\frac{ا}{ب} = \frac{م ا}{م ب}$ اذا كان كل من ا ، ب ، م عددا صحيحا موجبا نقول

نعنى بالكسر $\frac{ا}{ب}$ أجزاء متساوية عددها ا لو أخذ منها عدد يساوى ب لكوّن الوحدة (١)

ونعنى « $\frac{م ا}{م ب}$ » » » » م ا » » » » م ب » » (٢)

ولكن ب من الاجزاء فى (١) = م ب من الاجزاء فى (٢)

∴ جزء واحد » فى (١) = م » فى (٢)

∴ ا » فى (١) = م ا » فى (٢)

أى أن $\frac{ا}{ب} = \frac{م ا}{م ب}$

وبالعكس $\frac{م ا}{م ب} = \frac{ا}{ب}$

وينتج من ذلك أن قيمة الكسر لاتتغير إذا ضرب أو قسم كل من بسطه ومقامه على مقدار واحد

اختزال الكسور

بند ١٥١ — يمكن تحويل الكسر الجبرى إلى كسر آخر مساوٍ له فى المقدار بقسمة كل من بسطه ومقامه على عامل مشترك

فاذا كان ذلك العامل هو العامل المشترك الأعلى يقال للكسر انه حوّل إلى أبسط صورة

(مثال ١) لاختزال الكسر $\frac{٢٤ ا^٣ حـ^٢ س^٢}{١٨ ا^٣ س^٢ - ١٢ ا^٢ س^٣}$

نقول إن الكسر $= \frac{٢٤ ا^٣ حـ^٢ س^٢}{٦ ا^٢ س^٢ (٣ ا - ٢ س)} = \frac{٤ ا حـ^٢}{٣ ا - ٢ س}$

(مثال ٢) لاختزال $\frac{٦ س^٢ - ٨ س ص}{٩ س ص - ١٢ ص^٢}$

نقول إن الكسر $= \frac{٢ س (٣ س - ٤ ص)}{٣ ص (٣ س - ٤ ص)} = \frac{٢ س}{٣ ص}$

(ملاحظة) على المبتدئ أن لايشرع فى حذف شىء من البسط والمقام قبل أن يضع كلا منهما فى الصورة الموافقة وذلك بتحليل كل منهما إلى عوامله متى اقتضى الحال ذلك

(تمارين ١٩ ا)

إختزل الكسور الآتية

(١) $\frac{٣ا^٢ - ٦ ا ب}{٢ ا^٢ ب - ٤ ا ب^٢}$

(٢) $\frac{ا ب س + ب س^٢}{ا ح س + ح س^٢}$

(٣) $\frac{ا س}{ا^٢ س^٢ - ا س}$

(٤) $\frac{١٥ ا^٢ ب^٢ ح}{١٠٠ (ا^٣ - ا^٢ ب)}$

(٥) $\frac{٤ س^٢ - ٩ ص^٢}{٤ س^٢ + ٦ س ص}$

(٦) $\frac{٢٠ (س^٣ - ص^٣)}{٥ س^٢ + ٥ س ص + ٥ ص^٢}$

(٧) $\frac{س (٢ ا^٢ - ٣ ا س)}{ا (٤ ا^٢ س - ٩ س^٣)}$

(٨) $\frac{س^٣ - ٢ س ص^٢}{س^٤ - ٤ س^٢ ص^٢ + ٤ ص^٤}$

(٩) $\frac{(س ص - ٣ ص^٢)^٢}{س^٣ ص^٢ - ٢٧ ص^٥}$

(١٠) $\frac{س^٢ - ٥ س}{س^٢ - ٤ س - ٥}$

(١١) $\frac{٣ س^٢ + ٦ س}{س^٢ + ٤ س + ٤}$

(١٢) $\frac{٥ ا^٣ ب + ١٠ ا^٢ ب^٢}{٣ ا^٢ ب^٢ + ٦ ا ب^٣}$

(١٣) $\frac{س^٢ ص + ٢ س^٢ ص + ٤ س ص}{س^٣ - ٨}$

(١٤) $\frac{٣ ا^٤ + ٩ ا^٣ ب + ٦ ا^٢ ب^٢}{ا^٤ + ا^٣ ب - ٢ ا^٢ ب^٢}$

(١٥) $\frac{س^٤ - ١٤ س^٢ - ٥١}{س^٤ - ٢ س^٢ - ١٥}$

(١٦) $\frac{س^٢ + س ص - ٢ ص^٢}{س^٣ - ص^٣}$

(١٧) $\frac{٢ س^٢ + ١٧ س + ٢١}{٣ س^٢ + ٢٦ س + ٣٥}$

(١٨) $\frac{ا^٢ س^٢ - ١٦ ا^٢}{ا س^٢ + ٩ ا س + ٢٠ ا}$

(١٩) $\frac{٣ س^٢ + ٢٣ س + ١٤}{٣ س^٢ + ٤١ س + ٢٦}$

(٢٠) $\frac{٢٧ ا + ا^٤}{١٨ ا - ٦ ا^٢ + ٢ ا^٣}$

بند **١٥٢** — إن لم تتيسر معرفة عوامل البسط والمقام بمجرد النظر إليها يقسم كل منهما على عاملهما المشترك الأعلى وهذا يستخرج بالطرق المبينة فى الباب الثامن عشر

(مثال) لاختزال $\frac{٣ س^٣ - ١٣ س^٢ + ٢٣ س - ٢١}{١٥ س^٣ - ٣٨ س^٢ - ٢ س + ٢١}$

(الطريقة الأولى) العامل المشترك الأعلى للبسط والمقام $٣ س - ٧$

وبقسمة كل من البسط والمقام على $٣ س - ٧$ نحصل على الخارجين $س^٢ - ٢ س + ٣$ ، $٥ س^٢ - س - ٣$

ويكون $\frac{٣ س^٣ - ١٣ س^٢ + ٢٣ س - ٢١}{١٥ س^٣ - ٣٨ س^٢ - ٢ س + ٢١} = \frac{(٣ س - ٧)(س^٢ - ٢ س + ٣)}{(٣ س - ٧)(٥ س^٢ - س - ٣)}$

$$= \frac{س^٢ - ٢ س + ٣}{٥ س^٢ - س - ٣}$$

هذه أبسط الطرق وأسهلها على المبتدئ ولكن فى هذه الحالة وما يماثلها من الأحوال يمكن اختزال الكسر بدون إجراء عملية استخراج العامل المشترك الأعلى

(الطريقة الثانية) على حسب ماجاء ببند ١٤١ يلزم أن يكون العامل المشترك الأعلى للبسط والمقام عاملا لمجموعهما وهو $(١٨ س^{٣} - ٥١ س^{٢} + ٢١ س)$ أى عاملا للقدار $٣ س (٣ س - ٧)(٢ س - ١)$ فان كان لهما عامل مشترك فلا بد أن يكون $٣ س - ٧$ وبترتيب كل من البسط والمقام بحيث يكون $٣ س - ٧$ عاملا فى كل منهما نجد أن

$$\text{الكسر} = \frac{س^{٢}(٣ س - ٧) - ٢ س (٣ س - ٧) + ٣(٣ س - ٧)}{٥ س^{٢}(٣ س - ٧) - س (٣ س - ٧) - ٣(٣ س - ٧)}$$

$$= \frac{(٣ س - ٧)(س^{٢} - ٢ س + ٣)}{(٣ س - ٧)(٥ س^{٢} - س - ٣)}$$

$$= \frac{س^{٢} - ٢ س + ٣}{٥ س^{٢} - س - ٣}$$

بند ١٥٣ — إذا أمكن تحليل كل من البسط والمقام إلى عوامله بسهولة يمكننا أن نتبع الطريقة الآتية

مثلا لاختزال $\frac{س^{٣} + ٣ س^{٢} - ٤ س}{٧ س^{٣} - ١٨ س^{٢} + ٦ س + ٥}$

نقول إن البسط $= س (س^{٢} + ٣ س - ٤) = س (س + ٤)(س - ١)$

ومن هذه العملية يرى أن $(س - ١)$ العامل الوحيد الذى يمكن أن يكون مشتركا

وبعد ترتيب المقام نجد أن الكسر $= \frac{س (س + ٤)(س - ١)}{٧ س^{٢}(س - ١) - ١١ س (س - ١) - ٥ (س - ١)}$

$$= \frac{س (س + ٤)(س - ١)}{(س - ١)(٧ س^{٢} - ١١ س - ٥)}$$

$$= \frac{س (س + ٤)}{٧ س^{٢} - ١١ س - ٥}$$

(تمارين ١٩ ب)

إختزل كلا من الكسور الآتية

(١) $\frac{ا^{٣} - ا^{٢} ب - ا ب^{٢} - ٢ ب^{٣}}{ا^{٣} + ٣ ا^{٢} ب + ٣ ا ب^{٢} + ٢ ب^{٣}}$

(٢) $\frac{س^{٣} - ٥ س^{٢} + ٧ س - ٣}{س^{٣} - ٣ س + ٢}$

(٣) $\frac{ا^{٣} + ٢ ا^{٢} - ١٣ ا + ١٠}{ا^{٣} + ا^{٢} - ١٠ ا + ٨}$

(٤) $\frac{٢ س^{٣} + ٥ س^{٢} ص - ٣٠ س ص^{٢} + ٢٧ ص^{٣}}{٤ س^{٣} + ٥ س ص^{٢} - ٢١ ص^{٣}}$

(٥) $\frac{ا^{٣} + ١٢ ا^{٢} ب - ا ب^{٢} - ١٥ ب^{٣}}{٦ ا^{٣} + ١٣ ا^{٢} ب - ٤ ا ب^{٢} - ١٥ ب^{٣}}$

(٦) $\frac{١ + ٢ س^{٢} + س^{٣} + ٢ س^{٤}}{١ + ٣ س^{٢} + ٢ س^{٣} + ٣ س^{٤}}$

(٧) $\frac{س^{٢} - ٢ س + ١}{٣ س^{٣} + ٧ س - ١٠}$

(٨) $\frac{٣ ا^{٣} - ٣ ا^{٢} ب + ا ب^{٢} - ب^{٣}}{٤ ا^{٢} - ٥ ا ب + ب^{٢}}$

(٩) $\frac{٤ س^{٣} + ٣ ا س^{٢} + ا^{٣}}{س^{٤} + ا س^{٣} + ا^{٣} س + ا^{٤}}$

(١٠) $\frac{٤ س^{٣} - ١٠ س^{٢} + ٤ س + ٢}{٣ س^{٤} - ٢ س^{٣} - ٣ س + ٢}$

(١١) $\frac{١٦ س^{٤} - ٧٢ س^{٢} ا^{٢} + ٨١ ا^{٤}}{٤ س^{٢} + ١٢ ا س + ٩ ا^{٢}}$

(١٢) $\frac{٦ س^{٣} + س^{٢} - ٥ س - ٢}{٦ س^{٣} + ٥ س^{٢} - ٣ س - ٢}$

(١٣) $\frac{٥ س^{٣} + ٢ س^{٢} - ١٥ س - ٦}{٧ س^{٣} - ٤ س^{٢} - ٢١ س + ١٢}$

(١٤) $\frac{٤ س^{٤} + ١١ س^{٢} + ٢٥}{٤ س^{٤} - ٩ س^{٢} + ٣٠ س - ٢٥}$

(١٥) $\frac{٣ س^{٣} - ٢٧ ا س^{٢} + ٧٨ ا^{٢} س - ٧٢ ا^{٣}}{٢ س^{٣} + ١٠ ا س^{٢} - ٤ ا^{٢} س - ٤٨ ا^{٣}}$

(١٦) $\frac{ا س^{٣} - ٥ ا^{٢} س^{٢} - ٩٩ ا^{٣} س + ٤٠ ا^{٤}}{س^{٤} - ٦ ا س^{٣} - ٨٦ ا^{٢} س^{٢} + ٣٥ ا^{٣} س}$

ضرب الكسور وقسمتها

بند ١٥٤ — (القاعدة الأولى) : لضرب كسر فى عدد صحيح يضرب البسط فى العدد الصحيح أو يقسم المقام عليه إذا قبل القسمة

البرهان : (أوّلا) معنى $\frac{ا}{ب}$ أننا أخذنا أجزاء متساوية عددها ا لو اخذ منها عدد يساوى ب لنتجت الوحدة

وتدل $\frac{اح}{ب}$ على اجزاء متساوية عددها ا ح لو أخذ منها عدد يساوى ب لنتجت الوحدة

ولكون عدد الأجزاء المأخوذة فى الكسر الثانى يساوى عدد الأجزاء المأخوذة فى الأول ح من المرّات

ينتج أن $\frac{ا}{ب} \times ح = \frac{اح}{ب}$

(ثانيا) $\frac{ا}{بء} \times ء = \frac{اء}{بء}$ حسب القاعدة السابقة

$= \frac{ا}{ب}$ [بند ١٥١]

١٥٥ — علمنا من البند السابق أن

$\frac{ا}{ب} \times ب = \frac{اب}{ب} = ا$

أى أن الكسر $\frac{ا}{ب}$ عبارة عن المقدار الذى يجب أن يضرب فى ب ليكون الناتج ا ولكن من بند ٤٦ نعلم أنه للحصول على ا بضرب ب فى مقدار آخر يجب أن يكون هذا المقدار خارج قسمة ا على ب ومن هنا يمكن أن نعرف الكسر بما يأتى

الكسر $\frac{ا}{ب}$ خارج قسمة ا على ب

بند ١٥٦ — (القاعدة الثانية) لقسمة كسر على عدد صحيح نقسم بسط الكسر على ذلك العدد إن قبل القسمة عليه وإلا فنضرب مقام الكسر فى العدد الصحيح

البرهان : (أوّلا) يدل الكسر $\frac{اح}{ب}$ على أجزاء متساوية عددها ا ح لو أخذ منها عدد يساوى ب لكوّن الوحدة

ويدل الكسر $\frac{ا}{ب}$ على أجزاء متساوية عددها ا لو أخذ منها عدد يساوى ب لكوّن الوحدة

ولكون عدد الأجزاء المأخوذة فى الكسر الأول يساوى عدد الأجزاء المأخوذة فى الثانى ح من المرّات

فالكسر الثانى إذن خارج قسمة الكسر الأوّل على ح أى أن $\frac{اح}{ب} \div ح = \frac{ا}{ب}$

(ثانيا) إذا كان البسط لا يقبل القسمة على ح نرى أن

$\frac{ا}{ب} = \frac{اح}{بح}$

$\therefore \quad \frac{ا}{ب} \div ح = \frac{اح}{بح} \div ح$

$= \frac{ا}{بح}$ كما تقدّم فى الحالة الأولى

بند ١٥٧ — (القاعدة الثالثة) : لضرب كسرين أو عدة كسور بعضها فى بعض تضرب جميع البسوط ويجعل حاصل الضرب بسطا ثم تضرب جميع المقامات ويجعل الحاصل مقاما

(مثال ذلك) ما مقدار $\frac{ا}{ب} \times \frac{ح}{ى}$

نفرض أن $س = \frac{ا}{ب} \times \frac{ح}{ى}$

وبضرب كل من الطرفين فى $ب \times ى$ يحدث أن

$$س \times ب \times ى = \frac{ا}{ب} \times \frac{ح}{ى} \times ب \times ى$$

$$= \frac{ا}{ب} \times ب \times \frac{ح}{ى} \times ى \quad \text{(بند ٢٩)}$$

$$= ا \times ح \quad \text{(بند ١٥٤)}$$

∴ $س \times ب ى = ا ح$

وبقسمة الطرفين على ب ى يحدث أن $س = \frac{ا ح}{ب ى}$

∴ $\frac{ا}{ب} \times \frac{ح}{ى} = \frac{ا ح}{ب ى}$

وكذلك $\frac{ا}{ب} \times \frac{ح}{ى} \times \frac{هـ}{و} = \frac{ا ح هـ}{ب ى و}$ وهكذا مهما بلغ عدد الكسور

بند ١٥٨ — (القاعدة الرابعة) لقسمة كسر على آخر نقلب المقسوم عليه ونضربه فى المقسوم

ولكون القسمة عكس الضرب يمكننا أن نعرف الخارج س الناتج من قسمة $\frac{ا}{ب}$ على $\frac{ح}{ى}$ بأنه المقدار الذى إذا ضرب فى $\frac{ح}{ى}$ ينتج $\frac{ا}{ب}$ أى أن $س \times \frac{ح}{ى} = \frac{ا}{ب}$

وبضرب الطرفين فى $\frac{ى}{ح}$ يحدث أن $س \times \frac{ح}{ى} \times \frac{ى}{ح} = \frac{ا}{ب} \times \frac{ى}{ح}$

∴ $س = \frac{ا ى}{ب ح}$

وإذن يكون $\frac{ا}{ب} \div \frac{ح}{ى} = \frac{ا ى}{ب ح} = \frac{ا}{ب} \times \frac{ى}{ح}$ (بند ١٥٧) وهو المطلوب

(مثال ١) لاختزال $\frac{٢ا^{٢} + ٣ا}{٤ا^{٣}} \times \frac{٤ا^{٢} - ٦ا}{١٢ا + ١٨}$

نقول إن $\frac{٢ا^{٢} + ٣ا}{٤ا^{٣}} \times \frac{٤ا^{٢} - ٦ا}{١٢ا + ١٨} = \frac{ا(٢ا + ٣)}{٤ا^{٣}} \times \frac{٢ا(٢ا - ٣)}{٦(٢ا + ٣)}$

$$= \frac{٢ا - ٣}{١٢ا}$$

وذلك بحذف العوامل المشتركة فى البسط والمقام

(مثال ٢) لاختصار $\frac{٦س^{٢} - اس - ٢ا^{٢}}{اس - ا^{٢}} \times \frac{س - ا}{٩س^{٢} - ٤ا^{٢}} \div \frac{٢س + ا}{٣اس + ٢ا^{٢}}$

نقول إن هـذا المقدار

$$= \frac{٦س^{٢} - اس - ٢ا^{٢}}{اس - ا^{٢}} \times \frac{س - ا}{٩س^{٢} - ٤ا^{٢}} \times \frac{٣اس + ٢ا^{٢}}{٢س + ا}$$

$$= \frac{(٣س - ٢ا)(٢س + ا)}{ا(س - ا)} \times \frac{س - ا}{(٣س + ٢ا)(٣س - ٢ا)} \times \frac{ا(٣س + ٢ا)}{٢س + ا} = ١$$

لأن جميع العوامل مشتركة فى البسط والمقام فيمحو بعضها بعضا

(تمارين ١٩ ح)

إختصر

(١) $\frac{١٤س^٢ - ٧س}{١٢س + ٢٤س^٢} \div \frac{٢س - ١}{س^٢ + ٢س}$

(٢) $\frac{أ^٢ب^٢ + ٣أب}{٤أ^٢ - ١} \div \frac{أب + ٣}{٢أ + ١}$

(٣) $\frac{س^٢ - ٤أ^٢}{أس + ٢أ^٢} \times \frac{٢أ}{س - ٢أ}$

(٤) $\frac{أ^٢ - ١٢١}{أ^٢ - ٤} \div \frac{أ + ١١}{أ + ٢}$

(٥) $\frac{١٦س^٢ - ٩أ^٢}{س^٢ - ٤} \times \frac{س - ٢}{٤س - ٣أ}$

(٦) $\frac{٢٥أ^٢ - ب^٢}{٩أ^٢س^٢ - ٤س^٢} \times \frac{س(٣أ + ٢)}{٥أ + ب}$

(٧) $\frac{س^٢ + ٥س + ٦}{س^٢ - ١} \times \frac{س^٢ - ٢س - ٣}{س^٢ - ٩}$

(٨) $\frac{س^٢ + ٣س + ٢}{س + ٩س + ٢٠} \times \frac{س^٢ + ٧س + ١٢}{س^٢ + ٥س + ٦}$

(٩) $\frac{٢س^٢ + ٥س + ٢}{س^٢ - ٤} \times \frac{س^٢ + ٤س}{٢س^٢ + ٩س + ٤}$

(١٠) $\frac{٢س^٢ + ١٣س + ١٥}{٤س^٢ - ٩} \div \frac{٢س^٢ + ١١س + ٥}{٤س^٢ - ١}$

(١١) $\frac{س^٢ - ١٤س - ١٥}{س^٢ - ٤س - ٤٥} \div \frac{س^٢ - ١٢س - ٤٥}{س^٢ - ٦س - ٢٧}$

(١٢) $\frac{٢س^٢ - س - ١}{٢س^٢ + ٥س + ٢} \times \frac{٤س^٢ + س - ١٤}{١٦س - ٤٩}$

(١٣) $\frac{ب^٤ - ٢٧ب}{٢ب^٢ + ٥ب} \times \frac{٤ب^٢ - ٢٥}{٢ب^٢ - ١١ب + ١٥}$

(١٤) $\frac{س^٣ - ٦س^٢ + ٣٦س}{س - ٤٩} \div \frac{س^٤ + ٢١٦س}{س^٢ - س - ٤٢}$

(١٥) $\frac{٦٤ط^٢ن^٢ - ع^٤}{س^٢ - ٤} \times \frac{(س - ٢)^٢}{٨طن + ع^٢} \div \frac{س^٢ - ٤}{(س + ٢)^٢}$

(١٦) $\frac{س^٢ - س - ٢٠}{س^٢ - ٢٥} \times \frac{س^٢ - س - ٢}{س^٢ + ٢س - ٨} \div \frac{س + ١}{س^٢ + ٥س}$

(١٧) $\frac{س^٢ - ١٨س + ٨٠}{س^٢ - ٥س - ٥٠} \times \frac{س^٢ - ٦س - ٧}{س^٢ - ١٥س + ٥٦} \times \frac{س + ٥}{س - ١}$

(١٨) $\frac{س^٢ - ٨س - ٩}{س^٢ - ١٧س + ٧٢} \times \frac{س^٢ - ٢٥}{س^٢ - ١} \div \frac{س^٢ + ٤س - ٥}{س^٢ - ٩س + ٨}$

(١٩) $\frac{٤س^٢ + س - ١٤}{٦سص - ١٤ص} \times \frac{٤س^٢}{س^٢ - ٤} \times \frac{س - ٢}{٤س - ٧} \div \frac{٢س^٢ + ٤س}{٣س^٢ - س - ١٤}$

(٢٠) $\frac{س^٢ + س - ٢}{س^٢ - س - ٢٠} \times \frac{س^٢ + ٥س + ٤}{س^٢ - س} \div \left(\frac{س^٢ + ٣س + ٢}{س^٢ - ٢س - ١٥} \times \frac{س + ٣}{س^٢}\right)$

(٢١) $\frac{٤س^٢ - ١٦س + ١٥}{٢س^٢ + ٣س + ١} \times \frac{س^٢ - ٦س - ٧}{٢س^٢ - ١٧س + ٢١} \times \frac{٤س^٢ - ١}{٤س^٢ - ٢٠س + ٢٥}$

(٢٢) $\frac{س^٤ - ٨س}{س^٢ - ٤س - ٥} \times \frac{س^٢ + ٢س + ١}{س^٣ - س^٢ - ٢س} \div \frac{س^٢ + ٢س + ٤}{س - ٥}$

(٢٣) $\frac{(أ + ب)^٢ - ح^٢}{أ^٢ + أب - أح} \times \frac{أ}{(أ + ح)^٢ - ب^٢} \times \frac{(أ - ب)^٢ - ح}{أب - ب^٢ - بح}$

(٢٤) $\frac{أ^٢ + ٢أب + ب^٢ - ح^٢}{أ^٢ - ب^٢ - ح^٢ - ٢بح} \times \frac{أ^٢ - ٢أح + ح^٢ - ب^٢}{ب^٢ - ٢بح + ح^٢ - أ^٢}$

(٢٥) $\frac{س^٢ - ٦٤}{س^٢ + ٢٤س + ١٢٨} \times \frac{س^٢ + ١٢س - ٦٤}{س^٣ - ٦٤} \div \frac{س^٢ - ١٦س + ٦٤}{س^٢ + ٤س + ١٦}$

(٢٦) $\frac{(ا^٢ + ا س)^٣}{ا^٢ - س^٢} \times \frac{(ا - س)^٢}{ا^٥ + ا^٢ س^٣} \times \frac{ا^٢ - ا س + س^٢}{ا^٣ + ٢ ا^٢ س + ا س^٢}$

(٢٧) $\frac{م^٣ + ٤ م^٢ ن + ٤ م ن^٢}{٣ م^٢ ن - ٥ م ن^٢ - ٢ ن^٣} \times \frac{م^٢ - ٤ ن^٢}{٩ م^٢ - ٣ م ن + ن^٢} \div \frac{(م + ٢ ن)^٣}{٢٧ م^٣ + ن^٣}$

(٢٨) $\frac{١ + ٨ س^٣}{(٢ - س)^٢} \times \frac{٤ س - س^٣}{١ - ٤ س^٢} \div \frac{(١ - ٢ س)^٢ + ٢ س}{٢ - ٥ س + ٢ س^٢}$

(٢٩) $\frac{س^٢ (س - ٤)^٢}{(س + ٤)^٢ - ٤ س} \times \frac{٦٤ - س^٣}{١٦ - س^٢} \div \frac{(س^٢ - ٤ س)^٣}{(س + ٤)^٢}$

(٣٠) $\frac{(ط + ن)^٢ - ر^٢}{(ط + ن + ر)^٢} \times \frac{ط^٢ + ط ن + ط ر}{(ط - ر)^٢ - ن^٢} \div \frac{ط^٢ - ط ن + ط ر}{(ط - ن)^٢ - ر^٢}$

(٣١) $\frac{ا^٤ - س^٤}{ا^٢ - ٢ ا س + س^٢} \div \left(\frac{ا^٢ س + س^٣}{ا^٣ - س^٣} \times \frac{ا^٤ + ا^٢ س^٢ + س^٤}{ا^٢ س - ا س^٢ + س^٣}\right)$

(٣٢) $\frac{ا^٣ + ٨ ا^٢ ب + ١٥ ا ب^٢}{(٦٤ ا^٣ - ب^٣)(ا^٣ + ب^٣)} \times \frac{١٦ ا^٤ - ١٧ ا^٢ ب^٢ + ب^٤}{٤ ا^٢ + ٢١ ا ب + ٥ ب^٢} \div \frac{ا^٢ + ٢ ا ب - ٣ ب^٢}{ا^٣ - ا^٢ ب + ا ب^٢}$

الباب العشرون ـ المضاعف المشترك البسيط

بند ١٥٩ — (تعريف) المضاعف المشترك البسيط لمقدارين جبريين أو أكثر هو المقدار الأقل درجة الذى يقبل القسمة على المقدارين أو المقادير قسمة صحيحة

قد أوضحنا فى الباب الحادى عشر كيفية معرفة المضاعف المشترك البسيط للمقادير البسيطة بمجرد النظر اليها وقد يمكن اتباع مثل هذه الطريقة فى إيجاد المضاعف المشترك البسيط للمقادير المركبة إذا كانت موضوعة على صورة حاصل ضرب عدة عوامل بعضها فى بعض أو كان من السهل تحليلها إلى عواملها

(مثال ١) المضاعف المشترك البسيط للمقادير $٦ س^٢ (ا - س)^٢$ ، $٨ ا^٣ (ا - س)^٣$ ، $١٢ ا س (ا - س)^٥$ هو $٢٤ ا^٣ س^٢ (ا - س)^٥$ لأنه مكوّن من حاصل ضرب الكميتين الآتيتين إحداهما فى الأخرى

(أولا) المضاعف البسيط للعاملات الرقمية

(ثانيا) أصغر قوة لكل عامل قابلة للقسمة على جميع قوى هذا العامل الموجودة فى المقادير المعلومة

(مثال ٢) ما المضاعف المشترك البسيط للمقادير

$$٣ ا^٢ + ٩ ا ب \text{ ، } ٢ ا^٣ - ١٨ ا ب^٢ \text{ ، } ا^٣ + ٦ ا^٢ ب + ٩ ا ب^٢$$

نقول إن $٣ ا^٢ + ٩ ا ب = ٣ ا (ا + ٣ ب)$

وإن $٢ ا^٣ - ١٨ ا ب^٢ = ٢ ا (ا + ٣ ب)(ا - ٣ ب)$

وإن $ا^٣ + ٦ ا^٢ ب + ٩ ا ب^٢ = ا (ا + ٣ ب)(ا + ٣ ب)$

$$= ا (ا + ٣ ب)^٢$$

فالمضاعف المشترك البسيط المطلوب

$$٦ ا (ا + ٣ ب)^٢ (ا - ٣ ب)$$

(تمارين ١٢٠)

أوجد المضاعف المشترك البسيط لكل من المقادير الآنية

(١) س ، $س^{٢}$ + س

(٢) $س^{٢}$ ، $س^{٢}$ − ٣ س

(٣) ٣ $س^{٢}$ ، ٤ $س^{٢}$ + ٨ س

(٤) ٢١ $س^{٣}$ ، ٧ $س^{٢}$(س + ١)

(٥) $س^{٢}$ − ١ ، $س^{٢}$ + س

(٦) $ا^{٢}$ + ا ب ، ا ب + $ب^{٢}$

(٧) ٤ $س^{٢}$ ص − ص ، ٢ $س^{٢}$ + س

(٨) ٦ $س^{٢}$ − ٢ س ، ٩ $س^{٢}$ − ٣ س

(٩) $س^{٢}$ + ٢ س ، $س^{٢}$ + ٣ س + ٢

(١٠) $س^{٢}$ − ٣ س + ٢ ، $س^{٢}$ − ١

(١١) $س^{٢}$ + ٤ س + ٤ ، $س^{٢}$ + ٥ س + ٦

(١٢) $س^{٢}$ − ٥ س + ٤ ، $س^{٢}$ − ٦ س + ٨

(١٣) $س^{٢}$ − س − ٦ ، $س^{٢}$ + س − ٢ ، $س^{٢}$ − ٤ س + ٣

(١٤) $س^{٢}$ + س − ٢٠ ، $س^{٢}$ − ١٠ س + ٢٤ ، $س^{٢}$ − س − ٣٠

(١٥) $س^{٢}$ + س − ٤٢ ، $س^{٢}$ − ١١ س + ٣٠ ، $س^{٢}$ + ٢ س − ٣٥

(١٦) ٢ $س^{٢}$ + ٣ س + ١ ، ٢ $س^{٢}$ + ٥ س + ٢ ، $س^{٢}$ + ٣ س + ٢

(١٧) ٣ $س^{٢}$ + ١١ س + ٦ ، ٣ $س^{٢}$ + ٨ س + ٤ ، $س^{٢}$ + ٥ س + ٦

(١٨) ٥ $س^{٢}$ + ١١ س + ٢ ، ٥ $س^{٢}$ + ١٦ س + ٣ ، $س^{٢}$ + ٥ س + ٦

(١٩) ٢ $س^{٢}$ + ٣ س − ٢ ، ٢ $س^{٢}$ + ١٥ س − ٨ ، $س^{٢}$ + ١٠ س + ١٦

(٢٠) ٣ $س^{٢}$ − س − ١٤ ، ٣ $س^{٢}$ − ١٣ س + ١٤ ، $س^{٢}$ − ٤

(٢١) ١٢ $س^{٢}$ + ٣ س − ٤٢ ، ١٢ $س^{٣}$ + ٣٠ $س^{٢}$ + ١٢ س ، ٣٢ $س^{٢}$ − ٤٠ س − ٢٨

(٢٢) ٣ $س^{٤}$ + ٢٦ $س^{٣}$ + ٣٥ $س^{٢}$ ، ٦ $س^{٢}$ + ٣٨ س − ٢٨ ، ٢٧ $س^{٣}$ + ٢٧ $س^{٢}$ − ٣٠ س

(٢٣) ٦٠ $س^{٤}$ + ٥ $س^{٣}$ − ٥ $س^{٢}$ ، ٦٠ $س^{٢}$ ص + ٣٢ س ص + ٤ ص ، ٤٠ $س^{٣}$ ص
− ٢ $س^{٢}$ ص − ٢ س ص

(٢٤) ٨ $س^{٢}$ − ٣٨ س ص + ٣٥ $ص^{٢}$ ، ٤ $س^{٢}$ − س ص − ٥ $ص^{٢}$ ، ٢ $س^{٢}$
− ٥ س ص − ٧ $ص^{٢}$

(٢٥) ١٢ $س^{٢}$ − ٢٣ س ص + ١٠ $ص^{٢}$ ، ٤ $س^{٢}$ − ٩ س ص + ٥ $ص^{٢}$ ، ٣ $س^{٢}$
− ٥ س ص + ٢ $ص^{٢}$

(٢٦) ٦ ا $س^{٣}$ + ٧ $ا^{٢}$ $س^{٢}$ − ٣ $ا^{٣}$ س ، ٣ $ا^{٢}$ $س^{٢}$ + ١٤ $ا^{٣}$ س − ٥ $ا^{٤}$ ، ٦ $س^{٢}$
+ ٣٩ ا س + ٤٥ $ا^{٢}$

(٢٧) ٤ ا $س^{٢}$ $ص^{٢}$ + ١١ ا س $ص^{٢}$ − ٣ ا $ص^{٢}$ ، ٣ $س^{٣}$ $ص^{٣}$ + ٧ $س^{٢}$ $ص^{٣}$
− ٦ س $ص^{٣}$ ، ٢٤ ا $س^{٢}$ − ٢٢ ا س + ٤ ا

(٢٨) $(٣ س − ٥ س^{٢})^{٢}$ ، ٦ − ٧ س − ٥ $س^{٢}$ ، ٤ س + ٤ $س^{٢}$ + $س^{٣}$

(٢٩) ١٤ $ا^{٤}$ ($ا^{٣}$ − $ب^{٣}$) ، ٢١ $ا^{٢}$ $ب^{٢}$ $(ا − ب)^{٣}$ ، ٦ $ا^{٣}$ ب (ا − ب)($ا^{٢}$ − $ب^{٢}$)

(٣٠) $م^{٤}$ + $م^{٢}$ $ن^{٢}$ + $ن^{٤}$ ، $م^{٣}$ ن + $ن^{٤}$ ، $(م^{٢} − م ن)^{٣}$

(٣١) $(٢ ح − ٣ ح ء)^{٢}$ ، $(٤ ح − ٦ ء)^{٣}$ ، ٨ $ح^{٣}$ − ٢٧ $ء^{٣}$

بند ١٦٠ — إذا لم يمكن تحليل المقادير إلى عواملها بمجرد النظر إليها تحلل بواسطة إيجاد عاملها المشترك الأعلى

(مثال) لايجاد المضاعف المشترك البسيط للمقدارين

$$٢ س^{٤} + س^{٣} - ٢٠ س^{٢} - ٧ س + ٢٤$$

$$،\quad ٢ س^{٤} + ٣ س^{٣} - ١٣ س^{٢} - ٧ س + ١٥$$

نقول إن العامل المشترك الأعلى لها $س^{٢} + ٢ س - ٣$ وبقسمة كل من المقدارين عليه يحدث أن

$$٢ س^{٤} + س^{٣} - ٢٠ س^{٢} - ٧ س + ٢٤ = (س^{٢} + ٢ س - ٣)\,(٢ س^{٢} - ٣ س - ٨)$$

$$،\quad ٢ س^{٤} + ٣ س^{٣} - ١٣ س^{٢} - ٧ س + ١٥ = (س^{٢} + ٢ س - ٣)\,(٢ س^{٢} - س - ٥)$$

فالمضاعف المطلوب إذن

$$(س^{٢} + ٢ س - ٣)\,(٢ س^{٢} - ٣ س - ٨)\,(٢ س^{٢} - س - ٥)$$

بند ١٦١ — للبرهنة على قاعدة استخراج المضاعف المشترك البسيط لمقدارين جبريين مركبين نقول

لنفرض أن المقدارين ا ، ب وعاملهما المشترك الأعلى هـ وأن اَ ، بَ خارجا قسمة ا على هـ ، ب على هـ على الترتيب فعلى ذلك ا = اَ هـ ، ب = بَ هـ

وبما أن اَ ، بَ ليس لهما عامل مشترك فمن الواضح أن المضاعف المشترك البسيط للمقدارين ا ، ب هو اَ بَ

بند ١٦٢ — بين العامل المشترك الأعلى لمقدارين جبريين ومضاعفهما المشترك البسيط ارتباط مهم يلزم الالتفات اليه

نفرض أن هـ العامل المشترك الأعلى للمقدارين ا ، ب ، أن س مضاعفهما المشترك البسيط فبناء على ما جاء بالبند المتقدّم نرى أن

ا = اَ هـ ، ب = بَ هـ

، س = اَ بَ هـ

إذن حاصل الضرب ا ب = اَ هـ × بَ هـ

= هـ × اَ بَ هـ

= هـ س .... (١)

فيكون حاصل ضرب أى مقدارين جبريين يساوى حاصل ضرب عاملها المشترك الأعلى فى مضاعفهما المشترك البسيط

ويتنتج أيضا من (١) أن $س = \frac{ا ب}{هـ} = \frac{ا}{هـ} \times ب = \frac{ب}{هـ} \times ا$

أى أنه يمكن إيجاد المضاعف المشترك البسيط لمقدارين بقسمة حاصل ضربهما على عاملهما المشترك الاعلى أو بقسمة أحدهما على عاملهما المشترك الأعلى وضرب خارج القسمة فى المقدار الآخر

بند ١٦٣ — يمكن استخراج المضاعف المشترك البسيط لثلاثة مقادير مثل ا ، ب ، ح كما يأتى
(أولا) يستخرج المضاعف المشترك البسيط للقدارين ا ، ب وليكن س ثم المضاعف المشترك البسيط للقدارين س ، ح وليكن ى فيكون ى المضاعف المشترك البسيط المطلوب

البرهان : لكون ى المقدار الأصغر درجة القابل للقسمة على كل من الكميتين س ، ح والكمية س المقدار الأصغر درجة القابل للقسمة على ا ، ب يكون ى المقدار الأصغر درجة القابل للقسمة على ا ، ب ، ح

(تمارين ٢٠ ب)

(١) أوجد العامل المشترك الأعلى والمضاعف المشترك البسيط للمقادير
س^{٢} — ٥ س + ٦ ، س^{٢} — ٤ ، س^{٣} — ٣ س — ٢

(٢) أوجد المضاعف المشترك البسيط للمقدارين
ا ب (س^{٢} + ١) + س (ا^{٢} + ب^{٢}) ، ا ب (س^{٢} — ١) + س (ا^{٢} — ب^{٢})

(٣) أوجد المضاعف المشترك البسيط للمقادير
س ص — ب س ، س ص — ا ص ، ص^{٢} — ٣ ب ص + ٢ ب^{٢}
، س ص — ٢ ب س — ا ص + ٢ ا ب ، س ص — ب س — ا ص + ا ب

(٤) أوجد العامل المشترك الأعلى والمضاعف المشترك البسيط للمقدارين
س^{٣} + ٢ س^{٢} — ٣ س ، ٢ س^{٣} + ٥ س^{٢} — ٣ س

(٥) أوجد المضاعف المشترك البسيط للمقادير
١ — س ، (١ — س^{٢})^{٢} ، (١ + س)^{٣}

(٦) أوجد المضاعف المشترك البسيط للمقادير
س^{٢} — ١٠ س + ٢٤ ، س^{٢} — ٨ س + ١٢ ، س^{٢} — ٦ س + ٨

(٧) أوجد المضاعف المشترك البسيط والعامل المشترك الأعلى للمقدارين
٦ س^{٣} + س^{٢} — ٥ س — ٢ ، ٦ س^{٣} + ٥ س^{٢} — ٣ س — ٢

(٨) أوجد المضاعف المشترك البسيط للمقادير
(ب ح^{٢} — ا ب ح)^{٢} ، ب^{٢} (ا ح^{٢} — ا^{٣}) ، ا^{٢} ح^{٢} + ٢ ا ح^{٣} + ح^{٤}

(٩) أوجد المضاعف المشترك البسيط للمقادير
س^{٣} — ص^{٣} ، س^{٣} ص — ص^{٤} ، ص^{٢} (س — ص)^{٢} ، س^{٢} + س ص + ص^{٢}
وأوجد أيضا العامل المشترك الأعلى للمقادير الثلاثة الأولى

(١٠) أوجد العامل المشترك الأعلى للمقادير
٦ س^{٢} — ١٣ س + ٦ ، ٢ س^{٢} + ٥ س — ١٢ ، ٦ س^{٢} — س — ١٢
ثم بيّن أيضا أن المضاعف المشترك البسيط لهذه المقادير هو خارج قسمة حاصل ضرب الثلاثة المقادير على مربع عاملها المشترك الأعلى

(١١) أوجد المضاعف المشترك البسيط للقدارين

$س^{٤} + ا س^{٣} + ا^{٣} س + ا^{٤}$ ، $س^{٤} + ا^{٢} س^{٢} + ا^{٤}$

(١٢) أوجد المضاعف المشترك البسيط والعامل المشترك الأعلى للقادير

$٣ س^{٣} - ٧ س^{٢} ص + ٥ س ص^{٢} - ص^{٣}$ ، $س^{٢} ص + ٣ س ص^{٢} - ٣ س^{٣} - ص^{٣}$

، $٣ س^{٣} + ٥ س^{٢} ص + س ص^{٢} - ص^{٣}$

(١٣) أوجد العامل المشترك الأعلى للقدارين

$٤ س^{٣} - ١٠ س^{٢} + ٤ س + ٢$ ، $٣ س^{٤} - ٢ س^{٣} - ٣ س + ٢$

(١٤) ما المضاعف المشترك البسيط للقادير

$ا^{٢} - ب^{٢}$ ، $ا^{٣} - ب^{٣}$ ، $ا^{٣} - ا^{٢} ب - ا ب^{٢} - ٢ ب^{٣}$

(١٥) أوجد العامل المشترك الأعلى والمضاعف المشترك البسيط للقدارين

$(٢ س^{٢} - ٣ ا^{٢}) ص + (٢ ا^{٢} - ٣ ص^{٢}) س$

، $(٢ ا^{٢} + ٣ ص^{٢}) س + (٢ س^{٢} + ٣ ا^{٢}) ص$

(١٦) أوجد العامل المشترك الأعلى والمضاعف المشترك البسيط للقدارين

$س^{٣} - ٩ س^{٢} + ٢٦ س - ٢٤$ ، $س^{٣} - ١٢ س^{٢} + ٤٧ س - ٦٠$

(١٧) أوجد العامل المشترك الأعلى للقدارين

$س^{٣} - ١٥ ا س^{٢} + ٤٨ ا^{٢} س + ٦٤ ا^{٣}$ ، $س^{٢} - ١٠ ا س + ١٦ ا^{٢}$

(١٨) أوجد المضاعف المشترك البسيط للقادير

$٢١ س (س ص - ص^{٢})^{٢}$ ، $٣٥ (س^{٤} ص^{٢} - س ص^{٤})$ ، $١٥ ص (س^{٢} + س ص)^{٢}$

الباب الحادى والعشرون — جمع الكسور وطرحها

بند ١٦٤ — أوضحنا كيفية استخراج المضاعف المشترك البسيط لأى مقادير جبرية معلومة وسنبحث الان فى كيفية جمع الكسور وطرحها

بند ١٦٥ — للبرهنة على أن $\frac{ا}{ب} + \frac{ح}{د} = \frac{ا د + ب ح}{ب د}$

نقول : معلوم أن $\frac{ا}{ب} = \frac{ا د}{ب د}$

وأن $\frac{ح}{د} = \frac{ب ح}{ب د}$ [بند ١٥٠]

ففى كل من الحالتين نقسم الوحدة إلى أجزاء متساوية عددها $ب د$ ونأخذ منها أجزاء عددها $ا د$ ثم أجزاء عددها $ب ح$ أى أننا نأخذ أجزاء عددها $ا د + ب ح$ من الأجزاء المتساوية التى عددها $ب د$ والمنقسمة اليها الوحدة وهذا مايعبر عنه بالكسر $\frac{ا د + ب ح}{ب د}$

$\therefore$ $\frac{ا}{ب} + \frac{ح}{د} = \frac{ا د + ب ح}{ب د}$

وكذلك $\frac{ا}{ب} - \frac{ح}{د} = \frac{ا د - ب ح}{ب د}$

بند ١٦٦ — جعلنا فى المثال السابق ب ى مقاما مشتركا لكل من الكسرين ولكن إذا كان للمقدارين ب ، ى عامل مشترك لايكون ب ى المضاعف المشترك البسيط لهما وإذن لا يكون الكسر $\frac{\text{ا ى + ب ح}}{\text{ب ى}}$ فى أبسط صورة . ولأجل أن نتجنب استعمال كسور ليست فى أبسط صورها نجد أنه من الضرورى أن ندخل بعض التغيير على ماتقدّم وقد يستحسن أخذ أبسط مقام مشترك وهو عبارة عن المضاعف المشترك البسيط لمقامات الكسور المعلومة

(قاعدة ١) لتحويل الكسور إلى كسور مساوية لها فى القيمة بأبسط مقام مشترك نبحث عن المضاعف المشترك البسيط للمقامات ونجعله مقاما مشتركا ثم نقسمه على مقام الكسر الأول ونضرب الخارج فى بسط ذلك الكسر وهكذا فى بقية الكسور

(مثال) لتجنيس الكسرين الآتيين

$$\frac{\text{٥ س}}{\text{٢ ا (س − ا)}} \text{ ، } \frac{\text{٤ ا}}{\text{٣ س (س}^{٢}\text{ − ا}^{٢}\text{)}}$$

نقول إن المقام المشترك البسيط ٦ ا س (س − ا) (س + ا) فنضرب إذن بسط الكسر الأول فى ٣ س (س + ا) ونضرب بسط الثانى فى ٢ ا فيصير الكسران

$$\frac{\text{١٥ س}^{٢}\text{ (س + ا)}}{\text{٦ ا س (س − ا) (س + ا)}} \text{ ، } \frac{\text{٨ ا}^{٢}}{\text{٦ ا س (س − ا) (س + ا)}}$$

بند ١٦٧ — نذكر الآن قاعدة جمع الكسور أو طرحها

(قاعدة ٢) لجمع الكسور أو طرحها تحول إلى كسور مساوية لها فى القيمة بأبسط مقام مشترك ويستخرج حاصل الجمع الجبرى للبسوط ويقسم على المقام المشترك

(مثال ١) ماقيمة $\frac{\text{٢ س + ا}}{\text{٣ ا}} + \frac{\text{٥ س − ٤ ا}}{\text{٩ ا}}$

نقول إن أبسط مقام مشترك ٩ ا

$$\text{فالمقدار} = \frac{\text{٣ (٢ س + ا) + ٥ س − ٤ ا}}{\text{٩ ا}}$$

$$= \frac{\text{٦ س + ٣ ا + ٥ س − ٤ ا}}{\text{٩ ا}} = \frac{\text{١١ س − ا}}{\text{٩ ا}}$$

(مثال ٢) ما مقدار $\frac{\text{س − ٢ ص}}{\text{س ص}} + \frac{\text{٣ ص − ا}}{\text{ا ص}} - \frac{\text{٣ س − ٢ ا}}{\text{ا س}}$

نقول إن أبسط مقام مشترك ا س ص

$$\text{فالمقدار} = \frac{\text{ا (س − ٢ ص) + س (٣ ص − ا) − ص (٣ س − ٢ ا)}}{\text{ا س ص}}$$

$$= \frac{\text{ا س − ٢ ا ص + ٣ س ص − ا س − ٣ س ص + ٢ ا ص}}{\text{ا س ص}}$$

= صفرا لأن حدود البسط يمحو بعضها بعضا

(ملاحظة) يحسن بالمبتدئ أن يستعمل الأقواس كما فى السطر الأول فى حل المثال الأخير لأن ذلك يضمن صحة العمل

(تمارين ١٢١ ا)

أوجد قيمة كل من المقادير الآتية

(١) $\frac{\text{س}-١}{٢}+\frac{\text{س}+٣}{٥}+\frac{\text{س}+٧}{١٠}$

(٢) $\frac{٢\text{س}-١}{٣}+\frac{\text{س}-٥}{٦}+\frac{\text{س}-٤}{٤}$

(٣) $\frac{٥\text{س}-١}{٨}-\frac{٣\text{س}-٢}{٧}+\frac{\text{س}-٥}{٤}$

(٤) $\frac{٢\text{س}-٣}{٩}-\frac{\text{س}+٢}{٦}+\frac{٥\text{س}+٨}{١٢}$

(٥) $\frac{\text{س}-٧}{١٥}+\frac{\text{س}-٩}{٢٥}-\frac{\text{س}+٣}{٤٥}$

(٦) $\frac{٢\text{س}+٥}{\text{س}}-\frac{\text{س}+٣}{٢\text{س}}-\frac{٢٧}{٨\text{س}^٢}$

(٧) $\frac{\text{ا}-\text{ب}}{\text{ا}\text{ب}}+\frac{\text{ب}-\text{ح}}{\text{ب}\text{ح}}+\frac{\text{ح}-\text{ا}}{\text{ح}\text{ا}}$

(٨) $\frac{\text{ا}-٢\text{ب}}{٢\text{ا}}-\frac{\text{ا}-٥\text{ب}}{٤\text{ا}}+\frac{\text{ا}+٧\text{ب}}{٨\text{ا}}$

(٩) $\frac{\text{ب}+\text{ح}}{٢\text{ا}}+\frac{\text{ح}+}{٤\text{ب}}-\frac{\text{ا}-\text{ب}}{٣\text{ح}}$

(١٠) $\frac{\text{ا}-\text{س}}{\text{س}}+\frac{\text{ا}+\text{س}}{\text{ا}}-\frac{\text{ا}^٢-\text{س}^٢}{٢\text{ا}\text{س}}$

(١١) $\frac{\text{س}+٢}{١٧\text{س}}-\frac{\text{س}-٥}{٣٤\text{س}}+\frac{\text{س}+٢}{٥١\text{س}}$

(١٢) $\frac{٢\text{ا}^٢-\text{ب}^٢}{\text{ا}^٢}-\frac{\text{ب}-\text{ح}}{\text{ب}^٢}-\frac{\text{ح}-\text{ا}^٢}{\text{ح}^٢}$

(١٣) $\frac{\text{س}-٣}{٥\text{س}}+\frac{\text{س}^٢-٩}{١٠\text{س}^٢}-\frac{٨-\text{س}^٣}{١٥\text{س}^٣}$

(١٤) $\frac{٢}{\text{س}\,\text{ص}}-\frac{٣\text{ص}-\text{س}^٢}{\text{س}\,\text{ص}^٢}+\frac{\text{س}\,\text{ص}+\text{ص}}{\text{س}^٢\text{ص}^٢}$

(١٥) $\frac{٢\text{س}-٣\text{ص}}{\text{س}\,\text{ص}}+\frac{٣\text{س}-٢\text{ع}}{\text{س}\,\text{ع}}+\frac{٥}{\text{س}}$

(١٦) $\frac{\text{ا}^٢-\text{ب}\text{ح}}{\text{ب}\text{ح}}-\frac{\text{ا}\text{ح}-\text{ب}^٢}{\text{ا}\text{ح}}-\frac{\text{ا}\text{ب}-\text{ح}^٢}{\text{ا}\text{ب}}$

(مثال ٣) إختصر $\frac{٢\text{س}-٣\text{ا}}{\text{س}-٢\text{ا}}-\frac{٢\text{س}-\text{ا}}{\text{س}-\text{ا}}$

لذلك نقول إن أبسط مقام مشترك $(\text{س}-٢\text{ا})\,(\text{س}-\text{ا})$

فنضرب البسط الاول فى $(\text{س}-\text{ا})$

والثانى فى $(\text{س}-٢\text{ا})$

فينتج أن المقدار

$$=\frac{(٢\text{س}-٣\text{ا})\,(\text{س}-\text{ا})-(٢\text{س}-\text{ا})\,(\text{س}-٢\text{ا})}{(\text{س}-٢\text{ا})\,(\text{س}-\text{ا})}$$

$$=\frac{٢\text{س}^٢-٥\text{ا}\text{س}+٣\text{ا}^٢-(٢\text{س}^٢-٥\text{ا}\text{س}+٢\text{ا}^٢)}{(\text{س}-٢\text{ا})\,(\text{س}-\text{ا})}$$

$$=\frac{٢\text{س}^٢-٥\text{ا}\text{س}+٣\text{ا}^٢-٢\text{س}^٢+٥\text{ا}\text{س}-٢\text{ا}^٢}{(\text{س}-٢\text{ا})\,(\text{س}-\text{ا})}$$

$$=\frac{\text{ا}^٢}{(\text{س}-٢\text{ا})\,(\text{س}-\text{ا})}$$

(ملاحظة) يحسن بالمبتدئ عند إيجاد قيمة مقدار مثل $-(٢\text{س}-\text{ا})\,(\text{س}-٢\text{ا})$ أن يضع الحاصل أوّلا بين قوسين ثم يزيلهما كما فعلنا فى الأمثلة المتقدّمة ولكن بعد قليل من التمرن يمكنه إجراء هذين العملين فى آن واحد وقد يسهل العمل فى بعض الأحيان باختزال الكسور قبل الشروع فى ذلك

(مثال ٤) لاختصار $\frac{\text{س}^٢+٥\text{س}\,\text{ص}-٤\text{ص}^٢}{\text{س}^٢-١٦\text{ص}^٢}-\frac{٢\text{س}\,\text{ص}}{٢\text{س}^٢+٨\text{س}\,\text{ص}}$

نقول إن هذا المقدار $=\frac{\text{س}^٢+٥\text{س}\,\text{ص}-٤\text{ص}^٢}{\text{س}^٢-١٦\text{ص}^٢}-\frac{\text{ص}}{\text{س}+٤\text{ص}}$

$$=\frac{\text{س}^٢+٥\text{س}\,\text{ص}-٤\text{ص}^٢-\text{ص}\,(\text{س}-٤\text{ص})}{\text{س}^٢-١٦\text{ص}^٢}$$

$$=\frac{\text{س}^٢+٥\text{س}\,\text{ص}-٤\text{ص}^٢-\text{س}\,\text{ص}+٤\text{ص}^٢}{\text{س}^٢-١٦\text{ص}^٢}$$

$$=\frac{\text{س}^٢+٤\text{س}\,\text{ص}}{\text{س}-١٦\text{ص}^٢}=\frac{\text{س}}{\text{س}-٤\text{ص}}$$

(تمارين ٢١ ب)

أوجد قيمة كل من المقادير الآتية

(١) $\frac{1}{\text{س}+2}+\frac{1}{\text{س}+3}$

(٢) $\frac{2}{\text{س}+3}-\frac{1}{\text{س}+4}$

(٣) $\frac{1}{\text{س}-5}-\frac{1}{\text{س}-4}$

(٤) $\frac{3}{\text{س}-6}-\frac{1}{\text{س}+2}$

(٥) $\frac{\text{ا}}{\text{س}+\text{ا}}-\frac{\text{ب}}{\text{س}+\text{ب}}$

(٦) $\frac{\text{ا}}{\text{س}-\text{ا}}+\frac{\text{ب}}{\text{س}-\text{ب}}$

(٧) $\frac{\text{س}+3}{\text{س}+4}-\frac{\text{س}+1}{\text{س}+2}$

(٨) $\frac{\text{ا}+\text{س}}{\text{ا}-\text{س}}-\frac{\text{ا}-\text{س}}{\text{ا}+\text{س}}$

(٩) $\frac{\text{س}+2}{\text{س}-2}-\frac{\text{س}-2}{\text{س}+2}$

(١٠) $\frac{\text{س}-4}{\text{س}-2}-\frac{\text{س}-7}{\text{س}-5}$

(١١) $\frac{\text{ا}}{\text{س}-\text{ا}}-\frac{\text{ا}}{\text{س}^2-\text{ا}^2}$

(١٢) $\frac{3}{\text{س}-3}+\frac{2\text{س}}{\text{س}^2-9}$

(١٣) $\frac{1}{2\text{س}-3\text{ص}}-\frac{\text{س}+\text{ص}}{4\text{س}^2-9\text{ص}^2}$

(١٤) $\frac{\text{س}+\text{ا}}{\text{س}-2\text{ا}}-\frac{\text{س}^2+2\text{ا}^2}{\text{س}^2-4\text{ا}^2}$

(١٥) $\frac{4\text{ا}^2+\text{ب}^2}{4\text{ا}^2-\text{ب}^2}-\frac{2\text{ا}-\text{ب}}{2\text{ا}+\text{ب}}$

(١٦) $\frac{2\text{س}^2}{\text{س}^2-\text{ص}^2}-\frac{2\text{س}^2}{\text{س}^2+\text{س}\,\text{ص}}$

(١٧) $\frac{\text{س}^2}{\text{س}-\text{س}^3}-\frac{\text{س}}{1+\text{س}^2}$

(١٨) $\frac{1}{\text{س}(\text{س}-\text{ص})}+\frac{1}{\text{ص}(\text{س}+\text{ص})}$

(١٩) $\frac{\text{س}\,\text{ص}}{25\text{س}^2-\text{ص}^2}+\frac{2\text{س}^2\text{ص}}{10\text{س}^2\text{ص}+2\text{س}\,\text{ص}^2}$

(٢٠) $\frac{\text{ص}}{\text{س}(\text{س}^2-\text{ص}^2)}+\frac{\text{س}}{\text{ص}(\text{س}^2+\text{ص}^2)}$

(٢١) $\frac{\text{س}^2-4\text{ا}^2}{\text{س}^2-2\text{ا}\,\text{س}}-\frac{\text{س}^2+2\text{ا}\,\text{س}-8\text{ا}^2}{\text{س}^2-4\text{ا}^2}$

(٢٢) $\frac{\text{س}^2+\text{س}\,\text{ص}+\text{ص}^2}{\text{س}+\text{ص}}+\frac{\text{س}^2-\text{س}\,\text{ص}+\text{ص}^2}{\text{س}-\text{ص}}$

(٢٣) $\frac{1}{\text{ا}-2\text{س}}-\frac{(\text{ا}+2\text{س})^2}{\text{ا}^3-8\text{س}^3}$

(٢٤) $\frac{\text{ا}^3+\text{ب}^3}{\text{ا}^2-\text{ا}\,\text{ب}+\text{ب}^2}-\frac{\text{ا}^3-\text{ب}^3}{\text{ا}^2+\text{ا}\,\text{ب}+\text{ب}^2}$

(٢٥) $\frac{3}{\text{س}^2-4}+\frac{1}{(\text{س}-2)^2}$

(٢٦) $\frac{1}{\text{ا}(\text{س}^2-\text{ا}^2)}-\frac{1}{\text{س}(\text{س}+\text{ا})^2}$

بند ١٦٨ — من المفيد أحيانا إدخال بعض التعديل على القواعد العامة المتقدّمة وسنورد فى الأمثلة الآتية أنفع الوسائل الموصلة لذلك مع ملاحظة أنه لا يمكن وضع قواعد عامّة يمكن تطبيقها فى جميع الأحوال

(مثـال ١) لاختصار $\frac{\text{ا}+3}{\text{ا}-4}-\frac{\text{ا}+4}{\text{ا}-3}-\frac{8}{\text{ا}^2-16}$

نأخذ الكسرين الأوّل والثانى معا فنرى أن

$$\text{المقدار}=\frac{\text{ا}^2-9-(\text{ا}^2-16)}{(\text{ا}-4)(\text{ا}-3)}-\frac{8}{\text{ا}^2-16}$$

$$=\frac{7}{(\text{ا}-4)(\text{ا}-3)}-\frac{8}{(\text{ا}+4)(\text{ا}-4)}$$

$$=\frac{7(\text{ا}+4)-8(\text{ا}-3)}{(\text{ا}+4)(\text{ا}-4)(\text{ا}-3)}$$

$$=\frac{52-\text{ا}}{(\text{ا}+4)(\text{ا}-4)(\text{ا}-3)}$$

(مثال ٢) لاختصار $\frac{١}{٢س^٢+س-١}+\frac{١}{٣س^٢+٤س+١}$

نقول إن هذا المقدار $=\frac{١}{(٢س-١)(س+١)}+\frac{١}{(٣س+١)(س+١)}$

$=\frac{٣س+١+٢س-١}{(٢س-١)(س+١)(٣س+١)}$

$=\frac{٥س}{(٢س-١)(س+١)(٣س+١)}$

(مثال ٣) لاختصار $\frac{١}{ا-س}-\frac{١}{ا+س}-\frac{٢س}{ا^٢+س^٢}-\frac{٤س^٣}{ا^٤+س^٤}$

نقول إنه من الواضح أن المضاعف المشترك البسيط للقامين الأول والثانى $ا^٢-س^٢$ وهذا إذا ضرب فى $ا^٢+س^٢$ أنتج $ا^٤-س^٤$ وهو المضاعف البسيط لثلاثة المقامات الأولى . وهذا الأخير إذا ضرب فى $ا^٤+س^٤$ أنتج $ا^٨-س^٨$ وهو المضاعف المشترك البسيط لاربعة المقامات وإذن نجرى العمل هكذا

المقدار $=\frac{ا+س-(ا-س)}{ا^٢-س^٢}-\dots\dots$

$=\frac{٢س}{ا^٢-س^٢}-\frac{٢س}{ا^٢+س^٢}-\dots\dots$

$=\frac{٤س^٣}{ا^٤-س^٤}-\frac{٤س^٣}{ا^٤+س^٤}=\frac{٨س^٧}{ا^٨-س^٨}$

(تمارين ٢١ ح)

أوجد قيمة كل من المقادير الآتية

(١) $\frac{١}{س+ص}-\frac{١}{س-ص}+\frac{٢س}{س^٢-ص^٢}$

(٢) $\frac{١}{٢س+ص}+\frac{١}{٢س-ص}-\frac{٣س}{٤س^٢-ص^٢}$

(٣) $\frac{٥}{١+٢س}-\frac{٣س}{١-٢س}-\frac{٤-١٣س}{١-٤س^٢}$

(٤) $\frac{٢ا}{٢ا+٣ب}+\frac{٣ب}{٢ا-٣ب}-\frac{٨ب^٢}{٤ا^٢-٩ب^٢}$

(٥) $\frac{١٠}{٩-ا^٢}-\frac{٢}{٣+ا}-\frac{١}{٣-ا}$

(٦) $\frac{٥س}{٦(س^٢-١)}-\frac{١}{٢(س-١)}+\frac{١}{٣(س+١)}$

(٧) $\frac{١}{٢(ا-ب)}-\frac{١}{٢(ا+ب)}-\frac{ب}{ا^٢-ب^٢}$

(٨) $\frac{٢ا}{٢ا-٣}-\frac{٥}{٦ا+٩}-\frac{٤(٣ا+٢)}{٣(٤ا^٢-٩)}$

(٩) $\frac{٣}{س-٢}+\frac{٢}{٣س+٦}+\frac{٥س}{س^{٢}-٤}$

(١٠) $\frac{س}{س^{٣}+ص^{٣}}-\frac{ص}{س^{٣}-ص^{٣}}+\frac{س^{٣}ص+س\,ص^{٢}}{س^{٦}-ص^{٦}}$

(١١) $\frac{١}{س-٩س+٢٠}+\frac{١}{س^{٢}-١١س+٣٠}$

(١٢) $\frac{١}{س^{٢}-٧س+١٢}-\frac{١}{س^{٢}-٥س+٦}$

(١٣) $\frac{١}{٢س^{٢}-س-١}-\frac{١}{٢س^{٢}+س-٣}$

(١٤) $\frac{١}{٢س^{٢}-س-١}-\frac{٣}{٦س^{٢}-س-٢}$

(١٥) $\frac{٤}{٤-٧أ-٢أ^{٢}}-\frac{٣}{٣-أ-١٠أ^{٢}}$

(١٦) $\frac{٥}{٥+س-١٨س^{٢}}-\frac{٢}{٢+٥س+٢س^{٢}}$

(١٧) $\frac{١}{س+١}-\frac{١}{(س+١)(س+٢)}+\frac{١}{(س+١)(س+٢)(س+٣)}$

(١٨) $\frac{٥س}{٢(س+١)(س-٣)}-\frac{١٥(س-١)}{١٦(س-٣)(س-٢)}-\frac{٩(س+٣)}{١٦(س+١)(س-٢)}$

(١٩) $\frac{أ+٣ب}{٤(أ+ب)(أ+٢ب)}+\frac{أ+٢ب}{(أ+ب)(أ+٣ب)}-\frac{أ+ب}{٤(أ+٢ب)(أ+٣ب)}$

(٢٠) $\frac{٢}{س^{٢}-٣س+٢}+\frac{٢}{س^{٢}-س-٢}-\frac{١}{س^{٢}-١}$

(٢١) $\frac{س}{س^{٢}+٥س+٦}+\frac{١٥}{س^{٢}+٩س+١٤}-\frac{١٢}{س^{٢}+١٠س+٢١}$

(٢٢) $\frac{٣}{س^{٢}-١}+\frac{٤}{٢س+١}+\frac{٤س+٢}{٢س^{٢}+٣س+١}$

(٢٣) $\frac{٥(٢س-٣)}{١١(٦س^{٢}+س-١)}+\frac{٧س}{٦س^{٢}+٧س-٣}-\frac{١٢(٣س+١)}{١١(٤س^{٢}+٨س+٣)}$

(٢٤) $\frac{س-٣}{س+٢}-\frac{س-٢}{س+٣}+\frac{١}{س-١}$

(٢٥) $\frac{س-٣}{س-٤}-\frac{س+٤}{س+٣}-\frac{٥}{س^{٢}-١٦}$

(٢٦) $\frac{١+٢أ}{١-٢أ}-\frac{١-٢أ}{١+٢أ}-\frac{٨أ}{(١-٢أ)^{٢}}$

(٢٧) $\frac{٢٤س}{٩-١٢س+٤س^{٢}}-\frac{٣+٢س}{٣-٢س}+\frac{٣-٢س}{٣+٢س}$

(٢٨) $\frac{١}{٣-س}-\frac{١}{٣+س}-\frac{٢س}{٩+س^{٢}}$

(٢٩) $\frac{١}{٢أ+٣}+\frac{١}{٢أ-٣}-\frac{٤أ}{٤أ^{٢}+٩}$

(٣٠) $\frac{1}{4(1+س)} + \frac{1}{4(1-س)} + \frac{1}{2(1+س^2)}$

(٣١) $\frac{3}{8(ا-س)} + \frac{1}{8(ا+س)} - \frac{ا-س}{4(ا^2+س^2)}$

(٣٢) $\frac{2س}{4+س^2} + \frac{1}{2-س} - \frac{1}{2+س}$

(٣٣) $\frac{5}{3-6س} - \frac{5}{3+6س} - \frac{س}{2+8س^2}$

(٣٤) $\frac{1}{2ا-8س} - \frac{ا}{3ا^2+48س^2} + \frac{1}{2ا+8س}$

(٣٥) $\frac{1}{6ا^2+54} + \frac{1}{3ا-9} - \frac{ا}{3ا^2-27}$

(٣٦) $\frac{1}{8-8س} - \frac{1}{8+8س} + \frac{س}{4+4س^2} - \frac{س}{2+2س^4}$

(٣٧) $\frac{1}{6ا-18} - \frac{1}{6ا+18} - \frac{1}{ا^2+9} + \frac{18}{ا^4+81}$

(٣٨) $\frac{س+1}{2س^3-4س^2} + \frac{س-1}{2س^3+4س^2} - \frac{1}{س^2-4}$

(٣٩) $\frac{1}{3س^2-4سص+ص^2} + \frac{1}{س^2-4سص+3ص^2} - \frac{3}{3س^2-10سص+3ص^2}$

(٤٠) $\frac{1}{س-1} + \frac{2}{س+1} - \frac{3س-2}{س^2-1} - \frac{1}{(س+1)^2}$

(٤١) $\frac{108-52س}{س(3-س)^2} - \frac{4}{3-س} - \frac{12}{س} + \left(\frac{1+س}{3-س}\right)^2$

(٤٢) $\frac{(ا+ب)^2}{(س-ا)(س+ا+ب)} - \frac{ا+2ب+س}{2(س-ا)} + \frac{(ا+ب)س}{س^2+بس-ا^2-اب} + \frac{1}{2}$

(٤٣) $\frac{3(س^2+س-2)}{س^2-س-2} - \frac{3(س^2-س-2)}{س^2+س-2} - \frac{8س}{س^2-4}$

بند ١٦٩ — قداعتبرنا البسط والمقام فيما سبق أنهما عددان صحيحان موجبان وأوضحنا بالبند ١٥٥ أن الكسر خارج قسمة البسط على المقام ولكون القسمة فى الجبر لا نتقيد بالكميات الصحيحة الموجبة سنأتى بتعريف أعم للكسر على الصورة الآتية

الكسر الجبرى $\frac{ا}{ب}$ خارج قسمة الكمية ا على الكمية ب مهما كانت قيمة كل منهما

بند ١٧٠ — علمنا مما جاء بالبند السابق أن $\frac{-ا}{-ب}$ خارج قسمة $-ا$ على $-ب$ وهذا يأتى من قسمة ا على ب ووضع علامة + أمام الخارج على مقتضى قاعدة العلامات

وكذا $\frac{-ا}{ب}$ خارج قسمة $-ا$ على ب وهـذا يأتى من قسمة ا على ب مع وضع $-$ أمام خارج القسمة على حسب قاعدة العلامات

إذن $\frac{-ا}{ب} = -\frac{ا}{ب}$ ... ... (٢)

وأيضا $\frac{ا}{-ب}$ خارج قسمة ا على $-ب$ وهو يأتى من قسمة ا على ب مع وضع علامة $-$ أمام خارج القسمة على حسب قاعدة العلامات

إذن $$\frac{ا}{-ب} = -\frac{ا}{ب} \quad \text{(٣)}$$

وقد يمكننا أن نعبر عن هذه النتائج بالقواعد الآتية

(اوّلا) إذا غيرت علامة كل من بسط الكسر ومقامه لا تتغير علامة الكسر

(ثانيا) إذا غيرت علامة البسط أو المقام فقط تتغير علامة الكسر بأجمعه

ولما كان لهاتين القاعدتين فائدة عظمى فى بعض أمثلة الاختزال فسنعيدهما بصورة أخرى قد تكون أسهل فى تطبيقها أحيانا من الصورة المتقدّمة

(أوّلا) يمكننا تغيير علامة كل حدّ فى بسط الكسر ومقامه بدون أن نحدث تغييرا ما فى قيمة الكسر

(ثانيا) يمكننا تغيير علامة الكسر بتغيير علامة كل حدّ من حدود بسطه فقط أو تغيير علامة كل حدّ من حدود مقامه فقط

(مثال ١) $$\frac{ا - ب}{س - ص} = \frac{-ب + ا}{-ص + س} = \frac{ب - ا}{ص - س}$$

(مثال ٢) $$\frac{س - س^2}{٢ص} = -\frac{-س + س^2}{٢ص} = -\frac{س^2 - س}{٢ص}$$

(مثال ٣) $$\frac{٣س}{٤ - س^2} = -\frac{٣س}{-٤ + س^2} = -\frac{٣س}{س^2 - ٤}$$

يمكننا غالبا إهمال الخطوة الوسطى فى العملية

(مثال ٤) لاختصار $$\frac{ا}{س + ا} + \frac{٢س}{س - ا} + \frac{ا(٣س - ا)}{ا^2 - س^2}$$

نقول إنه من الواضح أن المضاعف المشترك البسيط لمقامى الكسرين الأوّل والثانى $س^2 - ا$ فيحسن إذن تغيير علامة مقام الكسر الثالث

وعليه يكون المقدار $$= \frac{ا}{س + ا} + \frac{٢س}{س - ا} - \frac{ا(٣س - ا)}{س^2 - ا^2}$$

$$= \frac{ا(س - ا) + ٢س(س + ا) - ا(٣س - ا)}{س - ا^2}$$

$$= \frac{ا س - ا^2 + ٢س^2 + ٢ا س - ٣ا س + ا^2}{س^2 - ا^2}$$

$$= \frac{٢س^2}{س^2 - ا^2}$$

(مثال ٥) لاختصار $$\frac{٥}{٣س - ٣} + \frac{٣س - ١}{١ - س} + \frac{١}{٢س + ٢}$$

نقول إن المقدار $$= \frac{٥}{٣(س - ١)} - \frac{٣س - ١}{س^2 - ١} + \frac{١}{٢(س + ١)}$$

$$= \frac{١٠(س + ١) - ٦(٣س - ١) + ٣(س - ١)}{٦(س^2 - ١)}$$

$$= \frac{١٠س + ١٠ . - ١٨س + ٦ + ٣س - ٣}{٦(س^2 - ١)}$$

$$= \frac{١٣ - ٥س}{٦(س^2 - ١)}$$

(تمارين ٢١ د)

اختصر كلا من المقادير الاتية

(١) $\frac{١}{٤س - ٤} - \frac{١}{٥س + ٥} + \frac{١}{١ - س^٢}$

(٢) $\frac{٣}{١ + ا} - \frac{٢}{١ - ا} - \frac{٥ا}{ا^٢ - ١}$

(٣) $\frac{س - ٢ا}{س + ا} + \frac{٢(ا^٢ - ٤ا س)}{ا^٢ - س^٢} - \frac{٣ا}{س - ا}$

(٤) $\frac{س - ا}{س + ا} + \frac{ا^٢ + ٣ا س}{ا^٢ - س^٢} + \frac{س + ا}{س - ا}$

(٥) $\frac{١}{٢س + ١} + \frac{١}{٢س - ١} + \frac{٤س}{١ - ٤س^٢}$

(٦) $\frac{٣س}{١ - س^٢} - \frac{٢}{س - ١} - \frac{٢}{س + ١}$

(٧) $\frac{٢ - ٥س}{س + ٣} - \frac{٣ + س}{٣ - س} + \frac{٢س(٢س - ١١)}{س^٢ - ٩}$

(٨) $\frac{٣ - ٢س}{٢س + ٣} - \frac{٢س + ٣}{٣ - ٢س} + \frac{١٢}{٤س^٢ - ٩}$

(٩) $\frac{٥}{٢ب + ٢} - \frac{٣}{٤ب - ٤} + \frac{١١}{٦ - ٦ب^٢}$

(١٠) $\frac{١}{٦ا + ٦} + \frac{١}{٦ - ٦ا} - \frac{١}{٣ا^٢ - ٣}$

(١١) $\frac{ص^٢}{س^٣ - ص^٣} + \frac{س^٣ ص^٢}{ص^٦ - س^٦}$

(١٢) $\frac{س^٢ - ص^٢}{س ص} - \frac{س ص - ص^٢}{س ص - س^٢}$

(١٣) $\frac{س^٢ + ص^٢}{س^٢ - ص^٢} + \frac{س}{س + ص} + \frac{ص}{ص - س}$

(١٤) $\frac{س^٢ + ٢س + ٤}{س + ٢} - \frac{س^٢ - ٢س + ٤}{٢ - س}$

(١٥) $\frac{١}{٢ا + ٥ب} + \frac{٣ا}{٢٥ب^٢ - ٤ا^٢} + \frac{١}{٢ا - ٥ب}$

(١٦) $\frac{٢ب - ا}{س - ب} - \frac{٣س(ا - ب)}{ب^٢ - س^٢} + \frac{ب - ٢ا}{ب + س}$

(١٧) $\frac{ا س^٢ + ب}{٢س - ١} + \frac{٢(ب س + ا س^٢)}{١ - ٤س^٢} - \frac{ا س^٢ - ب}{٢س + ١}$

(١٨) $\frac{ا + ح}{(ا - ب)(س - ا)} + \frac{ب + ح}{(ب - ا)(س - ب)}$

(١٩) $\frac{ا - ح}{(ا - ب)(س - ا)} - \frac{ب - ح}{(ب - ا)(ب - س)}$

(٢٠) $\frac{٢ا + ص}{(س - ا)(ا - ب)} + \frac{ا + ب + ص}{(س - ب)(ب - ا)} - \frac{س + ص - ا}{(س - ا)(س - ب)}$

(٢١) $\frac{١}{(ا^٢-ب^٢)(س^٢+ب^٢)}+\frac{١}{(ب^٢-ا^٢)(س^٢+ا^٢)}-\frac{١}{(س^٢+ا^٢)(س^٢+ب^٢)}$

(٢٢) $\frac{١}{س+ا}+\frac{٤ا}{س^٢-ا^٢}+\frac{١}{ا-س}-\frac{٢ا}{س^٢+ا^٢}$

(٢٣) $\frac{٣}{س+ا}-\frac{١}{س+٣ا}+\frac{٣}{ا-س}+\frac{١}{س-٣ا}$

(٢٤) $\frac{١}{٤ا^٣(ا+س)}-\frac{١}{٤ا^٣(س-ا)}+\frac{١}{٢ا^٢(ا^٢+س^٢)}-\frac{ا^٤}{ا^٨-س^٨}$ ...

(٢٥) $\frac{س}{س^٢-ص^٢}-\frac{ص}{س^٢+ص^٢}+\frac{س^٣+ص^٢}{ص^٤-س^٤}+\frac{س\,ص}{(س+ص)(س^٢+ص^٢)}$

(٢٦) $\frac{ب}{ا(ا^٢-ب^٢)}+\frac{ا}{ب(ا^٢+ب^٢)}+\frac{ا^٤+ب^٤}{ا\,ب(ب^٤-ا^٤)}-\frac{ا}{ب^٨-ا^٨}$

(٢٧) $\frac{ا^٢-٢اس+س^٢}{٢(ا^٢-س^٢)}-\frac{٢اس(ا+س)}{(ا-س)(ا^٢+٢اس+س^٢)}-\frac{س^٢-ا^٢}{٢(س^٢-ا^٢)}$

(٢٨) $\frac{٢}{ا+ب}-\frac{١}{ا-ب}-\frac{٣ب}{ب^٢-ا^٢}+\frac{ا\,ب}{ا^٣+ب^٣}$

(٢٩) $\frac{٣}{٨(١-س)}+\frac{١}{٨(١+س)}-\frac{١-س}{٤(١+س^٢)}-\frac{٣}{٤(س^٢-١)}$

(٣٠) $\frac{١}{س}+\frac{١}{س-١}+\frac{١}{س+١}+\frac{س}{١-س^٢}+\frac{٣}{س(س^٢-١)}$

(٣١) $\frac{ا^٢+اح}{ا^٢ح-ح^٣}-\frac{ا^٢-ح^٢}{ا^٢ح+٢اح^٢+ح^٣}+\frac{٢ح}{ح^٢-ا^٢}-\frac{٣}{ا+ح}$

(٣٢) $\frac{٤ا+٦ب}{ا+ب}+\frac{٦ا-٤ب}{ا-ب}+\frac{٤ا^٢+٦ب^٢}{ب^٢-ا^٢}+\frac{٤ب^٢-٦ا^٢}{ا^٢+ب^٢}-\frac{٢٠ب^٤}{ب^٤-ا^٤}$

بند ١٧١ — إذا أريد اختصار المقدار

$$\frac{١}{(ا-ب)(ا-ح)}+\frac{١}{(ب-ح)(ب-ا)}+\frac{١}{(ح-ا)(ح-ب)}$$

يلاحظ فى البحث عن المضاعف المشترك البسيط للقامات أن العوامل المركبة المراد إيجاد مضاعفها المشترك فى الحقيقة ثلاثة لا ستة وذلك لأن ثلاثة منها متحدة فى الصورة ومختلفة فى العلامات فقط

بمعنى أن $(ا-ح)=-(ح-ا)$

و $(ب-ا)=-(ا-ب)$

و $(ح-ب)=-(ب-ح)$

واذا وضع بدل العامل الثانى فى كل مقام ما يساويه يمكننا أن نكتب المقدار على الوجه الآتى

$$-\frac{١}{(ا-ب)(ح-ا)}-\frac{١}{(ب-ح)(ا-ب)}-\frac{١}{(ح-ا)(ب-ح)} \quad .... (١)$$

ولما كان المضاعف المشترك البسيط لهذه المقامات $(ب-ح)(ح-ا)(ا-ب)$

فالمقدار إذن $=\frac{-(ب-ح)-(ح-ا)-(ا-ب)}{(ب-ح)(ح-ا)(ا-ب)}$

$=\frac{-ب+ح-ح+ا-ا+ب}{(ب-ح)(ح-ا)(ا-ب)}$

$=$ صفرا

بند ١٧٢ — هناك خاصة فى ترتيب الحروف فى المثال السابق جديرة بالالتفات وذلك لأن الحروف فى المقدار (١) موضوعة بترتيب يسمى الترتيب الدائرى أى أن ب تتبع ا كما أن ا تتبع ح وكذا ح تتبع ب فلو كتبنا ثلاثة الحروف ا ، ب ، ح على محيط دائرة كما مبين على اليسار فى الشكل وبدأنا بأى حرف منها وتبعنا اتجاه السهام نجد أن الحرفين الأخيرين يتبعانه على ترتيب دائرى هكذا ا ب ح ، ب ح ا ، ح ا ب ومراعاة هذه القاعدة ضرورية جدا فى حل كثير من المسائل التى تشتمل على ثلاثة حروف مطروح بعضها من بعض

فالمقادير ب — ح ، ح — ا ، ا — ب موضوعة على ترتيب دائرى أما المقادير ب — ح ، ا — ح ، ا — ب وكذلك المقادير ا — ح ، ب — ا ، ب — ح فترتيب الحروف فيها يخالف الترتيب الدائرى وقد يجد الطالب أنه يمكنه دائما اختصار العمل وتسهيله باتباع الترتيب الدائرى فى وضع المقادير ومتى روعى هذا الترتيب فى ابتداء حل التمرين تلزم مراعاته حتى ينتهى الحل

وسنقتصر فى هذا الباب على السهل القليل من المسائل المتعلقة بهذا الموضوع على أن نعود إليه فى الباب التاسع والعشرين

(تمارين ٢١ هـ)

ما قيمة كل من المقادير الآتية

(١) $\frac{\text{ا}}{(\text{ا}-\text{ب})(\text{ا}-\text{ح})}+\frac{\text{ب}}{(\text{ب}-\text{ح})(\text{ب}-\text{ا})}+\frac{\text{ح}}{(\text{ح}-\text{ا})(\text{ح}-\text{ب})}$

(٢) $\frac{\text{ب}}{(\text{ا}-\text{ب})(\text{ا}-\text{ح})}+\frac{\text{ح}}{(\text{ب}-\text{ح})(\text{ب}-\text{ا})}+\frac{\text{ا}}{(\text{ح}-\text{ا})(\text{ح}-\text{ب})}$

(٣) $\frac{\text{ع}}{(\text{س}-\text{ص})(\text{س}-\text{ع})}+\frac{\text{س}}{(\text{ص}-\text{ع})(\text{ص}-\text{س})}+\frac{\text{ص}}{(\text{ع}-\text{س})(\text{ع}-\text{ص})}$

(٤) $\frac{\text{ص}+\text{ع}}{(\text{س}-\text{ص})(\text{س}-\text{ع})}+\frac{\text{ع}+\text{س}}{(\text{ص}-\text{ع})(\text{ص}-\text{س})}+\frac{\text{س}+\text{ص}}{(\text{ع}-\text{س})(\text{ع}-\text{ص})}$

(٥) $\frac{\text{ب}-\text{ح}}{(\text{ا}-\text{ب})(\text{ا}-\text{ح})}+\frac{\text{ح}-\text{ا}}{(\text{ب}-\text{ح})(\text{ب}-\text{ا})}+\frac{\text{ا}-\text{ب}}{(\text{ح}-\text{ا})(\text{ح}-\text{ب})}$

(٦) $\frac{\text{س}^{٢}\,\text{ص}\,\text{ع}}{(\text{س}-\text{ص})(\text{س}-\text{ع})}+\frac{\text{ص}^{٢}\,\text{ع}\,\text{س}}{(\text{ص}-\text{ع})(\text{ص}-\text{س})}+\frac{\text{ع}^{٢}\,\text{س}\,\text{ص}}{(\text{ع}-\text{س})(\text{ع}-\text{ص})}$

(٧) $\frac{١+\text{ا}}{(\text{ا}-\text{ب})(\text{ا}-\text{ح})}+\frac{١+\text{ب}}{(\text{ب}-\text{ح})(\text{ب}-\text{ا})}+\frac{١+\text{ح}}{(\text{ح}-\text{ا})(\text{ح}-\text{ب})}$

(٨) $\frac{\text{ط}-\text{ا}}{(\text{ط}-\text{ق})(\text{ط}-\text{ر})}+\frac{\text{ق}-\text{ا}}{(\text{ق}-\text{ر})(\text{ق}-\text{ط})}+\frac{\text{ر}-\text{ا}}{(\text{ر}-\text{ط})(\text{ر}-\text{ق})}$

(٩) $\frac{\text{ط}+\text{ق}-\text{ر}}{(\text{ط}-\text{ق})(\text{ط}-\text{ر})}+\frac{\text{ق}+\text{ر}-\text{ط}}{(\text{ق}-\text{ر})(\text{ق}-\text{ط})}+\frac{\text{ر}+\text{ط}-\text{ق}}{(\text{ر}-\text{ط})(\text{ر}-\text{ق})}$

(١٠) $\frac{\text{ا}^{٢}}{(\text{ا}^{٢}-\text{ب}^{٢})(\text{ا}^{٢}-\text{ح}^{٢})}+\frac{\text{ب}^{٢}}{(\text{ب}^{٢}-\text{ح}^{٢})(\text{ب}^{٢}-\text{ا}^{٢})}+\frac{\text{ح}^{٢}}{(\text{ح}^{٢}-\text{ا}^{٢})(\text{ح}^{٢}-\text{ب}^{٢})}$

(١١) $\frac{\text{س}+\text{ص}}{(\text{ط}-\text{ق})(\text{ط}-\text{ر})}+\frac{\text{س}+\text{ص}}{(\text{ق}-\text{ر})(\text{ق}-\text{ط})}+\frac{\text{س}+\text{ص}}{(\text{ر}-\text{ط})(\text{ر}-\text{ق})}$

(١٢) $\frac{\text{ق}+\text{ر}}{(\text{س}-\text{ص})(\text{س}-\text{ع})}+\frac{\text{ر}+\text{ط}}{(\text{ص}-\text{ع})(\text{ص}-\text{س})}+\frac{\text{ط}+\text{ق}}{(\text{ع}-\text{س})(\text{ع}-\text{ص})}$

الباب الثانى والعشرون — كسور متنوّعة

بند ١٧٣ — سنبحث فى هذا الباب فى مسائل متنوّعة تتضمن كسورا أكثر صعوبة وتعقيدا من التى أوردناها فيما تقدّم

اعتبرنا البسط والمقام فى الأبواب المتقدّمة على الكسور عددين صحيحين ولكن كثيرا ما تكون البسوط أو المقامات هى نفسها كسورا

بند ١٧٤ — تعريف : الكسر الذى بسطه أو مقامه كسر يسمى كسرا مركبا

إذن $\frac{ا}{\frac{ب}{حـ}}$ ، $\frac{\frac{ا}{ب}}{س}$ ، $\frac{\frac{ا}{ب}}{\frac{حـ}{ء}}$ كسور مركبة

وفى النوع الأخير من هذه الأمثلة قد يطلق على المقدارين ا ، ء المتطرفين كلمة طرفين وعلى ب ، حـ الواقعين فى الوسط كلمة وسطين

بند ١٧٥ — يستحسن أحيانا أن تستبدل بالشرطة الأفقية الفاصلة بين البسط والمقام فى الكسور المركبة شرطة مائلة وتكتب الكسور على الصورة الآتية

$$ا \Big\backslash \frac{ب}{حـ} \quad ، \quad \frac{ا}{ب} \Big\backslash س \quad ، \quad \frac{ا}{ب} \Big\backslash \frac{حـ}{ء}$$

بند ١٧٦ — على حسب التعريف المذكور ببند (١٦٩) نعلم أن الكسر $\frac{\frac{ا}{ب}}{\frac{حـ}{ء}}$ يدل على خارج قسمة $\frac{ا}{ب}$ على $\frac{حـ}{ء}$ (وبمقتضى بند (١٥٨) نعلم أن هذا الخارج يساوى $\frac{ا ء}{ب حـ}$)

$$\therefore \quad \frac{\frac{ا}{ب}}{\frac{حـ}{ء}} = \frac{ا ء}{ب حـ}$$

اختصار الكسور المركبة

بند ١٧٧ — نستخلص من بند (١٧٦) طريقة سهلة لاختصار الكسر المركب وهى أن يضرب الطرفان ويجعل حاصل ضربهما بسطا ثم الوسطان ويجعل حاصل ضربهما مقاما

(مثال) $$\frac{\frac{ا + س}{ب}}{\frac{ا^2 - س^2}{ا ب}} = \frac{ا ب (ا + س)}{ب (ا^2 - س^2)} = \frac{ا}{ا - س}$$

ويحصل على الناتج الأخير بحذف العوامل المشتركة فى البسط والمقام

بند ١٧٨ — يجب على الطالب أن يراعى على الخصوص الحالات الآتيـة فى اختصار الكسور حتى يكون قادرا على كتابة نواتج الكسور بمجرد النظر إليها

$$\frac{١}{\frac{ا}{ب}} = ١ \div \frac{ا}{ب} = ١ \times \frac{ب}{ا} = \frac{ب}{ا}$$

$$، \quad \frac{ا}{\frac{١}{ب}} = ا \div \frac{١}{ب} = ا \times ب = ا ب$$

$$، \quad \frac{\frac{١}{ا}}{\frac{١}{ب}} = \frac{١}{ا} \div \frac{١}{ب} = \frac{١}{ا} \times \frac{ب}{١} = \frac{ب}{ا}$$

بند ١٧٩ — الأمثلة الآتية تبين كيفية اختزال الكسور المركبة

(مثال ١) $\dfrac{\frac{ا}{ب}+\frac{ح}{ء}}{\frac{ا}{ب}-\frac{ح}{ء}} = \left(\frac{ا}{ب}+\frac{ح}{ء}\right) \div \left(\frac{ا}{ب}-\frac{ح}{ء}\right)$

$= \dfrac{ا ء + ب ح}{ب ء} \div \dfrac{ا ء - ب ح}{ب ء}$

$= \dfrac{ا ء + ب ح}{ب ء} \times \dfrac{ب ء}{ا ء - ب ح}$

$= \dfrac{ا ء + ب ح}{ا ء - ب ح}$

أو بالاختصار نقول
نضرب كسرى كل من البسط والمقام فى ب ء وهو المضاعف المشترك البسيط لمقاماتها فيؤول الكسر إلى $\dfrac{ا ء + ب ح}{ا ء - ب ح}$ وهذا عين النتيجة السابقة

(مثال ٢) لاختزال $\dfrac{س + \frac{ا^٢}{س}}{س - \frac{ا^٤}{س^٣}}$

نضرب كلا من البسط والمقام فى $س^٣$ فيحدث أن

الكسر $= \dfrac{س^٤ + ا^٢ س^٢}{س^٤ - ا^٤} = \dfrac{س^٢ (س^٢ + ا^٢)}{س^٤ - ا^٤}$

$= \dfrac{س^٢}{س^٢ - ا^٢}$

(مثال ٣) لاختزال $\dfrac{\frac{٣}{ا} + \frac{ا}{٣} - ٢}{\frac{ا}{٦} + \frac{١}{٢} - \frac{٣}{ا}}$

نقول إن الكسر $= \dfrac{١٨ + ٢ ا^٢ - ١٢ ا}{ا^٢ + ٣ ا - ١٨}$

$= \dfrac{٢ (ا^٢ - ٦ ا + ٩)}{(ا + ٦)(ا - ٣)}$

$= \dfrac{٢ (ا - ٣)}{ا + ٦}$

(مثال ٤) لاختزال $\dfrac{\frac{ا^٢ + ب^٢}{ا^٢ - ب^٢} - \frac{ا^٢ - ب^٢}{ا^٢ + ب^٢}}{\frac{ا + ب}{ا - ب} - \frac{ا - ب}{ا + ب}}$

نقول إن البسط $= \dfrac{(ا^٢ + ب^٢)^٢ - (ا^٢ - ب^٢)^٢}{(ا^٢ + ب^٢)(ا^٢ - ب^٢)}$

$= \dfrac{٤ ا^٢ ب^٢}{(ا^٢ + ب^٢)(ا^٢ - ب^٢)}$

وكذا المقام $= \dfrac{٤ ا ب}{(ا + ب)(ا - ب)}$

فالكسر كله إذن

$$= \frac{4\,\text{أ}^2\,\text{ب}^2}{(\text{أ}^2+\text{ب}^2)\,(\text{أ}^2-\text{ب}^2)} \div \frac{4\,\text{أ}\,\text{ب}}{(\text{أ}+\text{ب})\,(\text{أ}-\text{ب})}$$

$$= \frac{4\,\text{أ}^2\,\text{ب}^2}{(\text{أ}^2+\text{ب}^2)\,(\text{أ}^2-\text{ب}^2)} \times \frac{(\text{أ}+\text{ب})\,(\text{أ}-\text{ب})}{4\,\text{أ}\,\text{ب}}$$

$$= \frac{\text{أ}\,\text{ب}}{\text{أ}^2+\text{ب}^2}$$

(ملاحظة) يحسن بالتلميذ لزيادة ضبط العمل وحسن ترتيبه أن يختصر كلا من البسط والمقام على حدته كما فعلنا بالمثال السابق متى اشتمل كل من بسط الكسر ومقامه على كسور

بند ١٨٠ — لاختصار الكسور المسماة بالكسور المتسلسلة كالكسر الذى سنورده يلزم أن نبدأ دائما باختصار أسفل كسر وهكذا نسير فى العمل تدريجيا حتى يتم كما يأتى

(مثال) لاختزال

$$\frac{9\,\text{س}^2-64}{\text{س}-1-\cfrac{1}{1-\cfrac{\text{س}}{4+\text{س}}}}$$

نقول إن الكسر

$$= \frac{9\,\text{س}^2-64}{\text{س}-1-\cfrac{1}{\cfrac{4+\text{س}-\text{س}}{4+\text{س}}}} = \frac{9\,\text{س}^2-64}{\text{س}-1-\cfrac{4+\text{س}}{4}}$$

$$= \frac{9\,\text{س}^2-64}{\cfrac{4\,\text{س}-4-(4+\text{س})}{4}} = \frac{9\,\text{س}^2-64}{\cfrac{3\,\text{س}-8}{4}}$$

$$= \frac{4\,(9\,\text{س}^2-64)}{3\,\text{س}-8} = 4\,(3\,\text{س}+8)$$

(تمارين ١٢٢)

ما قيمة كل من الكسور الآتية

(١) $\dfrac{\frac{\text{م}}{\text{ن}}-\frac{\text{ل}}{\text{م}}}{\frac{\text{أ}}{\text{م}}-\frac{\text{ب}}{\text{ن}}}$

(٢) $\dfrac{\frac{1}{\text{س}}+\frac{1}{\text{ص}}}{\frac{1}{\text{س}}-\frac{1}{\text{ص}}}$

(٣) $\dfrac{\text{أ}+\frac{\text{ب}}{\text{ء}}}{\text{س}-\frac{\text{ص}}{\text{ء}}}$

(٤) $\dfrac{1+\frac{\text{ح}}{\text{س}}}{\frac{\text{ب}}{\text{س}}-1}$

(٥) $\dfrac{2+\frac{3\,\text{أ}}{4\,\text{ب}}}{\text{أ}+\frac{8\,\text{ب}}{3}}$

(٦) $\dfrac{3\,\text{أ}+\frac{7\,\text{ب}}{8\,\text{ح}}}{3\,\text{ح}+\frac{7\,\text{ب}}{8\,\text{أ}}}$

(٧) $\dfrac{1-\frac{\text{ص}^2}{\text{س}^2}}{1+\frac{\text{ص}^2}{\text{س}^2}}$

(٨) $\dfrac{1}{\text{أ}+\frac{\text{ب}}{\text{ح}}}$

(٩) $\dfrac{1}{\text{ب}+\frac{\text{ح}}{\text{ء}}}$

(١٠) $\dfrac{\text{س}}{\text{س}-\frac{\text{م}}{\text{ن}}}$

(١١) $\dfrac{\frac{ا}{ب}+\frac{ح}{د}}{\frac{م}{ن}+\frac{ك}{ل}}$

(١٢) $\dfrac{س-\frac{1}{س}}{1+\frac{1}{س}}$

(١٣) $\dfrac{س+5+\frac{6}{س}}{1+\frac{6}{س}+\frac{8}{س^2}}$

(١٤) $\dfrac{\frac{1}{س}-\frac{2}{س^2}-\frac{3}{س^3}}{\frac{9}{س}-س}$

(١٥) $\dfrac{2س^2-س-6}{\frac{4}{س^2}-1}$

(١٦) $\dfrac{2}{1-س^2}\div\left(\dfrac{1}{1-س}-\dfrac{1}{1+س}\right)$

(١٧) $\left(\dfrac{ا^3-ب^3}{ا-ب}-\dfrac{ا^3+ب^3}{ا+ب}\right)\div\dfrac{4اب}{ا^2-ب^2}$

(١٨) $\left(\dfrac{ا^2-اس+س^2}{ا-س}-\dfrac{ا^2+اس+س^2}{ا+س}\right)\div\dfrac{س^3}{ا^2-س^2}$

(١٩) $\left(ص+\dfrac{سص}{ص-س}\right)\left(ص-\dfrac{سص}{س+ص}\right)\times\dfrac{ص^2-س^2}{ص^2+س^2}$

(٢٠) $\left(\dfrac{س}{1+س}+\dfrac{1-س}{س}\right)\div\left(\dfrac{س}{1+س}-\dfrac{1-س}{س}\right)$

(٢١) $\dfrac{\frac{ا+ب}{ا-ب}-\frac{ا-ب}{ا+ب}}{1-\frac{ا^2+ب^2}{(ا+ب)^2}}$

(٢٢) $\dfrac{\frac{ا}{س^2}+\frac{س}{ا^2}}{\frac{1}{ا^2}-\frac{1}{اس}+\frac{1}{س^2}}$

(٢٣) $\dfrac{\frac{1}{3س-2}-\frac{1}{3س+2}}{\frac{1}{9-\frac{4}{س^2}}}$

(٢٤) $1+\dfrac{س}{1+س+\frac{2س^2}{1-س}}$

(٢٥) $\dfrac{1}{ا-\frac{ا^2-1}{ا+\frac{1}{ا-1}}}$

(٢٦) $\dfrac{1}{4س+\frac{4س}{1+\frac{2(س+ص)}{6-س}}}$

(٢٧) $\dfrac{ا}{س+\frac{م}{ص+\frac{ن}{ع}}}$

(٢٨) $\dfrac{1}{1-\frac{1+س}{س-\frac{1}{س}}}$

(٢٩) $\dfrac{س-2}{س-2-\frac{س}{س-\frac{س-1}{س-2}}}$

(٣٠) $\dfrac{1}{س-\frac{1}{س+\frac{1}{س}}}-\dfrac{1}{س+\frac{1}{س-\frac{1}{س}}}$

(٣١) $\dfrac{\frac{ا-ب}{1+اب}+\frac{ب-ح}{1+بح}}{1-\frac{(ا-ب)(ب-ح)}{(1+اب)(1+بح)}}$

(٣٢) $\dfrac{1+\frac{ا-ب}{ا+ب}}{1-\frac{ا-ب}{ا+ب}}\div\dfrac{1+\frac{ا^2-ب^2}{ا^2+ب^2}}{1-\frac{ا^2-ب^2}{ا^2+ب^2}}$

(٣٣) $\dfrac{ا-س}{ا^2-اس-\frac{(ا-س)^2}{1-\frac{ا}{س}}}$

(٣٤) $\frac{٢س^{٢}+٢س}{\frac{س}{\frac{س}{س-٢}-١}-\frac{٣}{٢}}-\frac{٣(س-١)}{\frac{س}{\frac{س}{س-٤}-١}+\frac{٣}{٤}}$

(٣٥) $\frac{٢-٤س}{٤س-٢-\frac{٤س}{١+\frac{\frac{١}{٢س-١}}{١+\frac{١}{٤س-١}}}}$

(٣٦) $\frac{س^{٢}}{١-\frac{١}{س^{٢}+\frac{\frac{١}{س}}{س+\frac{١}{س}}}}+\frac{س^{٢}-٢}{١-\frac{١}{س^{٢}-\frac{\frac{١}{س}}{س-\frac{١}{س}}}}$

بند ١٨١ — يحسن أحيانا أن نجزئ الكسر ونضعه على هيئة مجموعة كسور

(مثلا) $\frac{٥س^{٢}ص-١٠سص^{٢}+١٥ص^{٣}}{١٠س^{٢}ص^{٢}}=\frac{٥س^{٢}ص}{١٠س^{٢}ص^{٢}}-\frac{١٠سص^{٢}}{١٠س^{٢}ص^{٢}}+\frac{١٥ص^{٣}}{١٠س^{٢}ص}$

$=\frac{١}{٢ص}-\frac{١}{س}+\frac{٣ص}{٢س}$

بند ١٨٢ — لكون الكسر يدل على خارج قسمة بسطه على مقامه يمكن أحيانا وضعه على صورة عدد صحيح وكسر كما يأتى

(مثال ١) $\frac{س+٧}{س+٢}=\frac{(س+٢)+٥}{س+٢}=١+\frac{٥}{س+٢}$

(مثال ٢) $\frac{٣س-٢}{س+٥}=\frac{٣(س+٥)-١٥-٢}{س+٥}=\frac{٣(س+٥)-١٧}{س+٥}=٣-\frac{١٧}{س+٥}$

ويفضل أحيانا قسمة البسط على المقام مباشرة

(مثال ٣) بيّن أن $\frac{٢س^{٢}-٧س-١}{س-٣}=٢س-١-\frac{٤}{س-٣}$

لذلك نقسم البسط على المقام

$٢س^{٢}-٧س-١$	$س-٣$
$٢س^{٢}-٦س$	$٢س-١$
$-س-١$	
$-س+٣$	
-٤	

فالخارج $٢س-١$ والباقى -٤

وحينئذ يكون الكسر $\frac{٢س^{٢}-٧س-١}{س-٣}=٢س-١-\frac{٤}{س-٣}$

بند ١٨٣ — إذا كانت درجة البسط أصغر من درجة المقام لا يمنع ذلك من قسمة البسط على المقام ووضع الناتج على صورة عدد صحيح وكسر

(مثال) للبرهنة على أن $\frac{٢س}{١+٣س^{٢}}=٢س-٦س^{٣}+١٨س^{٥}-\frac{٥٤س}{١+٣س^{٢}}$

نقسم البسط على المقـام

$$\begin{array}{l|l} ٢ س & ١ + ٣ س^٢ \\ \hline ٢ س + ٦ س^٣ & ٢ س - ٦ س^٣ + ١٨ س^٥ \\ \hline - ٦ س^٣ & \\ - ٦ س^٣ - ١٨ س^٥ & \\ \hline ١٨ س^٥ & \\ ١٨ س^٥ + ٥٤ س^٧ & \\ \hline - ٥٤ س^٧ & \end{array}$$

ومن ذلك ينتج أن المقدارين متساويان

يمكننا فى هـذا المثال أن نستمر فى عملية القسمة ونوجد أى عدد نريد من الحدود فى الخارج كما أنه يمكننا أن نقف عند أى حدّ ونجعل الباقى كسرا بسطه آخر باق فى القسمة ومقامه المقسوم عليه

وعلى ذلك إذا جعلنا عدد حدود خارج القسمة أربعة فى المثال السابق رأينا أن

$$\frac{٢ س}{١ + ٣ س^٢} = ٢ س - ٦ س^٣ + ١٨ س^٥ - ٥٤ س^٧ + \frac{١٦٢ س^٩}{١ + ٣ س^٢}$$

وقد يمكن أن تكون حدود الخارج كسورا فاذا قسمنا $س^٢$ مثلا على $س^٣ - ا^٣$ نجد أن الحدود الأربعة الأولى من الخارج هى $\frac{١}{س} + \frac{ا^٣}{س^٤} + \frac{ا^٦}{س^٧} + \frac{ا^٩}{س^{١٠}}$ والبـاقى $\frac{ا^{١٢}}{س^{١٠}}$

بند ١٨٤ — قد تأتى أمثلة متنوّعة فى الضرب والقسمة يمكن حلهـا باستعمال الطرق المتقدّمة فى اختصار الكسور

(مثلا) لضرب $س + ٢ ا - \frac{ا^٢}{٢ س + ٣ ا}$ فى $٢ س - ا - \frac{٢ ا^٢}{س + ا}$

تقول إن حاصل الضرب $= \left(س + ٢ ا - \frac{ا^٢}{٢ س + ٣ ا}\right) \times \left(٢ س - ا - \frac{٢ ا^٢}{س + ا}\right)$

$$= \frac{٢ س^٢ + ٧ ا س + ٦ ا^٢ - ا^٢}{٢ س + ٣ ا} \times \frac{٢ س^٢ + ا س - ا س - ا^٢ - ٢ ا^٢}{س + ا}$$

$$= \frac{٢ س^٢ + ٧ ا س + ٥ ا^٢}{٢ س + ٣ ا} \times \frac{٢ س^٢ + ا س - ٣ ا^٢}{س + ا}$$

$$= \frac{(٢ س + ٥ ا)(س + ا)}{٢ س + ٣ ا} \times \frac{(٢ س + ٣ ا)(س - ا)}{س + ا}$$

$$= (٢ س + ٥ ا)\ (س - ا)$$

(تمـارين ٢٢ ب)

أكتب كلا من الكسور الآتية على صورة عدّة كسور بسيطة مختزلة

(١) $\frac{٣ س^٢ ص + س ص^٢ - ص^٣}{٩ س ص}$

(٢) $\frac{٣ ا^٣ س - ٤ ا^٢ س^٢ + ٦ ا س^٣}{١٢ ا س}$

(٣) $\frac{ا^٣ - ٣ ا^٢ ب + ٣ ا ب^٢ + ب^٣}{٢ ب}$

(٤) $\frac{ا + ب + ح}{ا ب ح}$

(٥) $\frac{ب ح + ح ا + ا ب}{ا ب ح}$

(٦) $\frac{ا^٣ ب ح - ٣ ا ب^٣ ح + ٢ ا ب ح}{٦ ا ب ح}$

أجر عمليات القسمة الآتية وأوجد الباقي بعد إيجاد أربعة حدود في خارج القسمة

(٧) $س \div (١ + س)$

(٨) $ا \div (ا - ب)$

(٩) $(١ + س) \div (١ - س)$

(١٠) $١ \div (١ - س + س^{٢})$

(١١) $س^{٢} \div (س + ٣)$

(١٢) $١ \div (١ - س)^{٢}$

(١٣) بيّن أن $\frac{ا^{٣} - ب^{٣}}{(ا - ب)^{٢}} = ا + ٢ب + \frac{٣ب^{٢}}{ا - ب}$

(١٤) بيّن أن $س^{٢} - س ص + ص^{٢} - \frac{٢ص^{٣}}{س + ص} = \frac{س^{٣} - ص^{٣}}{س + ص}$

(١٥) بيّن أن $\frac{٦٠ س^{٣} - ١٧ س^{٢} - ٤ س + ١}{٥ س^{٢} + ٩ س - ٢} = ١٢ س - ٢٥ + \frac{٤٩}{س + ٢}$

(١٦) بيّن أن $١ + \frac{ا^{٢} + ب^{٢} - ح^{٢}}{٢ا ب} = \frac{(ا + ب + ح)(ا + ب - ح)}{٢ا ب}$

(١٧) اقسم $س + \frac{١٦ س - ٢٧}{س^{٢} - ١٦}$ على $س - ١ + \frac{١٣}{س + ٤}$

(١٨) اضرب $ا^{٢} - ٢ا س + ٤ س^{٢} - \frac{١٦ س^{٣}}{ا + ٢ س}$ في $٣ - \frac{٦ س (ا + ٤ س)}{ا^{٢} + ٢ا س + ٤ س^{٢}}$

(١٩) اقسم $ب^{٢} + ٣ب - ٢ - \frac{١٢}{ب - ٣}$ على $٣ب + ٦ - \frac{٢ب^{٢}}{ب - ٣}$

(٢٠) اقسم $ا^{٢} + ٩ب^{٢} + \frac{٦٥ ب^{٤}}{ا^{٢} - ٩ب^{٢}}$ على $ا + ٣ب + \frac{١٣ ب^{٢}}{ا - ٣ب}$

(٢١) اضرب $٤ س^{٢} + ١٤ س + \frac{٩٨ س - ٢٧}{٢ س - ٧}$ في $\frac{١}{٦} - \frac{٣ س + ٢٩}{١٢ س^{٢} + ١٨ س + ٢٧}$

بند ١٨٥ — تشتمل التمارين الآتية على أمثلة متنوعة على معظم القواعد المتعلقة بالكسور

(تمارين ٢٢ ح)

اختصر كلا من المقادير الآتية

(١) $\frac{٤ا(ا^{٢} - س^{٢})}{٣ب(ح^{٢} - س^{٢})} \div \left[\frac{ا^{٢} - ا س}{ب ح + ب س} \times \frac{ا^{٢} + ٢ا س + س^{٢}}{ح^{٢} - ٢ح س + س^{٢}}\right]$

(٢) $\frac{س(س + ا)(س + ٢ا)}{٣ا} - \frac{س(س + ا)(٢س + ا)}{٦ا}$

(٣) $\frac{١}{ب}\left(\frac{١}{ا - ب} - \frac{١}{ا + ٢ب}\right) - \frac{٢}{ا^{٢} + ا ب - ٢ب^{٢}}$

(٤) $\left(\frac{س + ص}{س - ص}\right)^{٢} - \left(\frac{س - ص}{س + ص}\right)^{٢}$

(٥) $\frac{٢}{س - ١} + \frac{٢}{س + ١} - \frac{٤ س}{س^{٢} - س + ١}$

(٦) $\left(\frac{س^{٢}}{١ - س^{٤}} + \frac{٢ س^{٤}}{١ - س^{٨}}\right) \div \left(\frac{س^{٢} + ١}{س}\right)$

(٧) $\frac{١}{س} - \frac{١}{(س + ١)^{٢}} - \frac{٢}{س + ١} + \frac{س}{١ + س + س^{٢}}$

(٨) $\dfrac{1+\text{س}^3}{1+2\,\text{س}+2\,\text{س}^2+\text{س}^3}$

(٩) $\dfrac{2\,\text{س}^3-9\,\text{س}^2+27}{3\,\text{س}^3-81\,\text{س}+162}$

(١٠) $\dfrac{\text{ا}}{\text{ب}}-\dfrac{(\text{ا}^2-\text{ب}^2)\,\text{س}}{\text{ب}^2}+\dfrac{\text{ا}(\text{ا}^2-\text{ب})\,\text{س}^2}{\text{ب}^2(\text{ب}+\text{ا}\,\text{س})}$

(١١) $\left\{\dfrac{\text{ا}^4-\text{س}^4}{\text{س}^2-2\,\text{ا}\,\text{س}+\text{ا}^2}\div\dfrac{\text{س}^2+\text{ا}\,\text{س}}{\text{س}-\text{ا}}\right\}\times\dfrac{\text{س}^5-\text{ا}^2\,\text{س}^3}{\text{س}^3+\text{ا}^3}\div\left(\dfrac{\text{س}}{\text{ا}}-\dfrac{\text{ا}}{\text{س}}\right)$

(١٢) $\dfrac{\text{ا}^2-\text{س}^2}{\text{ا}^2+\text{ا}\,\text{س}+\text{س}^2}\div\dfrac{\left(1-\frac{\text{س}}{\text{ا}}\right)^3\left(1+\frac{\text{س}}{\text{ا}}\right)^3}{\text{ا}^3-\text{س}^3}$

(١٣) $\dfrac{\text{س}^4-2\,\text{س}^2+1}{3\,\text{س}^5-10\,\text{س}^3+15\,\text{س}-8}$

(١٤) $\dfrac{\text{ا}^3+\text{ا}(1+\text{ا})\,\text{ص}+\text{ص}^2}{\text{ا}^4-\text{ص}^2}$

(١٥) $\dfrac{1}{\text{ا}}+\dfrac{2}{\text{ا}+1}+\dfrac{3}{\text{ا}+2}-\dfrac{\frac{4}{\text{ا}}}{1+\frac{1}{\text{ا}}}$

(١٦) $\dfrac{\text{س}+3}{2\,\text{س}^2+9\,\text{س}+6}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2\,\text{س}-3}-\dfrac{1}{\text{س}-\frac{9}{4\,\text{س}}}$

(١٧) $\dfrac{2}{\text{س}^3+\text{س}^2+\text{س}+1}-\dfrac{2}{\text{س}^3-\text{س}^2+\text{س}-1}$

(١٨) $\dfrac{1-\text{ا}^2}{(1+\text{ا}\,\text{س})^2-(\text{ا}+\text{س})^2}\div\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-\text{س}}+\dfrac{1}{1+\text{س}}\right)$

(١٩) $\dfrac{2\,\text{س}^3-\text{س}^2-2\,\text{س}+1}{\text{س}^2-3\,\text{س}+2}$

(٢٠) $\dfrac{\text{س}^2-6\,\text{س}+8}{4\,\text{س}^3-21\,\text{س}^2+15\,\text{س}+20}$

(٢١) $\dfrac{12}{(\text{س}-2\,\text{ا})^2}-\dfrac{\text{س}-\text{ا}}{\text{س}^2-5\,\text{ا}\,\text{س}+6\,\text{ا}^2}+\dfrac{2}{\text{س}-3\,\text{ا}}$

(٢٢) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\text{ا}^2+\text{س}^2}{\text{ا}^2-\text{س}^2}\right)-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1+\text{س}}{1-\text{س}}-\left(\dfrac{1}{1+\text{س}}\right)^2$

(٢٣) $\dfrac{\text{س}}{2}\left(\dfrac{1}{\text{س}-\text{ص}}-\dfrac{1}{\text{س}+\text{ص}}\right)\times\dfrac{\text{س}^2-\text{ص}^2}{\text{س}^2\,\text{ص}+\text{س}\,\text{ص}^2}\div\dfrac{1}{\text{س}+\text{ص}}$

(٢٤) $\dfrac{1}{\text{س}+\text{ص}}\div\left[\dfrac{\text{ص}}{2}\left(\dfrac{1}{\text{س}+\text{ص}}+\dfrac{1}{\text{س}-\text{ص}}\right)\times\dfrac{\text{س}^2-\text{ص}^2}{\text{س}^2\,\text{ص}+\text{س}\,\text{ص}^2}\right]$

(٢٥) $\left(3\,\text{س}-5-\dfrac{2}{\text{س}}\right)\left(3\,\text{س}+5-\dfrac{2}{\text{س}}\right)\div\left(\text{س}-\dfrac{4}{\text{س}}\right)$

(٢٦) $\left\{\dfrac{2}{\text{س}}-\dfrac{1}{1+\text{س}}+\dfrac{1}{1-\text{س}}\right\}\div\left(\dfrac{1+\text{س}}{1-\text{س}}-\dfrac{1-\text{س}}{1+\text{س}}\right)$

(٢٧) $\dfrac{1}{\text{س}-1}-\dfrac{2\,\text{س}-\frac{1}{2\,\text{س}}}{4\,\text{س}^2-1}$

(٢٨) $\left(\text{ب}+\frac{\text{أب}}{\text{ب}-\text{أ}}\right)\left(\text{ب}-\frac{\text{أب}}{\text{أ}+\text{ب}}\right)\left(\frac{\text{ب}^{٢}-\text{أ}^{٢}}{\text{ب}^{٢}+\text{أ}^{٢}}\right)$

(٢٩) $\left\{\frac{\text{ب}+\frac{\text{أ}-\text{ب}}{١+\text{أب}}}{١-\frac{(\text{أ}-\text{ب})\text{ب}}{١+\text{أب}}}-\frac{\text{أ}-\frac{\text{أ}-\text{ب}}{١-\text{أب}}}{١-\frac{\text{أ}(\text{أ}-\text{ب})}{١-\text{أب}}}\right\}\div\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}-\frac{\text{ب}}{\text{أ}}\right)$

(٣٠) $\frac{\frac{\text{س}^{٢}+\text{ص}^{٢}}{\text{ص}}-\text{س}}{\frac{١}{\text{ص}}-\frac{١}{\text{س}}}\times\frac{\text{س}^{٢}-\text{ص}^{٢}}{\text{س}^{٣}+\text{ص}^{٣}}$

(٣١) $\frac{٢\left(\text{س}-\frac{١}{٤}\right)}{٢\text{س}+١}+\frac{١}{٢}$

(٣٢) $\frac{\text{أ}+\frac{\text{ب}-\text{أ}}{١+\text{ب}}}{١-\frac{\text{أ}(\text{ب}-\text{أ})}{١+\text{أب}}}\times\frac{\frac{\text{س}+\text{ص}}{١-\text{س}\text{ص}}-\text{ص}}{١+\frac{\text{ص}(\text{س}+\text{ص})}{١-\text{س}\text{ص}}}$

(٣٣) $\frac{\frac{\text{أ}+\text{ب}}{\text{أ}-\text{ب}}+\frac{\text{أ}-\text{ب}}{\text{أ}+\text{ب}}}{\frac{\text{أ}-\text{ب}}{\text{أ}+\text{ب}}-\frac{\text{أ}+\text{ب}}{\text{أ}-\text{ب}}}\times\frac{\text{أ}\text{ب}^{٣}-\text{أ}^{٣}\text{ب}}{\text{أ}^{٢}+\text{ب}^{٢}}$

(٣٤) $\frac{(١-\text{س}^{٢})(١-\text{س}^{٣})}{\text{س}(١+\text{س})(١-\text{س})^{٢}}-\frac{\text{س}^{٣}+\frac{١}{\text{س}^{٣}}}{\text{س}^{٢}+\frac{١}{\text{س}^{٢}}-١}$

(٣٥) $\left\{\text{س}^{٣}-\frac{١}{\text{س}^{٣}}-٣\left(\text{س}-\frac{١}{\text{س}}\right)\right\}\div\left(\text{س}-\frac{١}{\text{س}}\right)$

(٣٦) $\frac{١+\frac{١}{\text{م}}}{\frac{١}{\text{م}}}\times\frac{\frac{١}{\text{م}}}{\text{م}+\frac{١}{\text{م}}}\div\frac{\frac{١}{\text{م}}}{\text{م}-١+\frac{١}{\text{م}}}$

(٣٧) $\frac{\frac{\text{س}}{\text{ص}}+\frac{\text{ص}}{\text{س}}-١}{\frac{\text{س}^{٢}}{\text{ص}^{٢}}+\frac{\text{س}}{\text{ص}}+١}\times\frac{١+\frac{\text{ص}}{\text{س}}}{\text{س}-\text{ص}}\div\frac{١+\frac{\text{ص}^{٣}}{\text{س}^{٣}}}{\frac{\text{س}^{٢}}{\text{ص}}-\frac{\text{ص}^{٢}}{\text{س}}}$

(٣٨) $\frac{\left(\frac{٣\text{س}+\text{س}^{٣}}{١+٣\text{س}^{٢}}\right)^{٢}-١}{\frac{٣\text{س}-١}{\text{س}^{٣}-٣\text{س}}+١}\div\frac{\frac{٩}{\text{س}^{٢}}-\frac{٣٣-\text{س}^{٢}}{٣\text{س}^{٢}+١}}{\frac{٣}{\text{س}^{٢}}-\frac{٢(\text{س}^{٢}+٣)}{(\text{س}^{٣}-\text{س})^{٢}}}$

(٣٩) $\frac{١}{\text{أ}^{٢}-٢}-\frac{٢}{\text{أ}^{٢}-١}+\frac{٢}{\text{أ}^{٢}+١}-\frac{١}{\text{أ}^{٢}+٢}$

(٤٠) $\frac{١}{٦\text{م}-٢\text{ن}}+\frac{١}{٣\text{م}+٢\text{ن}}-\frac{٣}{٦\text{م}+٢\text{ن}}$

(٤١) $\frac{٣}{٤(١-\text{س})^{٢}}+\frac{٣}{٨(١-\text{س})}+\frac{١}{٨(١+\text{س})}+\frac{\text{س}-١}{٤(١+\text{س}^{٢})}$

(٤٢) $\frac{4}{9(\text{س}-2)}+\frac{5}{9(\text{س}+1)}-\frac{1}{3(\text{س}+1)^2}-\frac{1}{\text{س}+2+\frac{1}{\text{س}}}$

(٤٣) $\left(\frac{\text{س}^2}{\text{ص}}+\frac{\text{ص}^2}{\text{س}}\right)\left(\frac{1}{\text{ص}^2-\text{س}^2}\right)-\frac{\text{ص}}{\text{س}^2+\text{س}\,\text{ص}}+\frac{\text{س}}{\text{س}\,\text{ص}-\text{ص}^2}$

(٤٤) $\frac{\text{س}^2-(\text{ص}-\text{ع})^2}{(\text{س}+\text{ع})^2-\text{ص}^2}+\frac{\text{ص}^2-(\text{ع}-\text{س})^2}{(\text{س}+\text{ص})^2-\text{ع}^2}+\frac{\text{ع}^2-(\text{س}-\text{ص})^2}{(\text{ص}+\text{ع})^2-\text{س}^2}$

(٤٥) $\frac{\text{س}^2-(\text{ص}-2\text{ع})^2}{(2\text{ع}+\text{س})^2-\text{ص}^2}+\frac{\text{ص}^2-(2\text{ع}-\text{س})^2}{(\text{س}+\text{ص})^2-4\text{ع}^2}+\frac{4\text{ع}^2-(\text{س}-\text{ص})^2}{(\text{ص}+2\text{ع})^2-\text{س}^2}$

(٤٦) $\frac{(\text{س}-\text{ص})(\text{ص}-\text{ع})+(\text{ص}-\text{ع})(\text{ع}-\text{س})+(\text{ع}-\text{س})(\text{س}-\text{ص})}{\text{س}(\text{ع}-\text{س})+\text{ص}(\text{س}-\text{ص})+\text{ع}(\text{ص}-\text{ع})}$

(٤٧) $\frac{\text{ا}-\text{ب}-\text{ح}}{(\text{ا}-\text{ب})(\text{ا}-\text{ح})}+\frac{\text{ب}-\text{ح}-\text{ا}}{(\text{ب}-\text{ح})(\text{ب}-\text{ا})}+\frac{\text{ح}-\text{ا}-\text{ب}}{(\text{ح}-\text{ا})(\text{ح}-\text{ب})}$

(٤٨) $\frac{\text{ح}+\text{ا}}{(\text{ا}-\text{ب})(\text{ا}-\text{ح})}+\frac{\text{ا}+\text{ب}}{(\text{ب}-\text{ح})(\text{ب}-\text{ا})}+\frac{\text{ب}+\text{ح}}{(\text{ح}-\text{ا})(\text{ح}-\text{ب})}$

(٤٩) $\frac{\text{س}^2-(2\text{ع}-3\text{ص})^2}{(3\text{ص}+\text{س})^2-4\text{ع}^2}+\frac{4\text{ع}^2-(3\text{ص}-\text{س})^2}{(\text{س}+2\text{ع})^2-9\text{ص}^2}+\frac{9\text{ص}^2-(\text{س}-2\text{ع})^2}{(2\text{ع}+3\text{ص})^2-\text{س}^2}$

(٥٠) $\frac{9\text{ص}^2-(4\text{ع}-2\text{س})^2}{(2\text{س}+3\text{ص})^2-16\text{ع}^2}+\frac{16\text{ع}^2-(2\text{س}-3\text{ص})^2}{(3\text{ص}+4\text{ع})^2-4\text{س}^2}+\frac{4\text{س}^2-(3\text{ص}-4\text{ع})^2}{(4\text{ع}+2\text{س})^2-9\text{ص}^2}$

(٥١) $\frac{\frac{1}{\text{س}}-\frac{\text{س}+\text{ا}}{\text{س}+\text{ا}^2}}{\frac{1}{\text{ا}}-\frac{\text{ا}+\text{س}}{\text{ا}^2+\text{س}^2}}+\frac{\frac{1}{\text{س}}-\frac{\text{س}-\text{ا}}{\text{س}^2+\text{ا}^2}}{\frac{1}{\text{ا}}-\frac{\text{ا}-\text{س}}{\text{ا}^2+\text{س}^2}}$

(٥٢) $\frac{(\text{س}+\text{ا})(\text{س}+\text{ب})-(\text{ع}+\text{ا})(\text{ع}+\text{ب})}{\text{س}-\text{ع}}-\frac{(\text{س}-\text{ا})(\text{ع}-\text{ب})-(\text{س}-\text{ب})(\text{ع}-\text{ا})}{\text{ا}-\text{ب}}$

(٥٣) $\left(\frac{\text{ا}+\text{س}}{\text{ا}^2-\text{ا}\,\text{س}+\text{س}^2}-\frac{\text{ا}-\text{س}}{\text{ا}^2+\text{ا}\,\text{س}+\text{س}^2}\right)\div\left(\frac{\text{ا}^2+\text{س}^2}{\text{ا}^3-\text{س}^3}-\frac{\text{ا}^2-\text{س}^2}{\text{ا}^3+\text{س}^3}\right)$

(٥٤) $\frac{\frac{\text{س}-1}{3}+\frac{\text{س}-1}{\text{س}-2}}{\frac{\text{س}+2}{4}+\frac{\text{س}+2}{\text{س}-3}}\div\frac{\frac{\text{س}+3}{7}-\frac{\text{س}+3}{\text{س}+4}}{\frac{\text{س}-2}{3}+\frac{\text{س}-2}{\text{س}-1}}$

(٥٥) $\frac{\text{س}-2+\frac{6}{\text{س}+3}}{\text{س}-4+\frac{12}{\text{س}+3}}\times\frac{\frac{\text{س}+3}{4}-\frac{\text{س}+3}{\text{س}+1}}{\frac{\text{س}-3}{7}+\frac{\text{س}-3}{\text{س}-4}}$

(٥٦) $(\text{س}+2)\left\{1+\frac{6(\text{س}+2)}{\text{س}^2-\text{س}-6}\right\}\left\{1-\frac{5(\text{س}+1)}{\text{س}^2+3\text{س}+2}\right\}$

(٥٧) $(1+\text{ا})\div\left\{1+\frac{\text{ا}}{1-\text{ا}+\frac{\text{ا}}{1+\text{ا}+\text{ا}^2}}\right\}$

(٥٨) $\frac{\{\text{ا}\text{س}^2+(\text{ب}-\text{ح})\text{س}-\text{د}\}^2-\{\text{ا}\text{س}^2+(\text{ب}+\text{ح})\text{س}-\text{د}\}^2}{\{\text{ا}\text{س}^2+(\text{ب}+\text{هـ})\text{س}-\text{د}\}^2-\{\text{ا}\text{س}^2+(\text{ب}-\text{هـ})\text{س}-\text{د}\}^2}$

اسئلة متنوعة (٤)

[الغرض من التمرينات الآتية إعادة الدروس السابقة وهى مقسمة إلى أقسام حسب نوع كل منها وكل قسم يتضمن بعض القواعد والعمليات الهامة السابق شرحها وهذه التمرينات أكثر صعوبة كما أنها أكثر تنوعا مما سبق من مثيلاتها]

تطبيقات على التعويض (إيجاد المقدار الرقمى) والأقواس

(١) ما قيمة $\dfrac{ا + \sqrt{ا^٢ + ب^٢}}{ا^٣ - ٢ب(ا^٢ - ب^٢)}$ إذا كانت ا = − ٤ ، ب = − ٣

(٢) ماقيمة $\sqrt{٣ا^٣(ب - ح) + ٣ب^٣(ح - ا) + ٣ح^٣(ا - ب)}$ إذا كانت ا = ١ ، ب = − ١ ، ح = ٢

(٣) إختصر $ا(ب - ح)^٣ - ا(ب - ح)(٢ب^٢ - ب ح + ٢ح^٢) + (اب + اح)(ب^٢ - ح)$

وأوجد قيمة هذا المقدار إذا كانت ا = ١ ، ب = ٢ ، ح = ٣

(٤) أوجد قيمة $\sqrt[٣]{٥(ب^٢ - ح^٢) - ا^٢} + \sqrt[٤]{٣ا\{ا(ا^٢ - ح^٢) - ١\}}$ إذا كانت ا = ٤ ، ب = ٥ ، ح = ٣

(٥) أوجد قيمة $\sqrt{(س^٢ + ص^٣ + ع)(س - ص - ٣ع)} \div \sqrt[٣]{س ص^٣ ع^٢}$ إذا كانت س = − ١ ، ص = − ٣ ، ع = ١

(٦) إذا كانت ا = ٠ ، ب = ٢ ، س = ١ ، ص = − ٣ ، ع = ٥ فأوجد المقدار الرقمى للمقادير الآتية

(١) $(س - ص)^٢ - ٣ا(س - ص)^٢ + ٣ب(س^٣ - ص^٢)$

(٢) $(س - ا)^٣ - ب(س - ص + ع) + \sqrt{ب س^٢ - ا س ص + ص + ع^٢}$

(٧) إذا كانت س = ٦ ، ص = ٧ ، ع = ٨ فأوجد قيمة

(١) $س\left\{\dfrac{س}{٧} - \dfrac{٢}{٣}\left(\dfrac{ص}{٤} + ١\right)\right\} - \dfrac{٢}{٧}\left\{ص(س + ١) + \dfrac{١}{٢}(س^٢ - ٢ص) - \dfrac{٧س}{٣}\right\}$

(٢) $س\left\{ص\left(ع - \dfrac{١}{ع}\right)\right\} - \dfrac{ص}{ع}\left\{ص - ٣\left(\dfrac{س}{٣} - س ع^٢\right)\right\} - ٢س ع\left\{ص - ص\left(١ + \dfrac{ص}{٢س ع^٢}\right)\right\}$

(٨) إذا كانت ا = ٢ ، ب = − ١ ، ح = ١ فأوجد قيمة

$$\dfrac{٢ا - ب\{ح - ا(ب - ح)\}}{ا^٢(ب + ح) + ب^٢(ح + ا)} \times \sqrt{\dfrac{ا + ب ح}{ب^٢ + ٤ا ح}}$$

(٩) إذا كانت ا = − ١ ، ب = ٥ ، ح = ٣ فأوجد قيمة

$$\dfrac{ا - \left[ب - \{ا - (ب - ح)\} - \sqrt{٢ا^٢ + ب^٢ + ح^٢}\right]}{\sqrt{ح^٤ + ا^٢ ب^٢ + ٢ا^٣ ح}}$$

(١٠) إذا كانت ا = ٤ ، ب = − ٢ ، ح = $\frac{٣}{٢}$ ، ء = − ١ فأوجد قيمة

(١) $ا^٣ - ب^٣ - (ا - ب)^٣ - ١١(٣ب + ٢ح)\left(٢ح^٢ - \dfrac{ء^٢}{٢}\right)$

(٢) $\sqrt[٣]{٤ح^٢ - ا(ا - ٢ب - ء)} - \sqrt[٣]{ب^٤ ح + ١١ب^٣ ء^٢}$

(١١) إذا كانت ل = ٢/٣ ، م = − ١/٣ فأوجد قيمة

ل − م − ٣ [{ ل − م + ل م (١/ل + ١/م)^{٢} } − ٤ ل^{٢}]

(١٢) إذا كانت ا = ١ ، ب = − ١/٢ ، ح = صفرا فأوجد قيمة

(ا − [ب − ح − { ١٢ − ٢ ب − ١/٢ (٣ ح − ب) }]) ÷ (ا − ب ÷ (ح − ١/ا))

(١٣) إختصر ٤٢ { (٤ س − ٢ ص)/٦ − ٣/٧ (س − ٤/٣ ص) } − ٥٦ { ١/٧ (٣ س − ٢ ص) − ٣/٨ (١٦/٣ س − ص) }

وأوجد قيمة هذا المقدار إذا كانت س = ١/٦ ، ص = − ٣/٢

(١٤) إذا كانت س = ٦ ، ص = ٧ ، ع = ٨ فأوجد قيمة

(١) ع/س { ص − (٢ ع − س/ع) } − ص/ع [ع^{٢}/س − ٣ { ١ + ٢ ع^{٣}/(٣ س ص) } + س/٢]

(٢) ٣ ص { (٢ ص − ع)/٣ − (ص/٥ − ١) } + ص^{٢}/٥ [٣ − ع { ١٠ − س/٢ (ص − ٧) }]

التحليل إلى العوامل

(تطبيقات على البنود من ١٢٨ إلى ١٣٢)

حلل ما يأتى إلى عاملين أو أكثر

(١٥) س^{٢} + ٢١ س + ١٠٨

(١٦) ا^{٢} + ١٦ ا − ٩١

(١٧) س^{٢} − ٢٠ س ص + ٩٦ ص^{٢}

(١٨) ا^{٢} ب^{٢} − ١٤ ا ب − ٥١

(١٩) ح^{٣} + ح^{٢} − ١٥٦ ح

(٢٠) م^{٢} ن − ٦ م ن^{٢} + ٩ ن^{٣}

(٢١) ط^{٤} − ط^{٢} ى^{٢} − ٥٦ ى^{٤}

(٢٢) د^{٤} − ٤ د^{٢} ح^{٢} − ٤٥ ح^{٤}

(٢٣) س^{٣} ص − س ص^{٢} − ٤٢ س ص^{٣}

(٢٤) م^{٢} + ٢٨ م + ١٩٥

(٢٥) ٢١٠ − ا − ا^{٢}

(٢٦) ٥٧ + ١٦ ط ى − ط^{٢} ى^{٢}

(٢٧) س^{٤} + ٢٧ س^{٢} + ١٧٦

(٢٨) ا^{٤} + ٧ ا^{٢} − ٩٨

(٢٩) ح^{٢} + ٥٤ ح + ٧٢٩

(٣٠) ٧٢ + س ص − س^{٢} ص^{٢}

(٣١) ا^{٤} + ٩ ا^{٢} س^{٢} + ١٤ س^{٤}

(٣٢) ط^{٢} − ٣ ط ى − ١٠٨ ى^{٢}

(٣٣) ٢ ا^{٦} + ٢ ا^{٣} − ٢٦٤

(٣٤) س^{٤} − ٢ س^{٣} − ٦٣ س^{٢}

(٣٥) ب^{٢} ح^{٢} + ٥ ب ح − ٨٤

(٣٦) ع^{٢} + ٣٤ ع + ٢٨٩

(٣٧) ا^{٢} − ٢٢ ا ح + ٥٧ ح^{٢}

(٣٨) ص^{٣} ع + ٦ ص^{٢} ع − ٩١ ص ع

(٣٩) ٢ + س^{٣} − ٣ س^{٦}

(٤٠) ٢ ا^{٢} ب^{٢} + ا ب − ١٥

(٤١) ٩ ط^{٢} − ٢٤ ط + ١٦

(٤٢) ٣٥ + ١٢ م ن + م^{٢} ن

(٤٣) ١١٩ − ١٠ ح − ح^{٢}

(٤٤) ٦ س^{٣} − ٥ س^{٤} + س^{٥}

(٤٥) ٦ م^{٢} + ٧ م − ٣

(٤٦) ٤ ا^{٢} − ١٨ ا ب − ٥ ب^{٢}

(٤٧) ٦ ط^{٢} − ١٣ ط ن + ٢ ن^{٢}
(٤٨) ٢٠ س^{٢} − ٩ س ع − ٢٠ ع^{٢}
(٤٩) ٨ س^{٤} + ٢ س^{٢} − ١٥
(٥٠) ١٢ ص^{٢} − ٣٠ ص + ١٢
(٥١) ١٢ (أ^{٢} ب^{٢} − ١) + ١٧ أ ب
(٥٢) ٢ (أ^{٤} ب^{٢} + ٥) − ٩ أ^{٢} ب
(٥٣) ٢١ س^{٢} + ٢ ص (٥ س − ٨ ص)
(٥٤) ٣(٦ م^{٢} − ٥ ن^{٢}) + ١٧ م ن

(تطبيقات على البنود من ١٣٣ الى ١٣٧)

حلل ما يأتى إلى عاملين أو أكثر

(٥٥) ح^{٢} − أ^{٢} − ب^{٢} + ٢ أ ب
(٥٦) أ^{٢} + ٢ ب ح − ب^{٢} − ح^{٢}
(٥٧) ١٢٥ س^{٣} + ٢٧ ص^{٣}
(٥٨) أ^{٣} ب^{٣} + ٣٤٣
(٥٩) ٥١٢ ب^{٣} − أ^{٦}
(٦٠) أ^{٢} − ٤ (س − ص)^{٢}
(٦١) ٢ م ن + م^{٢} − ١ + ن^{٢}
(٦٢) ٨ ح^{٤} − ٢ ح^{٢} (ء + ح)^{٢}
(٦٣) (أ^{٢} ب^{٢} − ١)^{٢} − س^{٢} + ٢ س ص − ص^{٢}
(٦٤) ١ − ٦٤ م^{٤}
(٦٥) ط^{٣} + ١٠٠٠ ط^{٣} ق^{٣}
(٦٦) ٦٥٦١ − أ^{٤}
(٦٧) س^{٤} − ٢ س^{٢} − ص^{٢} − ع^{٢} + ٢ ص ع + ١
(٦٨) أ^{٢} − ١٦ (ب − ح)^{٢}
(٦٩) ح − ء − ٤ (ح − ء)^{٣}
(٧٠) ط^{٢} − ١٦ ق^{٢} + ط − ٤ ق
(٧١) ٢ + ١٢٨ (أ + ب)^{٣}
(٧٢) س + ٣ ص + س^{٣} + ٢٧ ص

تمرينات متنوعة على العوامل

حلل ما يأتى إلى عاملين أو أكثر

(٧٣) س^{٣} + س^{٢} ص + س ص^{٢} + ص^{٣}
(٧٤) أ ح س^{٢} + ب ح س − أ ء س − ب ء
(٧٥) ١٤ − ٥ أ − أ^{٢}
(٧٦) ٩٨ س^{٤} − ٧ س^{٢} ص^{٢} − ص^{٤}
(٧٧) ٥١ − ١٤ أ − أ^{٢}
(٧٨) ١ − (م^{٢} + ط^{٢}) − ٢ م ط
(٧٩) أ ب (س^{٢} + ١) − س (أ^{٢} + ب^{٢})
(٨٠) ٩ ب^{٢} − ٦ ب ح − ١٦ + ح^{٢}
(٨١) س ح^{٣} − ح^{٣} + س^{٢} − ١
(٨٢) ٣ س^{٢} − ٢ أ ب − س (ب − ٦ أ)
(٨٣) م^{٣} − ن^{٣} − (س^{٢} − م ن) (م − ن)
(٨٤) أ (ب^{٢} + ح^{٢} − أ^{٢})
+ ب (أ^{٢} + ح^{٢} − ب)
(٨٥) س^{٧} − س^{٣} + ٨ س^{٤} − ٨

(٨٦) ما عوامل الجذر التربيعي للمقدار
(س^{٢} + ٨ س + ٧) (٢ س^{٢} − س − ٣) (٢ س^{٢} + ١١ س − ٢١)

(٨٧) ما المقدار الذى مربعه
(٢ س^{٢} − س ص − ١٥ ص^{٢}) (٤ س^{٢} − ٢٥ ص^{٢}) (٢ س^{٢} − ١١ س ص + ١٥ ص^{٢})

(تطبيقات على العامل المشترك الأعلى والمضاعف المشترك البسيط)

(٨٨) أوجد المضاعف المشترك البسيط للمقادير الآتية

١٣ ا ب^٢ (س^٣ − ٣ ا^٢ س + ٢ ا^٣) ، ٦٥ ا^٣ ب (س^٢ + ا س − ٢ ا^٢) ، ٢٥ ب^٣ (س^٢ − ا^٢)^٢

(٨٩) أوجد العامل المشترك الأعلى للمقدارين

٢ (س^٤ + ٩) − ٥ س^٢ (س + ١) ، ٢ س^٣ (٢ س − ٩) + ٨١ (س − ١)

(٩٠) أوجد المقدار الذى يقبل القسمة على كل من المقادير الآتية بحيث تكون درجته أقل ما يمكن

(٢ س^٤ + ٤ س^٣) (س^٢ + ٢ س − ٨) ، (٢ س^٣ − ٤ س^٢) (س^٢ − ٢ س − ٨)
، (س^٢ − ٤ س) (س^٢ + ٢ س − ٨)

(٩١) أوجد المضاعف المشترك البسيط والعامل المشترك الأعلى للمقادير الثلاثة الآتية

ا (ا + ح) − ب (ب + ح) ، ب (ب + ا) − ح (ح + ا) ، ح (ح + ب) − ا (ا + ب)

(٩٢) أوجد المقدار الأعلى درجة الذى يقسم كلا من المقدارين الآتيين قسمة صحيحة

(ا + ب) (ا − ب) + ح (ح − ٢ ا) ، (ا + ح) (ا − ح) + ب (ب + ٢ ا)

(٩٣) أوجد المقدار الأصغر درجة الذى يكون المضاعف المشترك البسيط بينه وبين المقدار

٢ ا^٢ − ٣ ا ب + ب^٢

هو ٢ ا^٤ − ٣ ا^٣ ب − ا^٢ ب^٢ + ٣ ا ب^٣ − ب^٤

(٩٤) بين أن س^٢ − ٤ ص^٢ العامل المشترك الأعلى للمقادير

س^٤ − ٣ س^٢ ص^٢ − ٤ ص^٤ ، س^٦ − ٦٤ ص^٦

، س^٥ + ٣٢ ص^٥ − ٨ س^٣ ص^٢ + ٢ س^٤ ص + ١٦ س ص^٤ − ١٦ س^٢ ص^٢

(٩٥) أوجد المضاعف المشترك البسيط للمقادير

(ا − ح)^٢ − (ب − ح)^٢ ، ا^٢ + ب^٢ − ٢ ا ح − ٢ ب ح + ٢ ا ب ، ا^٤ − ب^٤

(٩٦) بين أن المضاعف المشترك البسيط للمقادير

ا (ا − ب)^٢ − ا ح^٢ ، ا^٢ ب − ب (ب − ح)^٢ ، (ا + ح)^٢ ح − ب^٢ ح

هو ا ب ح (ا^٤ + ب^٤ + ح^٤ − ٢ ب^٢ ح^٢ − ٢ ح^٢ ا^٢ − ٢ ا^٢ ب^٢)

(٩٧) برهن على أن العامل المشترك الأعلى والمضاعف المشترك البسيط للمقدارين

س^٤ − ١٥ س^٣ + ٧٥ س^٢ − ١٤٥ س + ٨٤

، س^٤ − ١٧ س^٣ + ١٠١ س^٢ − ٢٤٧ س + ٢١٠

هما هما للمقدارين

س^٤ − ١٣ س^٣ + ٥٣ س^٢ − ٨٣ س + ٤٢

، س^٤ − ١٩ س^٣ + ١٣١ س^٢ − ٣٨٩ س + ٤٢٠

(تطبيقات على اختصار الكسور)

إختصر كلا من الكسور الآتية

(٩٨) $\frac{١+س+س^{٢}}{١-س^{٣}} + \frac{س-س^{٢}}{(١-س)^{٣}}$

(٩٩) $\frac{٢س-٧}{(س-٣)^{٢}} - \frac{٢(س+٢)}{س^{٢}-٩}$

(١٠٠) $\frac{١}{٢س^{٢}-\frac{١}{٢}} + \frac{١}{(٢س+١)^{٢}}$

(١٠١) $\frac{(س+١)^{٣}-(س-١)^{٣}}{٣س^{٢}+س}$

(١٠٢) $\frac{١}{(١-س)^{٢}} + \frac{٢}{١-س^{٢}} + \frac{١}{(١+س)^{٢}}$

(١٠٣) $\frac{(س^{٣}-٢س)^{٢}-(س^{٢}-٢)^{٢}}{(س-١)(س+١)(س^{٢}-٢)^{٢}}$

(١٠٤) $\frac{١}{٦س-٢} - \frac{١}{٢(س-\frac{١}{٣})} - \frac{١}{١-٣س}$

(١٠٥) $\frac{س}{٩} + \frac{٢}{٣} + \frac{٤}{س-٦} \div \frac{٢}{٣} \times \frac{١}{١-\frac{٦}{س}}$

(١٠٦) $\frac{س}{س^{٢}-ص^{٢}} - \frac{١}{س-ص} + \frac{١}{س+ص} + \frac{١}{س} - \frac{١}{ص} + \frac{س^{٢}-س ص+ص^{٢}}{س ص(س-ص)}$

(١٠٧) $\left(س-ص-\frac{٤ص^{٢}}{س-ص}\right)\left(س+ص-\frac{٤س^{٢}}{س+ص}\right) \div \left\{٣(س+ص)-\frac{٨س ص}{س-ص}\right\}$

(١٠٨) $\frac{ا^{٤}+ب^{٤}+ا ب(ا^{٢}+ب^{٢})}{(ا+ب)^{٢}} - \frac{ا^{٤}+ب^{٤}-ا ب(ا^{٢}+ب^{٢})}{(ا-ب)^{٢}} + \frac{١٢ا^{٢}ب^{٢}}{(ا+ب)^{٢}-(ا-ب)^{٢}}$

(١٠٩) $\frac{(ا ح+ب د)^{٣}-(ا د+ب ح)^{٣}}{(ا-ب)(ح-د)} - \frac{(ا ح+ب د)^{١}+(ا د+ب ح)^{٣}}{(ا+ب)(ح+د)}$

(١١٠) $\left[\left(\frac{س}{ا}\right)^{٢} + \left(\frac{ع-س}{ب}\right)^{٢}\right] \div \left[\frac{ع^{٢}}{ا^{٢}+ب^{٢}} + \frac{ا^{٢}+ب^{٢}}{ا^{٢}ب^{٢}}\left(س-\frac{ع ا^{٢}}{ا^{٢}+ب^{٢}}\right)^{٢}\right]$

(١١١) $\frac{س^{٤}-(س-١)^{٢}}{(س^{٢}+١)^{٢}-س^{٢}} + \frac{س^{٢}-(س^{٢}-١)^{٢}}{س^{٢}(س+١)^{٢}-١} + \frac{س^{٢}(س-١)^{٢}-١}{س^{٤}-(س+١)^{٢}}$

(١١٢) $\frac{\frac{١+س}{١-س} + \frac{٤س}{١+س^{٢}} + \frac{٨س}{١-س^{٢}} - \frac{١-س}{١+س}}{\frac{١+س^{٢}}{١-س^{٢}} + \frac{٤س^{٢}}{١+س^{٤}} - \frac{١-س^{٢}}{١+س^{٢}}}$

(١١٣) $\left\{\frac{ف}{ك-\frac{ك^{٢}}{ف}} + \frac{ك}{ف-\frac{ف^{٢}}{ك}}\right\} \times \frac{١}{\frac{ف^{٢}}{ك}-\frac{ك^{٢}}{ف}}$

(١١٤) $\frac{١}{س-\frac{٢}{س+\frac{١}{٢}}} \times \frac{١}{٢+\frac{١}{س}} \div \frac{س}{٢س-\frac{س+٤}{س+١}}$

(١١٥) $\dfrac{\text{س}}{1+\dfrac{\text{س}}{1-\text{س}+\dfrac{\text{س}}{1+\text{س}}}} \div \dfrac{1+\text{س}+\text{س}^2}{1+3\text{س}+3\text{س}^2+2\text{س}^3}$

(١١٦) $\dfrac{\text{ا}\text{ب}}{\text{ا}+\text{ب}}\left(3\text{ح}+\dfrac{\text{ب}}{\text{ا}}\right) - \dfrac{\text{ب}^2}{(\text{ا}+\text{ب})^3}(\text{ا}^2+\text{ب}^2) - 2\text{ا}\left(\dfrac{\text{ب}}{\text{ا}+\text{ب}}\right)^3$

(١١٧) $\dfrac{\dfrac{(\text{ا}+\text{ب})^2+(\text{ا}-\text{ب})^2}{\text{ب}-\text{ا}}-(\text{ا}+\text{ب})}{\dfrac{1}{\text{ب}-\text{ا}}-\dfrac{1}{\text{ا}+\text{ب}}} \div \dfrac{(\text{ا}+\text{ب})^3+(\text{ب}-\text{ا})^3}{(\text{ا}+\text{ب})^2-(\text{ا}-\text{ب})^2}$

(١١٨) $\left\{\dfrac{\text{ح}-\text{ب}}{(\text{ا}-\text{ب})(\text{ا}-\text{ح})} - \dfrac{\text{ح}-\text{ا}}{(\text{ب}-\text{ح})(\text{ب}-\text{ا})} + \dfrac{\text{ب}-\text{ا}}{(\text{ح}-\text{ا})(\text{ح}-\text{ب})}\right\} \div \dfrac{2(\text{ا}^2+\text{ب}^2+\text{ح}^2-\text{ب}\text{ح}-\text{ح}\text{ا}-\text{ا}\text{ب})}{(\text{ا}-\text{ب})(\text{ب}-\text{ح})(\text{ح}-\text{ا})}$

البـاب الثالث والعشرون ـ معادلات أصعب من السابقة

بند ١٨٦ ــ سنبحث فى هذا الباب فى عدة معادلات متنوّعة يقصد من بعضها إعادة ما تقدّم من الطرق الواردة فى الأبواب السابقة أما البعض الآخر فأكثر صعوبة ويلزم لتسهيل حله استعمال طرق خاصة به وسيظهر من الأمثلة الآتية المحلولة حلا وافيا أكثر هذه الطرق نفعا

(مثـال ١) لحل $\dfrac{6\text{س}-3}{2\text{س}+7} = \dfrac{3\text{س}-2}{\text{س}+5}$

نضرب فيحدث أن $(6\text{س}-3)(\text{س}+5) = (3\text{س}-2)(2\text{س}+7)$

أى أن $6\text{س}^2+27\text{س}-15 = 6\text{س}^2+17\text{س}-14$

$\therefore \quad 10\text{س} = 1$

$\therefore \quad \text{س} = \dfrac{1}{10}$

(ملاحظة) قد يسهل تحويل كثير من المعادلات إلى الصورة الموضوعة بها المعادلة السابقة ومتى تم ذلك لايبقى سوى أن نجرى ما يسمى بالضرب التبادلى لإكمال حلها

(مثـال ٢) لحل $\dfrac{8\text{س}+23}{20} - \dfrac{5\text{س}+2}{3\text{س}+4} = \dfrac{2\text{س}+3}{5} - 1$

نضرب كل حدّ فى ٢٠ (قبل عملية الضرب التبادلى) فيحدث أن

$8\text{س}+23 - \dfrac{20(5\text{س}+2)}{3\text{س}+4} = 8\text{س}+12-20$

وبالنقل يحدث أن $31 = \dfrac{20(5\text{س}+2)}{3\text{س}+4}$

وبالضرب التبادلى نجد أن $93\text{س}+124 = 20(5\text{س}+2)$

$84 = 7\text{س}$

$\therefore \quad \text{س} = 12$

واذا وجدت فى المعادلة كسور ذات مقامات متحدة توضع فى طرف واحد ثم تختصر

(مثال ٣) حل $\frac{١٣ - ٢\text{س}}{\text{س} + ٣} + \frac{٢٣\text{س} + ٨\frac{١}{٣}}{٤\text{س} + ٥} = \frac{١٦ - \frac{١}{٤}\text{س}}{\text{س} + ٣} + ٤$

نقول إنه بالنقل يحدث أن $\frac{٢٣\text{س} + ٨\frac{١}{٣}}{٤\text{س} + ٥} - ٤ = \frac{١٦ - \frac{١}{٤}\text{س} - ١٣ + ٢\text{س}}{\text{س} + ٣}$

$\therefore \quad \frac{٧\text{س} - \frac{٣٥}{٣}}{٤\text{س} + ٥} = \frac{٣ + \frac{٧\text{س}}{٤}}{\text{س} + ٣}$

وبالضرب التبادلى يحدث أن

$$٧\text{س} - \frac{٣٥\text{س}}{٣} + ٢١\text{س} - ٣٥ = ١٢\text{س} + ٧\text{س}^٢ + ١٥ + \frac{٣٥\text{س}}{٤}$$

$\therefore \quad -\frac{١٣٧\text{س}}{١٢} = ٥٠$

$\therefore \quad \text{س} = -\frac{٦٠٠}{١٣٧}$

(مثال ٤) حل $\frac{\text{س} - ٨}{\text{س} - ١٠} + \frac{\text{س} - ٤}{\text{س} - ٦} = \frac{\text{س} - ٥}{\text{س} - ٧} + \frac{\text{س} - ٧}{\text{س} - ٩}$

نقول إنه يمكن حل هـذه المعادلة بحذف الكسور ولكن هذا يستدعى عملا شاقا ويمكننا تسهيل العمل لو اتبعنا الحل الآتى

بالنقل يحدث أن $\frac{\text{س} - ٨}{\text{س} - ١٠} - \frac{\text{س} - ٥}{\text{س} - ٧} = \frac{\text{س} - ٧}{\text{س} - ٩} - \frac{\text{س} - ٤}{\text{س} - ٦}$

وباختصار كل طرف من المعادلة على حدته نجد أن

$$\frac{(\text{س} - ٨)(\text{س} - ٧) - (\text{س} - ٥)(\text{س} - ١٠)}{(\text{س} - ١٠)(\text{س} - ٧)} = \frac{(\text{س} - ٧)(\text{س} - ٦) - (\text{س} - ٤)(\text{س} - ٩)}{(\text{س} - ٩)(\text{س} - ٦)}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{س}^٢ - ١٥\text{س} + ٥٦ - (\text{س}^٢ - ١٥\text{س} + ٥٠)}{(\text{س} - ١٠)(\text{س} - ٧)} = \frac{\text{س}^٢ - ١٣\text{س} + ٤٢ - (\text{س}^٢ - ١٣\text{س} + ٣٦)}{(\text{س} - ٩)(\text{س} - ٦)}$$

$$\therefore \quad \frac{٦}{(\text{س} - ١٠)(\text{س} - ٧)} = \frac{٦}{(\text{س} - ٩)(\text{س} - ٦)}$$

ولكون البسطين متساويين يلزم أن يتساوى المقامان بمعنى أن

$$(\text{س} - ١٠)(\text{س} - ٧) = (\text{س} - ٩)(\text{س} - ٦)$$

أى أن $\text{س}^٢ - ١٧\text{س} + ٧٠ = \text{س}^٢ - ١٥\text{س} + ٥٤$

$\therefore \quad ١٦ = ٢\text{س}$

$\therefore \quad \text{س} = ٨$

ويمكن حل المعادلة نفسها بطريقة دقيقة كما يأتى

يمكننا أن نكتب المعادلة بالصورة الآتية

$$\frac{(\text{س} - ١٠) + ٢}{\text{س} - ١٠} + \frac{(\text{س} - ٦) + ٢}{\text{س} - ٦} = \frac{(\text{س} - ٧) + ٢}{\text{س} - ٧} + \frac{(\text{س} - ٩) + ٢}{\text{س} - ٩}$$

ومنها نجد أن $١ + \frac{٢}{\text{س} - ١٠} + ١ + \frac{٢}{\text{س} - ٦} = ١ + \frac{٢}{\text{س} - ٧} + ١ + \frac{٢}{\text{س} - ٩}$

أى أن $\frac{١}{\text{س} - ١٠} + \frac{١}{\text{س} - ٦} = \frac{١}{\text{س} - ٧} + \frac{١}{\text{س} - ٩}$

وبالنقل نجد أن $\frac{1}{\text{س}-10}-\frac{1}{\text{س}-7}=\frac{1}{\text{س}-9}-\frac{1}{\text{س}-6}$

$\therefore \frac{3}{(\text{س}-10)(\text{س}-7)}=\frac{3}{(\text{س}-9)(\text{س}-6)}$

ثم نتابع السير فى العملية كما سبق

(مثال ٥) لحل $\frac{5\text{س}-64}{\text{س}-13}-\frac{2\text{س}-11}{\text{س}-6}=\frac{4\text{س}-55}{\text{س}-14}-\frac{\text{س}-6}{\text{س}-7}$

نقول إننا نرى أن $5+\frac{1}{\text{س}-13}-\left(2+\frac{1}{\text{س}-6}\right)=4+\frac{1}{\text{س}-14}-\left(1+\frac{1}{\text{س}-7}\right)$

$\therefore \frac{1}{\text{س}-13}-\frac{1}{\text{س}-6}=\frac{1}{\text{س}-14}-\frac{1}{\text{س}-7}$

ثم نتمم الحل كما سبق فنجد أن $\text{س}=10$

(تمارين ٢٣ ا)

حل المعادلات الآتية

(١) $\frac{\text{س}+4}{3\text{س}-8}=\frac{\text{س}+5}{3\text{س}-7}$

(٢) $\frac{3\text{س}+1}{3(\text{س}-2)}=\frac{\text{س}-2}{\text{س}-1}$

(٣) $\frac{7-5\text{س}}{1+\text{س}}=\frac{11-15\text{س}}{1+3\text{س}}$

(٤) $\frac{3(7+6\text{س})}{2+9\text{س}}=\frac{35+4\text{س}}{9+2\text{س}}$

(٥) $\frac{6\text{س}+13}{15}-\frac{3\text{س}+5}{5\text{س}-25}=\frac{2\text{س}}{5}$

(٦) $\frac{6\text{س}+8}{2\text{س}+1}-\frac{2\text{س}+38}{\text{س}+12}=1$

(٧) $\frac{3\text{س}-1}{2\text{س}-1}-\frac{4\text{س}-2}{3\text{س}-1}=\frac{1}{6}$

(٨) $\frac{\text{س}+25}{\text{س}-5}=\frac{2\text{س}+75}{2\text{س}-15}$

(٩) $\frac{\text{س}}{\text{س}+2}+\frac{4}{\text{س}+6}=1$

(١٠) $\frac{6\text{س}+7}{9\text{س}+6}=\frac{1}{12}+\frac{5\text{س}-5}{12\text{س}+8}$

(١١) $\frac{2\text{س}-5}{5}+\frac{\text{س}-3}{2\text{س}-15}=\frac{4\text{س}-3}{10}-1\frac{1}{10}$

(١٢) $\frac{4(\text{س}+3)}{9}=\frac{8\text{س}+37}{18}-\frac{7\text{س}-29}{5\text{س}-12}$

(١٣) $\frac{(2\text{س}-1)(3\text{س}+8)}{6\text{س}(\text{س}+4)}-1=0$

(١٤) $\frac{2\text{س}+5}{5\text{س}+3}-\frac{2\text{س}+1}{5\text{س}+2}=0$

(١٥) $\frac{4}{\text{س}+3}-\frac{2}{\text{س}+1}=\frac{5}{2\text{س}+6}-\frac{2\frac{1}{2}}{2\text{س}+2}$

(١٦) $\frac{7}{\text{س}-4}-\frac{60}{5\text{س}-30}=\frac{10\frac{1}{2}}{3\text{س}-12}-\frac{8}{\text{س}-6}$

(١٧) $\frac{3}{4-2\text{س}}+\frac{30}{8(1-\text{س})}=\frac{3}{2-\text{س}}+\frac{5}{2-2\text{س}}$

(١٨) $\frac{25-\frac{\text{س}}{3}}{\text{س}+1}+\frac{16\text{س}+4\frac{1}{5}}{3\text{س}+2}=5+\frac{23}{\text{س}+1}$

(١٩) $\frac{30+6\text{س}}{\text{س}+1}+\frac{60+8\text{س}}{\text{س}+3}=14+\frac{48}{\text{س}+1}$

(٢٠) $\frac{\text{س}}{\text{س}-2}-\frac{\text{س}+1}{\text{س}-1}=\frac{\text{س}-8}{\text{س}-6}-\frac{\text{س}-9}{\text{س}-7}$

(٢١) $\frac{\text{س}+5}{\text{س}+4}-\frac{\text{س}-6}{\text{س}-7}=\frac{\text{س}-4}{\text{س}-5}-\frac{\text{س}-15}{\text{س}-16}$

(٢٢) $\frac{\text{س}-7}{\text{س}-9}-\frac{\text{س}-9}{\text{س}-11}=\frac{\text{س}-13}{\text{س}-15}-\frac{\text{س}-15}{\text{س}-17}$

(٢٣) $\frac{\text{س}+3}{\text{س}+6}-\frac{\text{س}+6}{\text{س}+9}=\frac{\text{س}+2}{\text{س}+5}-\frac{\text{س}+5}{\text{س}+8}$

(٢٤) $\frac{\text{س}+2}{\text{س}}+\frac{\text{س}-7}{\text{س}-5}-\frac{\text{س}+3}{\text{س}+1}=\frac{\text{س}-6}{\text{س}-4}$

(٢٥) $\frac{4\text{س}-17}{\text{س}-4}+\frac{10\text{س}-13}{2\text{س}-3}=\frac{8\text{س}-30}{2\text{س}-7}+\frac{5\text{س}-4}{\text{س}-1}$

(٢٦) $\frac{5\text{س}-8}{\text{س}-2}+\frac{6\text{س}-44}{\text{س}-7}-\frac{10\text{س}-8}{\text{س}-1}=\frac{\text{س}-8}{\text{س}-6}$

(٢٧) $\frac{2\text{س}-3}{0.3\text{س}-0.4}=\frac{0.4\text{س}-0.6}{0.06\text{س}-0.07}$

(٢٨) $\frac{\text{س}-2}{0.05}-\frac{\text{س}-4}{0.0625}=56$

(٢٩) ٠,٠٨٣̇ (س − ٠,٦٢٥) = ٠,٠̇٩̇ (س − ٠,٥٩٣٧٥)

(٣٠) (٢ س + ١,٥) (٣ س − ٢,٢٥) = (٢ س − ١,١٢٥) (٣ س + ١,٢٥)

(٣١) $\frac{\text{٠,٣ س − ١}}{\text{٠,٥ س − ٠,٤}} = \frac{\text{٠,٥ + ١,٢ س}}{\text{٢ س − ٠,١}}$

(٣٢) $\frac{\text{١ − ١,٤ س}}{\text{٠,٢ + س}} = \frac{\text{٠,٧ (س − ١)}}{\text{٠,١ − ٠,٥ س}}$

(٣٣) $\frac{\text{(٠,٣ س − ٢) (٠,٣ س − ٢)}}{\text{٠,٢ س − ١}} - \frac{١}{٦}$ (٠,٣ س − ٢) = ٠,٤ س − ٢

المعادلات الحرفية

بند ١٨٧ — رأينا جميع المعاملات فى المعادلات التى حللناها حتى الآن مقادير رقمية ولكن قد تشتمل بعض المعادلات على معاملات حرفية (راجع بند ٦) وقد تعتبر هذه المعاملات كمقادير معلومة ولذا نستبقيها فى الحل

(مثال ١) لحل (س + ا) (س + ب) − ح (ا + ح) = (س − ح) (س + ح) + ا ب

نضرب الكميات المحصورة بين أقواس فنجد أن

س^{٢} + ا س + ب س + ا ب − ا ح − ح^{٢} = س^{٢} − ح^{٢} + ا ب

ومنها ينتج أن ا س + ب س = ا ح

أى أن (ا + ب) س = ا ح

∴ س = $\frac{\text{ا ح}}{\text{ا + ب}}$

(مثال ٢) لحل $\frac{\text{ا}}{\text{س − ا}} - \frac{\text{ب}}{\text{س − ب}} = \frac{\text{ا − ب}}{\text{س − ح}}$

نقول إنه باختصار الطرف الأيمن نجد أن

$\frac{\text{ا (س − ب) − ب (س − ا)}}{\text{(س − ا) (س − ب)}} = \frac{\text{ا − ب}}{\text{س − ح}}$

∴ $\frac{\text{(ا − ب) س}}{\text{(س − ا) (س − ب)}} = \frac{\text{ا − ب}}{\text{س − ح}}$

∴ $\frac{\text{س}}{\text{(س − ا) (س − ب)}} = \frac{١}{\text{س − ح}}$

وبالضرب التبادلى نجد أن س^{٢} − ح س = س^{٢} − ا س − ب س + ا ب

∴ ا س + ب س − ح س = ا ب

∴ (ا + ب − ح) س = ا ب

∴ س = $\frac{\text{ا ب}}{\text{ا + ب − ح}}$

(تمارين ٢٣ ب)

حل المعادلات الآتية

(١) $ا س - ٢ ب = ٥ ب س - ٣ ا$

(٢) $ا^{٢} (س - ا) + ب^{٢} (س - ب) = ا ب س$

(٣) $س^{٢} + ا^{٢} = (ب - س)^{٢}$

(٤) $(س - ا)(س + ب) = (س - ا + ب)^{٢}$

(٥) $ا (س - ٢) + ٢ س = ٦ + ا$

(٦) $م^{٢} (م - س) - م ن س = ن^{٢} (ن + س)$

(٧) $(ا + س)(ب + س) = س (س - ح)$

(٨) $(ا - ب)(س - ا) = (ا - ح)(س - ب)$

(٩) $\frac{٢ س + ٣ ا}{س + ا} = \frac{٢ (٣ س + ٢ ا)}{٣ س + ا}$

(١٠) $\frac{٢ (س - ب)}{٣ س - ح} = \frac{٢ س + ب}{٣ (س - ح)}$

(١١) $\frac{١}{ا} - \frac{١}{س} = \frac{١}{س} - \frac{١}{ب}$

(١٢) $\frac{٢}{٣} \left(\frac{س}{ا} + ١ \right) = \frac{٣}{٤} \left(\frac{س}{ا} - ١ \right)$

(١٣) $\frac{ا}{س} = ح (ا - ب) + \frac{ب}{س}$

(١٤) $\frac{٩ ا}{ب} - \frac{٣ س}{ب} = \frac{ب}{ا} - \frac{٢ س}{ا}$

(١٥) $\frac{س - ا}{ب - س} = \frac{س - ب}{ا - س}$

(١٦) $\frac{س - ا}{٢} = \frac{(س - ب)^{٢}}{٢ س - ا}$

(١٧) $\frac{١}{٤} س (س - ا) - \left(\frac{س + ا}{٢} \right)^{٢} = \frac{٢ ا}{٣} \left(س - \frac{ا}{٢} \right)$

(١٨) $(ا + ب) س^{٢} - ا (ب س + ا^{٢}) = ب س (س - ا) + ا س (س - ب)$.

(١٩) $ب (ا + س) - (ا + س)(ب - س) = س^{٢} + \frac{ب ح^{٢}}{ا}$

(٢٠) $ب (ا - س) - \frac{ا}{ب} (ب + س) + ا ب \left(\frac{س^{٢}}{ب} + ١ \right)^{٢} = ٠$

(٢١) $س^{٢} + ا (٢ ا - س) - \frac{٣ ب^{٢}}{٤} = \left(س - \frac{ب}{٢} \right)^{٢} + ا^{٢}$

(٢٢) $(٢ س - ا) \left(س + \frac{٢ ا}{٣} \right) = ٤ س \left(\frac{ا}{٣} - س \right) - \frac{١}{٢} (ا - ٤ س)(٢ ا + ٣ س)$

(٢٣) $\frac{س - ا + ب}{س - ا} + \frac{س - ب}{س - ٢ب} = \frac{س}{س - ب} + \frac{س - ا}{س - ا - ب}$

(٢٤) $\left(\frac{س}{ا} - ٣\right)\left(\frac{٣س}{ا} - ١\right) - \frac{١}{٢ا}(س - ٢ا)(٢س - ا) = \left(\frac{س}{ا} - ١\right)^{٢} - ١$

(٢٥) $\frac{ب(س + ا)}{س^{٢} - ب^{٢}} + \frac{٢س + ٣ب - ا}{س + ب} = \frac{٢(س^{٢} + ب س - ب^{٢})}{س^{٢} - ب^{٢}}$

(مثال ٣) لحل $ا س + ب ص = ح$ ... ... (١)

$\bar{ا} س + \bar{ب} ص = \bar{ح}$ ... ... (٢)

نقول أوّلا إن هذا الاصطلاح فى الوضع وإن لم نستعمله قبل الآن شائع فى المعادلات الجبرية . ففى المعادلة الأولى انتخبنا حرفين مخصوصين جعلناهما معاملين للجهولين $س$ ، $ص$ وفى الثانية استعملنا نفس الحرفين مع شرطة فوق كل منهما ليدلا على معاملى نفس المجهولين فيها وليس من الضرورى أن يكون هناك ارتباط بين مقدارى ($ا$ ، $\bar{ا}$) إذ يجوز أن يكونا متغايرين كتغاير $ا$ ، $ب$ ولكن كثيرا ما يحسن استعمال نفس الحرف بتغيير يسير فى شكله ليدل على معنى مشترك فهنا $ا$ ، $\bar{ا}$ يدلان على معاملى $س$ فى المعادلتين وكذا $ب$ ، $\bar{ب}$ يدلان على معاملى $ص$ وهذا يساعد الذاكرة وقد يوضع أحيانا رقم بدل الشرطة هكذا $ا_{١}$ و $ا_{٢}$ و $ا_{٣}$ ، $ب_{١}$ ، $ب_{٢}$ ، $ب_{٣}$

ولنرجع الآن إلى المعادلتين $ا س + ب ص = ح$ ... ... (١)

$\bar{ا} س + \bar{ب} ص = \bar{ح}$ ... ... (٢)

فنضرب (١) فى $\bar{ب}$ و (٢) فى $ب$ فيحدث أن

$$ا \bar{ب} س + ب \bar{ب} ص = \bar{ب} ح$$

$$\bar{ا} ب س + ب \bar{ب} ص = ب \bar{ح}$$

وبالطرح يبقى $(ا \bar{ب} - \bar{ا} ب) س = \bar{ب} ح - ب \bar{ح}$

$\therefore$ $س = \frac{\bar{ب} ح - ب \bar{ح}}{ا \bar{ب} - \bar{ا} ب}$ ... ... (٣)

ويمكن إيجاد قيمة $ص$ بوضع قيمة $س$ بدلها فى إحدى المعادلتين (١) أو (٢) كما سبق فى بند ١٠٤ ولكن يستحسن أن نوجد قيمة $ص$ بطريقة حذف $س$ كما يأتى

نضرب المعادلة (١) فى $\bar{ا}$ والمعادلة (٢) فى $ا$ فيحدث أن

$$ا \bar{ا} س + \bar{ا} ب ص = \bar{ا} ح$$

و $$ا \bar{ا} س + ا \bar{ب} ص = ا \bar{ح}$$

وبالطرح يبقى $(\bar{ا} ب - ا \bar{ب}) ص = \bar{ا} ح - ا \bar{ح}$

أى أن $ص = \frac{\bar{ا} ح - ا \bar{ح}}{\bar{ا} ب - ا \bar{ب}}$

وبتغيير علامات المقام فى مقدار $ص$ ليكون مساويا للمقام فى مقدار $س$ نرى أن

$$ص = \frac{ا \bar{ح} - \bar{ا} ح}{ا \bar{ب} - \bar{ا} ب} ، \quad س = \frac{\bar{ب} ح - ب \bar{ح}}{ا \bar{ب} - \bar{ا} ب}$$

(مثال ٤) لحل المعادلتين (س − ا)/(ح − ا) + (ص − ب)/(ح − ب) = ١ .... (١)

(س + ا)/ح + (ص − ا)/(ب − ا) = ا/ح .... (٢)

نحو الكسرين من (١) فنجد أن

س (ح − ب) − ا (ح − ب) + ص (ح − ا) − ب (ح − ا) = (ح − ا) (ح − ب)

أى أن س (ح − ب) + ص (ح − ا) = اح − اب + ب ح − اب + ح^2 − اح − ب ح + اب

وبعبارة أخرى س (ح − ب) + ص (ح − ا) = ح^2 − اب .... (٣)

وينتج أيضا من (٢) أن

س (ا − ب) + ا (ا − ب) + ح ص − ح ا = ا (ا − ب)

أى أن س (ا − ب) + ح ص = اح .... (٤)

وبضرب (٣) فى ح و (٤) فى ح − ا ثم بالطرح ينتج أن

س {ح (ح − ب) − (ح − ا) (ا − ب)} = ح^3 − اب ح − اح (ح − ا)

أى أن س (ح^2 − اح + ا^2 − اب) = ح (ح^2 − اب − اح + ا^2)

∴ س = ح

ومن (٤) ص = ب

(تمارين ٢٣ ح)

حل المعادلات الآتية

(١) ا س + ب ص = ل
ب س + ا ص = م

(٢) ل س + م ص = ن
ط س + ق ص = ر

(٣) ا س = ب ص
ب س + ا ص = ح

(٤) ا س + ب ص = ا^2
ب س + ا ص = ب^2

(٥) س + ا ص = ا′
ا س + ا′ ص = ١

(٦) ط س − ق ص = ر
ر س − ط ص = ق

(٧) س/ا + ص/ب = ١/(اب)
س/ا′ − ص/ب′ = ١/(ا′ب′)

(٨) س/ا − ص/ب = ٠
ب س + ا ص = ٤ اب

(٩) ٣س/ا + ٢ص/ب = ٣
٩س/ا − ٦ص/ب = ٣

(١٠) ق س − ر ب = ط (ا − ص)
ق س/ا + ر = ط (١ + ص/ب)

(١١) س/م + ص/م = ١
س/م − ص/م = ١

(١٢) ط س + ق ص = ٠
ل س + م ص = ن

(١٣) $(ا - ب)\ س = (ا + ب)\ ص$
$س + ص = ح$

(١٤) $(ا-ب)س+(ا+ب)ص = ٢ا^{٢} - ٢ب^{٢}$
$(ا+ب)س-(ا-ب)ص = ٤اب$

(١٥) $\frac{س}{ا} + \frac{ص}{ب} = ١$
$\frac{س}{٣ا} + \frac{ص}{٦ب} = \frac{٢}{٣}$

(١٦) $\frac{س}{ا} + \frac{ص}{ب} = ٢$
$\frac{س}{ا} = \frac{ص}{ب}$

(١٧) $\frac{س}{ا} - \frac{ص}{ب} = ١$
$\frac{س}{ب} + \frac{ص}{ا} = \frac{١}{ب}$

(١٨) $\frac{م}{ل}\ س + \frac{ل}{م}\ ص = \left(\frac{١}{ل} + \frac{١}{م}\right)(م^{٢} + ل^{٢})$
$(س+ص)(م^{٢}+ل^{٢}) = ٢(م^{٣}+ل^{٣}) + م\ ل\ (س + ص)$

(١٩) $ب\ س + ح\ ص = ا + ب$
$ا\ س \left(\frac{١}{ا-ب} - \frac{١}{ا+ب}\right) + ح\ ص \left(\frac{١}{ب-ا} - \frac{١}{ب+ا}\right) = \frac{٢ا}{ا+ب}$

(٢٠) $(ا - ب)\ س + (ا + ب)\ ص = ٢(ا^{٢} - ب^{٢})$
$ا\ س - ب\ ص = ا^{٢} + ب^{٢}$

(٢١) $س \left(ا - ب + \frac{ا\ ب}{ا-ب}\right) = ص \left(ا + ب - \frac{ا\ ب}{ا+ب}\right)$
$س + ص = ٢ا^{٣}$

الباب الرابع والعشرون – مسائل أصعب من المتقدّمة

بند ١٨٨ – أتينا فى الأبواب السابقة بمسائل يؤدّى حلها إلى استعمال معادلات من الدرجة الأولى وسنأتى فى هذا الباب بمعادلات أخرى أصعب منها

(مثال ١) اشترى بقال ١٥ رطلا من التين ٦ ٢٨ رطلا من الزيتون بمبلغ ١٠١ قرش فوجد أنه يكسب ١٢,٣ قرشا إذا باع التين بخسارة ١٠ فى المائة والزيتون بمكسب ٣٠ فى المائة فبكم اشترى الرطل من النوعين

نفرض أن ثمن شراء الرطل من التين س من القروش وثمن شراء الرطل من الزيتون ص من القروش فيكون مجموع ما صرفه ١٥ س + ٢٨ ص من القروش

أى أن $١٥\ س + ٢٨\ ص = ١٠١$ .... (١)

والخسارة فى التين $\frac{١}{١٠} \times ١٥\ س$ من القروش والمكسب فى الزيتون $\frac{٣}{١٠} \times ٢٨\ ص$ من القروش

فالمكسب الصافى $\frac{٤٢ص}{٥} - \frac{٣س}{٢}$ من القروش

$\therefore$ $\frac{٤٢ص}{٥} - \frac{٣س}{٢} = ١٢,٣$ .... (٢)

ومن (١) ٦ (٢) يستنتج أن س = ٣ ٦ ص = ٢ أى أنه اشترى رطل التين بمبلغ ٣ قروش ورطل الزيتون بمبلغ قرشين

(مثال ٢) فى أى وقت بين الساعة ٤ و ٥ يسبق عقرب الدقائق عقرب الساعات بثلاث عشرة دقيقة

نفرض أن س تدل على عدد الدقائق المطلوبة بعد الساعة ٤

ولكون سرعة عقرب الدقائق = سرعة عقرب الساعات ١٢ مرة فعقرب الساعات يقطع فى مدة س من الدقائق $\frac{س}{١٢}$ من الأقسام التى يساوى كل قسم منها دقيقة

ولكون عقرب الدقائق فى الساعة ٤ متأخرا عن عقرب الساعات بمقدار عشرين قسما كل منها يساوى دقيقة وفى الوقت المراد إيجاده يكون عقرب الدقائق سابقا عقرب الساعات بمقدار ثلاث عشرة دقيقة فعقرب الدقائق إذن يقطع ٢٠ + ١٣ أو ٣٣ قسما زيادة على ما يقطعه عقرب الساعات

وعلى ذلك يكون $س = \frac{س}{١٢} + ٣٣$

أى أن $\frac{١١}{١٢} س = ٣٣$

$\therefore$ $س = ٣٦$

فالوقت المطلوب هو الساعة ٤ والدقيقة ٣٦

وإذا سئلنا فى أى وقت بين الساعة ٤ والساعة ٥ يكون بين عقرب الساعات وعقرب الدقائق ١٣ دقيقة يكون للمسألة جوابان احدهما الجواب السابق والاخر فى حالة ما يكون عقرب الدقائق متأخرا عن عقرب الساعات بمقدار ١٣ دقيقة وفى هذه الحالة يقطع عقرب الدقائق زيادة على ما يقطعه عقرب الساعات

٢٠ — ١٣ قسما اى ٧ أقسام

وإذن $س = \frac{س}{١٢} + ٧$

$\therefore$ $س = ٧ \frac{٧}{١١}$

فالوقتان هما الساعة الرابعة والدقيقة $٧ \frac{٧}{١١}$ والساعة الرابعة والدقيقة ٣٦

(مثال ٣) سار شخصان ا ، ب فى آن واحد من بلدين البعد بينهما ح من الكيلومترات ومشيا فى اتجاه واحد وكانت سرعة ا هى ط من الكيلومترات فى الساعة وسرعة ب هى ن من الكيلومترات فى الساعة فما المسافة التى يمشيها ا ليلحق ب

نفرض أن ا يمشى س من الكيلومترات فيكون ب قد مشى س — ح من الكيلومترات ولكون سرعة ا هى ط من الكيلومترات فى الساعة فهو يمشى س من الكيلومترات فى $\frac{س}{ط}$ من الساعات ولكون سرعة ب هى ن من الكيلومترات فى الساعة فهو يمشى س — ح من الكيلومترات فى $\frac{س - ح}{ن}$ من الساعات ولكون هذين الزمنين متساويين يكون

$$\frac{س}{ط} = \frac{س - ح}{ن}$$

أو $ن س = ط س - ط ح$

$\therefore$ $س = \frac{ط ح}{ط - ن}$

وحينئذ ما يمشيه ا هو $\frac{ط ح}{ط - ن}$ من الكيلومترات

(مثال ٤) قطع قطار مسافة بسرعة منتظمة (أى ثابتة) ولو زادت سرعته ٦ أميال فى الساعة على سرعته التى سار بها لنقص الزمن الذى استغرقه فى قطع المسافة ٤ ساعات ولو نقصت سرعته ٦ أميال فى الساعة لزاد الزمن ٦ ساعات فما المسافة التى قطعها القطار

نفرض أن سرعة القطار س من الأميال فى الساعة ونفرض أن الزمن الذى قطع فيه المسافة المطلوبة ص من الساعات فتكون المسافة المطلوبة س ص من الأميال

وعلى مقتضى الفرض الأول تصير السرعة س + ٦ من الأميال فى الساعة والزمن ص — ٤ من الساعات فتكون المسافة التى يقطعها القطار (س + ٦) (ص — ٤) من الأميال وعلى مقتضى الفرض الثانى تكون المسافة التى يقطعها القطار (س — ٦) (ص + ٦) من الأميال

ولكون جميع هذه المقادير التى تمثل المسافة متساوية

∴ س ص = (س + ٦) (ص — ٤) = (س — ٦) (ص + ٦)

ومن هاتين المعادلتين نجد أن

س ص = س ص + ٦ ص — ٤ س — ٢٤

أو ٦ ص — ٤ س = ٢٤ ... ... (١)

وأيضا س ص = س ص — ٦ ص + ٦ س — ٣٦

أو ٦ س — ٦ ص = ٣٦ ... ... (٢)

ومن (١) ، (٢) نجد أن س = ٣٠ ، ص = ٢٤ فالمسافة المطلوبة ٧٢٠ ميلا

(مثال ٥) استثمر رجل مبلغ ٣٧٧٠ جنيها فاشترى ببعضه سندات تربح ٣ ./. بسعر ١٠٢ وبالبعض الآخر سندات سكة حديدية ربحها $\frac{١}{٢}$ ٤ ./. بسعر ٨٤ جنيها فاذا كان إيراده من هذين المصدرين $\frac{١}{٤}$ ١٣٦ من الجنيهات فى السنة فما المبلغان اللذان اشترى بهما هذين النوعين من السندات

نفرض أن س عدد الجنيهات التى استثمرها فى السندات ذات ٣ ./. ، ص عدد الجنيهات التى استثمرها فى سندات السكة الحديدية فنرى أن

س + ص = ٣٧٧٠ ... ... (١)

ولكون الايراد من السندات ذات ٣ ./. هو $\frac{٣\,\text{س}}{١٠٢}$ جنيه أى $\frac{\text{س}}{٣٤}$ جنيه

والايراد من سندات السكة الحديدية $\frac{\frac{١}{٢}٤\,\text{ص}}{٨٤}$ جنيه أى $\frac{٣\,\text{ص}}{٥٦}$ جنيه

يكون $\frac{\text{س}}{٣٤} + \frac{٣\,\text{ص}}{٥٦} = \frac{١}{٤}١٣٦$ ... ... (٢)

ومن (٢) يحدث أن س + $\frac{٥١}{٢٨}$ ص = $\frac{١}{٢}$ ٤٦٣٢

وبطرح (١) من هذه المعادلة الأخيرة ينتج أن $\frac{٢٣}{٢٨}$ ص = $\frac{١}{٢}$ ٨٦٢

∴ ص = ٢٨ × $\frac{١}{٢}$ ٣٧ = ١٠٥٠

ومن (١) س = ٢٧٢٠

فالمبلغان إذن ٢٧٢٠ جنيها اشتريت بها السندات ذات ٣ ./. ، ١٠٥٠ جنيها اشتريت بها سندات السكة الحديدية

(تمارين ٢٤)

(١) قسمت ١٠ جنيهات مصرية بين عدة أشخاص ولو زاد عدد الأشخاص مقدار الربع لنقص نصيب كل منهم ٥ قروش فما عدد الأشخاص

(٢) إشتريت عددا من البيض فدفعت قرشا فى كل أربع بيضات ثم حفظت خمس ذلك العدد وبعت الباقى كل ثلاث بيضات بقرش فكان مكسبى قرشا فكم بيضة اشتريت

(٣) إشتريت لعبا صغيرة للأطفال فدفعت ٤ قروش فى كل خمس لعب ولو أنى دفعت ٨ قروش فى كل ١١ لعبة لنقص جميع ما دفعته ٤ قروش فكم لعبة اشتريت

(٤) رجل معه مبلغ فى جيبه فأضاف إليه ضعفه ثم صرف من الجميع ٨٠ قرشا وبعد ذلك فقد $\frac{٤}{٥}$ ما بقى فى جيبه ثم حصل على مبلغ يعادل ما كان معه أوّلا فصار ما معه ٤ جنيهات فما مقدار ما كان معه أوّلا

(٥) صرفت ١٤٤٠ قرشا فى شراء ٢٠ مترا من البفتة ، ٣٠ مترا من الحرير فاذا كان عدد القطع ذات خمسة القروش المشتمل عليها ثمن المتر من الحرير يعادل عدد القطع ذات نصف القرش المشتمل عليها ثمن المتر من البفتة فما ثمن المتر من كلٍ

(٦) عدد مركب من رقمين يزيد على خمسة أمثال مجموعهما مقدار تسعة ورقم العشرات يزيد واحد على رقم الآحاد فما العدد

(٧) مجموع رقمى عدد أقل من مائة ٦ واذا انعكس وضع الرقمين ينتج عدد أقل من العدد الأصلى بثمانية عشر فما العدد

(٨) سئل رجل عن عمره فأجاب أنه إذا طرح من عمرى الحالى سنتان يساوى الباقى ضعف عمر زوجتى ومنذ ثلاث سنين كان عمرها ثلث ما سيبلغه عمرى بعد ١٢ سنة فما عمراهما

(٩) فى أىّ وقت بين الساعة ١ ، ٢ يصنع عقربا الساعة زاوية قائمة للمرّة الاولى

(١٠) فى أى وقت بين الساعة ٣ ، ٤ يسبق عقرب الدقائق عقرب الساعات بدقيقة

(١١) متى يلتقى عقربا الساعة بين الساعة ٦ و ٧

(١٢) إذا كانت الساعة الآن بين ٢ ، ٣ وبعد مضى عشر دقائق يكون عقرب الدقائق سابقا عقرب الساعات بقدر تأخره عنه الآن فما الساعة الآن

(١٣) فى انتخاب عضو لمجلس زاد عدد الأصوات التى نالها شخص على ما نالها آخر ١٦٢ وهذا يعادل $\frac{٣}{١١}$ من مجموع الأصوات فكم الأصوات التى نالها كل منهما

(١٤) إشترك عدة أشخاص فى دفع صك ولو زاد عددهم ١٠ لنقص ما يدفعه الفرد ١٠ قروش ولو نقص عددهم ٥ لزاد ما يدفعه كل فرد $\frac{١}{٢}$ ١٢ قرشا فما عدد الأشخاص وما مقدار ما يدفعه كل منهم

(١٥) صرف رجل ٥ جنيهات فى شراء نوعين من الحرير سعر المتر من أحدهما $\frac{١}{٢}$ ٢٢ قرشا ومن الآخر ٢٠ قرشا ثم باع الحرير جميعه بسعر المتر $\frac{١}{٢}$ ٢١ قرشا وكان مكسبه $\frac{١}{٥}$ ٣ ٪ فما مقدار ما اشتراه من كل نوع

(١٦) منذ عشر سنين كان مجموع عمرى ولدين ثلث عمر والدهما وأحد الولدين أكبر من الآخر بسنتين ومجموع عمريهما الان أقل من عمر والدهما بأربع عشرة سنة فما عمر كل منهما

(١٧) سار ا ، ب من نقطة واحدة بسرعتين مختلفتين وبعد أن قطع ا ١٥ ميلا ضاعف ب سرعته وبذلك أمكنه أن يلحق ا بعد ٦ ساعات فاذا كانت سرعة ا ٥ أميال فى الساعة فما السرعة التى ابتدأ بها ب

(١٨) أخذ شخص من سفط برتقال نصف ما فيه وواحدة وأخذ ثان نصف الباقى وواحدة وثالث نصف الباقى الأخير وستا وكان ما أخذه الثلاثة جميع ما فى السفط فكم برتقالة كانت فى السفط

(١٩) سبح شخص فى نهر سرعة تياره $\frac{1}{2}$ ١ من الكيلومترات فى الساعة فوجد أنه إذا سبح فى الجهة المضادة لسير التيار مسافة كيلومتر استغرق أربعة أمثال الزمن الذى يقطع فيه الكيلومتر إذا سار متجها مع التيار فما سرعة هذا الشخص فى السباحة

(٢٠) فى أىّ وقت بين الساعة ٧ و ٨ يتعامد عقربا الساعة وفى أى وقت يستقيمان

(٢١) يزيد مقام كسر على بسطه أربعة ولو طرحت ٥ من كل من الحدّين لساوى مجموع مقلوب الكسر الناتج وأربعة امثال الكسر الأصلى ٥ فما الكسر الاصلى

(٢٢) قام ساعيان من بلدين البعد بينهما ٦٠ كيلومترا فى الظهر فمشى أحدهما بسرعة ٤ كيلومترات فى الساعة ولكن وقف ساعتين ونصفا فى الطريق ومشى الانحر بسرعة ٣ كيلومترات فى الساعة ولم يقف فى الطريق فأين ومتى يتقابلان

(٢٣) سار ا ، ب ، حـ من نقطة واحدة بسرعة ٤ ، ٥ ، ٦ كيلومترات فى الساعة على الترتيب وقام ب بعد ا بمقدار ساعتين فبعد أى زمن من وقت قيام ب يجب ان يبتدئ حـ فى السير حتى يلحق ا فى اللحظة التى يلحقه فيها ب

(٢٤) إشترى تاجر حصانا بقصد أن يربح فيه عند بيعه ١٠ فى المائة من ثمن الشراء ولكنه باعه بأقل مما كان ينتظر بخمسين جنيها ووجد أنه خسر بذلك ١٥ فى المائة مما دفعه فيه فبكم اشترى الحصان

(٢٥) مشى رجل من بلد ا قاصدا بلد ب بسرعة ٤ كيلومترات فى الساعة وبعد قيامه بساعة قامت مركبة سرعتها ١٢ كيلومترا فى الساعة فلحقته فى الطريق فركبها ووصل إلى ب فوجد أنه أمضى ساعتين فى المركبة فما المسافة بين ا ، ب

(٢٦) ما مقدار ثروة شخص إيراده السنوى ١١٤٠ جنيها إذا كان $\frac{1}{12}$ منها يربح ٢ فى المائة ونصفها يربح ٣ فى المائة وثلثها يربح $\frac{1}{2}$ ٤ فى المائة والباقى لا يأتى بربح

(٢٧) يصرف رجل ثلث إيراده ويدخر الربع ويدفع ٥ فى المائة من إيراده فى ربح دين عليه بسعر $\frac{1}{2}$ ٧ فى المائة ويبقى لديه بعد ذلك ١١٠ جنيهات فما دينه

(٢٨) قدران تشتملان على مخلوط من الماء والخل ففى إحداهما يبلغ الخل ثلاثة أمثال الماء وفى الأخرى يبلغ الماء خمسة أمثال الخل فما مقدار ما يؤخذ من كل قدر لتملأ قدر ثالثة سعتها ٧ لترات بحيث يتناصف الخل والماء فيها

(٢٩) مخلوطان من خل وماء فى أحدهما يبلغ الماء ضعف الخل وفى الآخر يبلغ الخل ثلاثة أمثال الماء فما مقدار ما يؤخذ من كل من المخلوطين لتملأ قدر سعتها لتر بحيث يتساوى مقدارا الخل والماء فيها

(٣٠) مشى رجلان فى وقت واحد أحدهما من ا قاصدا ب والآخر من ب قاصدا ا والبعد بين الجهتين م من الكيلومترات فاذا كان الرجل الأول يمشى بسرعة ط من الكيلومترات فى الساعة والثانى بسرعة ں من الكيلومترات فى الساعة فعلى أى بعد من ا يتقابلان

(٣١) يقطع قطار لشركة السكة الحديدية الغربية بانجلترا المسافة من لندن إلى برمنجهام فى ٣ ساعات و يقطع قطار لشركة السكة الحديدية الغربيـة الكبرى المسافة عينها من طريق آخر أطول من الأول بمقـدار ١٥ ميلا فى $\frac{1}{2}$ ٣ من الساعات فاذا كانت سرعة القطار الثـانى أقل من سرعة الأول بمقدار ميل فى الساعة فما طول كل من الطريقين

(٣٢) إشترى تاجر بنا فدفع فى الرطل ٥ قروش واشترى شكوريا بسعر الرطل $\frac{1}{2}$ ٢ قرش فبأى نسبة يخلطهما حتى يكسب ١٠ ٪ إن باع الرطل من المخلوط بسعر ٤٫٨ قروش

(٣٣) عند تاجر نوعان من البن ثمن الرطل من أحدهما ا من القروش ومن الآخر ب من القروش فما مقدار ما يأخذه من كل نوع ليتكوّن مخلوط وزنه ا — ب من الارطال يبيع الرطل منه بسعر ح من القروش بلا خسارة

(٣٤) صرف رجل ح من القطع ذات خمسة القروش فى شراء نوعين من الحرير ثمن المتر من أحدهما ا من القروش ومن الآخر ب من القروش وكان يمكنه أن يشترى بالمبلغ نفسه ثلاثة أمثال ما اشترى من النوع الأول ونصف ما اشترى من الثانى فكم مترا من كل نوع اشترى

(٣٥) ركب رجل $\frac{1}{٣}$ المسافة بين ا ، ب بسرعة ل من الأميال فى الساعة وركب الباقى من المسافة بسرعة ٢ م من الأميال فى الساعة ولو سافر بسرعة منتظمة قدرها ٣ ۞ من الأميال فى الساعة لأمكنـه أن يقطع المسافة من ا إلى ب ويعود من ب إلى ا فى نفس الزمن الذى استغرقه أوّلا والمطلوب إثبات أن $\frac{٢}{۞} = \frac{١}{ل} + \frac{١}{م}$

(٣٦) ا ، ب ، ح ثلاث قرى مكوّنة لرؤوس زوايا مثلث وقد كلف رجل أن يمشى من إحداها إلى الثانيـة ثم يركب جوادا من الثانيـة إلى الثالثة ثم يركب عربة من الثالثة إلى النقطة التى ابتدأ منها فاذا كان الرجل يقطع الكيلومتر ماشـيا فى َا من الدقائق ويقطعه راكبا الجواد فى بَ من الدقائق وراكبا العربة فى حَ من الدقائق وعلم أنه يستغرق َا + حَ — بَ من الساعات لو ابتدأ من ب ويسـتغرق بَ + َا — حَ من الساعات لو ابتـدأ من ح ويستغرق حَ + بَ — َا من الساعات لو ابتدأ من ا فما طول محيط المثلث

البـاب الخامس والعشرون ـ المعادلات ذات الدرجة الثانية

بند ١٨٩ ــ إذا أريد حل المسألة الآتية

إشترى تاجر عددا من الخيل بمبلغ ٢٨٠ جنيها ولو أنه اشترى بالمبلغ عينه عددا يقل عن ذلك العدد بمقدر ٤ لزاد ثمن الحصان ثمـانية جنيهات فكم حصانا اشترى

فانا نجرى العمل كما يأتى

نفرض أن عدد الخيل المطلوب س فيكون $\frac{٢٨٠}{\text{س}}$ عدد الجنيهـات التى دفعت فى كل حصان

ولو نقص عدد الخيل ٤ لصار عددها $\text{س} - ٤$ وثمن كل واحد $\frac{٢٨٠}{\text{س} - ٤}$

∴ $\frac{٢٨٠}{\text{س} - ٤} = \frac{٢٨٠}{\text{س}} + ٨$

وعلى ذلك يكون $\text{س}(\text{س} - ٤) + ٣٥(\text{س} - ٤) = ٣٥\,\text{س}$

∴ $\text{س}^{٢} - ٤\,\text{س} + ٣٥\,\text{س} - ١٤٠ = ٣٥\,\text{س}$

∴ $\text{س}^{٢} - ٤\,\text{س} = ١٤٠$

نرى فى هذه المعادلة الأخيرة أنهـا تشتمل على مربع المجهول فلا يمكن إذن حل المسألة إلا إذا وقفنا على طريقة لحل مثل هذه المعادلة

بند ١٩٠ ــ تعريف : كل معادلة تشتمل على مربع المجهول ولا تشتمل عليه بدرجة أعلى من الدرجة الثانية تسمى معادلة من الدرجة الثانية وإذا اشتملت المعادلة على مربع المجهول وقوته الأولى فانها تسمى معادلة تامة من الدرجة الثانيــة أما إذا لم تشــتمل إلا على القوة الثانية للمجهول فتسمى معادلة ناقصة من الدرجة الثانية

فالمعـادلة $٢\,\text{س}^{٢} - ٥\,\text{س} = ٣$ معادلة تامــة من الدرجة الثانية

والمعـادلة $٥\,\text{س}^{٢} = ٢٠$ معادلة ناقصة من الدرجة الثانية

بند ١٩١ ــ يمكن اعتبار المعادلة الناقصة التى من الدرجة الثانية كمعادلة بسيطة يراد استخراج مربع المجهول فيهـا

(مثـال) لحل $\frac{٩}{\text{س} - ٧٢} = \frac{٥٢}{\text{س} - ١١}$

نقول إنه بالضرب يحدث أن $٩\,\text{س}^{٢} - ٩٩ = ٢٥\,\text{س}^{٢} - ٦٧٥$

∴ $١٦\,\text{س}^{٢} = ٥٧٦$

∴ $\text{س}^{٢} = ٣٦$

وبأخذ الجذر التربيعى لطرفى المعادلة نجد أن $\text{س} = \pm ٦$

(ملاحظة) وضعنا العلامة المزدوجة $\pm$ أمام العدد الذى فى الطرف الأيسر للسبب الموضح بالبند ١٦٧

بند ١٩٢ — ربما يظن عند أخذ الجذر التربيعى لطرفى المعادلة س = ٣٦ أنه يجب وضع العلامة المزدوجة وهى ± أمام كل من طرفيها هكذا ± س = ± ٦ ولكن بالبحث فى جميع الحالات الممكنة نجد أن ذلك ليس ضروريا لأنه ينتج من ± س = ± ٦ أربع حالات وهى

+ س = + ٦ ، + س = − ٦ ، − س = + ٦ ، − س = − ٦

وهذه الأربع الحالات تدخل فى الحالتين اللتين ذكرناهما قبلا أى س = + ٦ ، س = − ٦ فيكفى إذن وضع العلامة المزدوجة أمام أحد الطرفين فقط عند أخذ الجذر التربيعى لهما

بند ١٩٣ — المعادلة س^٢ = ٣٦ مثال لأبسط أشكال المعادلات التى من الدرجة الثانية ويمكن حل المعادلة (س − ٣)^٢ = ٢٥ بأخذ الجذر التربيعى للطرفين فتحدث معادلتان بسيطتان هما س − ٣ = ± ٥

فاذا اعتبرنا العلامة العليا نجد أن س − ٣ = ٥ أى أن س = ٨

واذا اعتبرنا العلامة السفلى نجد أن س − ٣ = − ٥ أى أن س = − ٢

فالناتج إذن س = ٨ أو − ٢

وبالتأمل فى المعادلة (س − ٣)^٢ = ٢٥ نجد أنه يمكن وضعها هكذا

س^٢ − ٦ س + (٣)^٢ = ٢٥

أو س^٢ − ٦ س = ١٦

واذا ما رجعنا إلى الخطوات السابقة نجد أن المعادلة

س^٢ − ٦ س = ١٦

يمكن حلها باضافة (٣)^٢ أى ٩ إلى كل من الطرفين ثم أخذ الجذر التربيعى والسبب فى هذه الاضافة أن إضافة التسعة إلى الطرف الأيمن تجعله مربعا كاملا

نعلم أن المتطابقتين الآتيتين صحيحتان مهما كان مقدار ا

س + ٢ ا س + ا^٢ = (س + ا)^٢

و س^٢ − ٢ ا س + ا^٢ = (س − ا)^٢

فيشترط إذن فى المقدار ذى ثلاثة الحدود إذا كان مربعا كاملا وكان معامل أكبر قوة فيه وهى س^٢ الوحدة أن يكون الحد الخالى من س مساويا لمربع نصف معامل س فاذا علم الحدان اللذان يشتملان على س^٢ ، س يمكن إكمال المربع باضافة مربع نصف معامل س

(ملاحظة) إذا كان المقدار مربعا كاملا وجب أن تكون الحدود المربعة موجبة دائما (راجع ملاحظة بند ١١٤) وحينئذ يجب أن نجعل + ١ معاملا للحد س^٢ إذا اقتضت الضرورة ذلك قبل جعل المربع كاملا

(مثـال ١) لحل $س^{٢} + ١٤ س = ٣٢$

تقول إن مربع نصف ١٤ هو $(٧)^{٢}$

∴ $س^{٢} + ١٤ س + (٧)^{٢} = ٣٢ + ٤٩$

أى أن $(س + ٧)^{٢} = ٨١$

∴ $س + ٧ = \pm ٩$

∴ $س = -٧ + ٩$ أو $-٧ - ٩$

أى أن $س = ٢$ أو -١٦

(مثـال ٢) لحل $٧ س = س^{٢} - ٨$

ننقل الحدود بحيث تكون الحدود المشتملة على س فى جهة ويكون الحدّ المربع موجبا

فيكون $س^{٢} - ٧ س = ٨$

وباكمال المربع يحدث أن $س^{٢} - ٧ س + (\frac{٧}{٢})^{٢} = ٨ + \frac{٤٩}{٤}$

أى أن $(س - \frac{٧}{٢})^{٢} = \frac{٨١}{٤}$

∴ $س - \frac{٧}{٢} = \pm \frac{٩}{٢}$

∴ $س = \frac{٧}{٢} \pm \frac{٩}{٢}$

أى أن $س = ٨$ أو -١

(ملاحظة) لم تستخرج قيمة ($\frac{٧}{٢}$) الواقعة فى الطرف الأيمن من المعادلة لأن ذلك غير ضرورى بل بقاؤها على حالها أولى وأوفق

(تمـارين ١٢٥)

حل المعـادلات الآتية

(١) $٥(س^{٢} + ٥) = ٦ س^{٢}$

(٢) $٣ س^{٢} = ٤ (س^{٢} - ٤)$

(٣) $س^{٢} + ٢٢ س = ٧٥$

(٤) $س^{٢} + ٢٤ س = ٢٥$

(٥) $س^{٢} = ١٠ س - ٢١$

(٦) $(٩ + س)(٩ - س) = ١٧$

(٧) $س^{٢} + ٣ س = ١٨$

(٨) $س^{٢} + ٥ س = ١٤$

(٩) $س^{٢} - ٥ س - ٣٦ = ٠$

(١٠) $س^{٢} = س + ٧٢$

(١١) $س^{٢} - ٣٤١ = ٢٠ س$

(١٢) $٩ س - س^{٢} + ٢٢٠ = ٠$

(١٣) $٦٨ - س^{٢} = ١٣ س$

(١٤) $س + ١٥٦ = س^{٢}$

(١٥) $١٨٧ = س^{٢} + ٦ س$

(١٦) $٢٣ س = ١٢٠ + س^{٢}$

(١٧) $٤٢ + س^{٢} = ١٣ س$

(١٨) $٢٢ س + ٢٣ - س^{٢} = ٠$

(١٩) $س^{٢} - \frac{٢}{٣} س = ٣٢$

(٢٠) $س^{٢} + \frac{٤}{١٥} س = \frac{١}{٥}$

(٢١) $س^{٢} - \frac{٧}{٦} س - \frac{١}{٢} = ٠$

(٢٢) $\frac{١٩}{٥} س = \frac{٤}{٥} - س^{٢}$

(٢٣) $\frac{٣}{٥}(س + ٦)(س - ٢) = \frac{٢}{٣}(٦٢\frac{١}{١٠} + \frac{١٨ س}{٥})$

بند ١٩٤ — أوضحنا أنه من السهل إكمال المربع متى كان معامل $\text{س}^٢$ الوحدة وقد يمكن جعل معامل $\text{س}^٢$ الوحدة فى أى معادلة من الدرجة الثانية بقسمة كل حدّ من حدودها على معامل $\text{س}^٢$

(مثال ١) حل $\quad ٣٢ - ٣\text{س}^٢ = ١٠\text{س}$

بالنقل يحدث أن $\quad ٣\text{س}^٢ + ١٠\text{س} = ٣٢$

وبقسمة كل الحدود على ٣ ليصير معامل $\text{س}^٢$ الوحدة ينتج

$$\text{س}^٢ + \frac{١٠}{٣}\text{س} = \frac{٣٢}{٣}$$

وبإكمال المربع يحدث أن $\text{س}^٢ + \frac{١٠}{٣}\text{س} + \left(\frac{٥}{٣}\right)^٢ = \frac{٣٢}{٣} + \frac{٢٥}{٩}$

أى أن $\quad \left(\text{س} + \frac{٥}{٣}\right)^٢ = \frac{١٢١}{٩}$

$\therefore \quad \text{س} + \frac{٥}{٣} = \pm \frac{١١}{٣}$

$\therefore \quad \text{س} = -\frac{٥}{٣} \pm \frac{١١}{٣} = ٢$ أو $-٥\frac{١}{٣}$

(ملاحظة) يلاحظ أنه قد أضيف إلى الطرف الأيمن $\left(\frac{٥}{٣}\right)^٢$ عوضا عن $\left(\frac{١٠}{٦}\right)$

(مثال ٢) حل $\quad ٥\text{س}^٢ + ١١\text{س} = ١٢$

نقسم الطرفين على ٥ فيحدث أن $\quad \text{س}^٢ + \frac{١١}{٥}\text{س} = \frac{١٢}{٥}$

وبإكمال المربع يحدث أن $\text{س}^٢ + \frac{١١}{٥}\text{س} + \left(\frac{١١}{١٠}\right)^٢ = \frac{١٢}{٥} + \frac{١٢١}{١٠٠}$

أى أن $\quad \left(\text{س} + \frac{١١}{١٠}\right)^٢ = \frac{٣٦١}{١٠٠}$

$\therefore \quad \text{س} + \frac{١١}{١٠} = \pm \frac{١٩}{١٠}$

$\therefore \quad \text{س} = -\frac{١١}{١٠} \pm \frac{١٩}{١٠} = \frac{٤}{٥}$ أو -٣

بند ١٩٥ — نستنتج مما سبق أن الخطوات التى تتبع فى حل معادلة تامة من الدرجة الثانية هى

(أولا) إذا اقتضى الحال نختصر المعادلة بحيث تكون الحدود المشتملة على $\text{س}^٢$ و س فى طرف والحدّ الخالى من س فى الطرف الآخر

(ثانيا) نجعل معامل $\text{س}^٢$ الوحدة الموجبة بقسمة طرفى المعادلة على معامل س

(ثالثا) نضم إلى كل من طرفى المعادلة مربع نصف معامل س

(رابعا) نستخرج الجذر التربيعى للطرفين

(خامسا) نحل المعادلات البسيطة الناتجة لاستخراج قيمة المجهول

بند ١٩٦ — فى الأمثلة الآتية يجب إجراء شئ من التحويل قبل تطبيق القاعدة السابقة

(مثال ١) حل $\quad \frac{٣\text{س} - ٢}{٢\text{س} - ٣} = \frac{٥\text{س}}{\text{س} + ٤} - ٢$

نقول إنه بالاختصار يحدث أن $\quad \frac{٣\text{س} - ٢}{٢\text{س} - ٣} = \frac{٣\text{س} - ٨}{\text{س} + ٤}$

وبالضرب نجد أن $\quad ٣\text{س}^٢ + ١٠\text{س} - ٨ = ٦\text{س}^٢ - ٢٥\text{س} + ٢٤$

أى أن $-٣ س^{٢} + ٣٥ س = ٣٢$

وبالقسمة على -٣ يحدث أن $س^{٢} - \frac{٣٥}{٣} س = -\frac{٣٢}{٣}$

وباكمال المربع يحدث أن $س^{٢} - \frac{٣٥}{٣} س + (\frac{٣٥}{٦})^{٢} = \frac{١٢٢٥}{٣٦} - \frac{٣٢}{٣}$

أى ان $(س - \frac{٣٥}{٦})^{٢} = \frac{٨٤١}{٣٦}$

$\therefore$ $س - \frac{٣٥}{٦} = \pm \frac{٢٩}{٦}$

$\therefore$ $س = ١٠ \frac{٢}{٣}$ أو ١

(مثال ٢) لحل $٧ (س + ٢ ا)^{٢} + ٣ ا^{٢} = ٥ ا (٧ س + ٢٣ ا)$

نختصر فينتج ان

$٧ س^{٢} + ٢٨ ا س + ٢٨ ا^{٢} + ٣ ا^{٢} = ٣٥ ا س + ١١٥ ا$

أى أن $٧ س^{٢} - ٧ ا س = ٨٤ ا^{٢}$

ومنه ينتج أن $س^{٢} - ا س = ١٢ ا^{٢}$

وباكمال المربع نجد أن $س^{٢} - ا س + (\frac{ا}{٢})^{٢} = ١٢ ا^{٢} + \frac{ا^{٢}}{٤}$

أى أن $(س - \frac{ا}{٢})^{٢} = \frac{٤٩ ا^{٢}}{٤}$

$\therefore$ $س - \frac{ا}{٢} = \pm \frac{٧ ا}{٢}$

$\therefore$ $س = ٤ ا$ أو -٣

بند ١٩٧ — قد يوجد أحيانا جذر واحد للمعادلة

فمثلا إذا كان $س^{٢} - ٢ س + ١ = ٠$

يكون $(س - ١)^{٢} = ٠$

ومنها ينتج أن $س = ١$ وهو الجذر الوحيد للمعادلة ومع ذلك يحسن أن يقال فى هـذه الحالة وفيما يماثلها من الأحوال إن للمعادلة جذرين متساويين

(تمـارين ٢٥ ب)

حل المعـادلات الآتية

(١) $٥ س^{٢} + ١٤ س = ٥٥$

(٢) $٣ س^{٢} + ١٢١ = ٤٤ س$

(٣) $٢٥ س = ٦ س^{٢} + ٢١$

(٤) $٨ س^{٢} + س = ٣٠$

(٥) $٣ س^{٢} + ٣٥ = ٢٢ س$

(٦) $س + ٢٢ - ٦ س^{٢} = ٠$

(٧) $١٥ = ١٧ س + ٤ س^{٢}$

(٨) $٢١ + س = ٢ س^{٢}$

(٩) $٩ س^{٢} - ١٤٣ - ٦ س = ٠$

(١٠) $١٢ س^{٢} = ٢٩ س - ١٤$

(١١) $٢٠ س^٢ = ١٢ - س$

(١٢) $١٩ س = ١٥ - ٨ س^٢$

(١٣) $٢١ س^٢ + ٢٢ س + ٥ = ٠$

(١٤) $٥٠ س^٢ - ١٥ س = ٢٧$

(١٥) $١٨ س^٢ - ٢٧ س - ٢٦ = ٠$

(١٦) $٥ س^٢ = ٨ س + ٢١$

(١٧) $١٥ س^٢ - ٢ ا س = ا^٢$

(١٨) $٢١ س^٢ = ٢ ا س + ٣ ا^٢$

(١٩) $٦ س^٢ = ١١ هـ س + ٧ هـ^٢$

(٢٠) $١٢ س^٢ + ٢٣ هـ س + ١٠ هـ^٢ = ٠$

(٢١) $١٢ س^٢ - ح س - ٢٠ ح^٢ = ٠$

(٢٢) $٢ (س - ٣) = ٣ (س + ٢) (س - ٣)$

(٢٣) $(س + ١) (٢ س + ٣) = ٤ س^٢ - ٢٢$

(٢٤) $(٣ س - ٥) (٢ س - ٥) = س^٢ + ٢ س - ٣$

(٢٥) $\frac{٥ س + ٧}{س - ١} = ٣ س + ٢$

(٢٦) $\frac{٥ س - ١}{س + ١} = \frac{٣ س}{٢}$

(٢٧) $\frac{٣ س - ٨}{س - ٢} = \frac{٥ س - ٢}{س + ٥}$

(٢٨) $\frac{٣ س - ١}{٤ س + ٧} = ١ - \frac{٦}{س + ٧}$

(٢٩) $\frac{٥ س - ٧}{٧ س - ٥} = \frac{س - ٥}{٢ س - ١٣}$

(٣٠) $\frac{س + ٣}{٢ س - ٧} - \frac{٢ س - ١}{س - ٣} = ٠$

(٣١) $\frac{١}{١ + س} - \frac{١}{٣ - س} = \frac{٦}{٣٥}$

(٣٢) $\frac{س + ٤}{س - ٤} + \frac{س - ٢}{س - ٣} = ٦ \frac{١}{٣}$

(٣٣) $\frac{١}{٣ - س} - \frac{٤}{٥} = \frac{١}{٩ - ٢ س}$

(٣٤) $\frac{٤}{س - ١} - \frac{٥}{س + ٢} = \frac{٣}{س}$

(٣٥) $\frac{٥}{س - ٢} - \frac{٤}{س} = \frac{٣}{س + ٦}$

(٣٦) $\frac{س - ٢}{س - ٣} + \frac{٣ س - ١١}{س - ٤} = \frac{٤ س + ١٣}{س + ١}$

(٣٧) $\frac{١}{٢ س - ٥ ا} + \frac{٥}{٢ س - ا} = \frac{٢}{ا}$

(٣٨) $\frac{٢}{٣ س - ٢ ح} + \frac{٣}{٢ س - ٣ ح} = \frac{٧}{٢ ح}$

(٣٩) $\frac{ا^٢ ب}{س^٢} + ا \left(١ + \frac{ب}{س}\right) = ٢ ب + \frac{ا^٢}{س}$

بند ١٩٨ — يتضح من الأمثلة المتقدمة أن كل معادلة من معادلات الدرجة الثانية يمكن أن توضع بالصورة الآتية بعد إجراء الاختزال والنقل المناسبين

$$ا س^٢ + ب س + ح = ٠$$

بحيث إن كلا من المقادير ا ، ب ، ح يدل على أى مقدار عددى فاذا أمكن حل هذه المعادلة صار من السهل حل أى معادلة أخرى من الدرجة الثانية مهما كان نوعها كما سنبينه

أولا ننقل فيحدث أن $ا س^٢ + ب س = - ح$

وبقسمة الطرفين على ا نجد أن $س^٢ + \frac{ب}{ا} س = - \frac{ح}{ا}$

وباكمال المربع باضافة $\left(\frac{ب}{٢ ا}\right)^٢$ إلى الطرفين ينتج أن

$$س^٢ + \frac{ب}{ا} س + \left(\frac{ب}{٢ ا}\right)^٢ = \frac{ب^٢}{٤ ا^٢} - \frac{ح}{ا}$$

أى أن $\left(\text{س} + \frac{\text{ب}}{٢\text{أ}}\right)^{٢} = \frac{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أ}\text{ح}}{٤\text{أ}^{٢}}$

وبأخذ الجذر التربيعى للطرفين ينتج $\text{س} + \frac{\text{ب}}{٢\text{أ}} = \frac{\pm\sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أ}\text{ح}}}{٢\text{أ}}$

$\therefore \quad \text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أ}\text{ح}}}{٢\text{أ}}$

بند ١٩٩ — يمكننا الآن أن نستعمل هذا القانون العام فى حل المعادلات التى من الدرجة الثانية بوضع قيمة كل من أ ، ب ، ح فى القانون ثم استخراج قيمة س وبهذا نستغنى عن طريقة كمال المربع

(مثال) لحل $٥\text{س}^{٢} + ١١\text{س} - ١٢ = ٠$

نقول إن فى هذه المعادلة أ = ٥ ، ب = ١١ ، ح = − ١٢

$\therefore \quad \text{س} = \frac{-١١ \pm \sqrt{(١١)^{٢} - ٤ \times ٥ (-٢)}}{١٠}$

$= \frac{-١١ \pm \sqrt{٣٦١}}{١٠} = \frac{-١١ \pm ١٩}{١٠} = \frac{٤}{٥}$ أو -٣

وهى نفس النتيجة التى وجدناها باتباع طريقة الحل المذكورة فى المثال ٢ بند (١٩٤)

بند ٢٠٠ — يجب أن يلاحظ فى استعمال القانون $\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أ}\text{ح}}}{٢\text{أ}}$ أن $\sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أ}\text{ح}}$ الجذر التربيعى للكمية $\text{ب}^{٢} - ٤\text{أ}\text{ح}$ جميعها . ولا يمكن إتمام الحل وإيجاد قيمة المجهول إلا اذا عرفت قيمة كل من أ ، ب ، ح . وقد يتفق أن لا يكون المقدار $\text{ب}^{٢} - ٤\text{أ}\text{ح}$ مربعا كاملا بعد وضع المقادير العددية بدل كل من أ ، ب ، ح وفى هـذه الحالة لا يمكن استخراج قيمة كل من جذرى المعادلة بالضبط

(مثال ١) لحل المعادلة $٥\text{س}^{٢} - ١٥\text{س} + ١١ = ٠$

نقول إنه بمقتضى القانون يجب أن تكون

$\text{س} = \frac{١٥ \pm \sqrt{(-١٥)^{٢} - ٤ \times ٥ \times ١١}}{٢ \times ٥}$

$= \frac{١٥ \pm \sqrt{٥}}{١٠}$ .... (١)

ولكون $\sqrt{٥} = ٢{,}٢٣٦$ تقريبا

إذن $\text{س} = \frac{١٥ \pm ٢{,}٢٣٦}{١٠}$

$= ١{,}٧٢٣٦$ أو $١{,}٢٧٦٤$

وهذان الجذران مقربان لغاية الرقم الرابع من الكسر العشرى فقط ولذلك لا يمكن تحقيق المعادله بأيهما تماما بل بالتقريب وإذا لم يكن المطلوب إيجاد المقادير العددية لجذور المعادلة فالعادة تركها على الصورة المبينة فى (١) بدون اختصار

(مثال ٢) لحل المعادلة $س^٢ - ٣ س + ٥ = ٠$

نقول إن $س = \frac{٣ \pm \sqrt{(-٣)^٢ - ٤ \times ١ \times ٥}}{٢}$

$= \frac{٣ \pm \sqrt{٩ - ٢٠}}{٢}$

$= \frac{٣ \pm \sqrt{-١١}}{٢}$

وبما أنا نعلم من بند (١١٠) أن مربع الكمية لا يكون سالبا سواء كانت موجبة أو سالبة نرى أنه يستحيل إذن أن توجد كمية تساوى بالضبط أو بالتقريب الجذر التربيعى للكمية -١١ وعلى ذلك لا يمكن إيجاد مقدار حقيقى للمجهول س به يمكن تحقيق المعادلة ففى مثل هذه الحالة يسمى جذرا المعادلة تخيليين وبالتأمل فى القانون العام (بند ١٩٨) نرى أن جذرى المعادلة $ا س^٢ + ب س + ح = ٠$ يكونان دائما تخيليين إذا كانت $ب^٢ - ٤ ا ح$ كمية سالبة

(ملاحظة) إذا حلت المعادلة $س^٢ - ٣ س + ٥ = ٠$ بالرسم البيانى كما توضح ببند ٤٢٧ فالخط البيانى لا يقابل محور س أى المحور الأفقى مطلقا وبعبارة أخرى لا يوجد للحرف س مقدار عددى لو وضع بدل س فى المقدار $س^٢ - ٣ س + ٥$ لصيره مساويا للصفر

(لا بأس بمطالعة البنود من ٤٢٥ إلى ٤٢٧ الآن)

بند ٢٠١ — حل معادلات الدرجة الثانية بالعوامل

يجد الطالب أحيانا أن طريقة الحل الآتية أقصر وأسهل من الطريقتين السابقتين فمثلا إذا تأملنا المعادلة $س^٢ + \frac{٧}{٣} س = ٢$

نجد أنه بازالة الكسور ينتج $٣ س^٢ + ٧ س - ٦ = ٠$ .... (١)

وبتحليل الطرف الأيمن إلى عوامله ينتج أن

$$(٣ س - ٢)(س + ٣) = ٠$$

فاذا كان أحد العاملين $٣ س - ٢$ ، $س + ٣$ صفرا يكون حاصل ضربهما صفرا فيمكن اذن تحقيق المعادلة بأخذ أحد هذين الفرضين

$$٣ س - ٢ = ٠$$

أو $$س + ٣ = ٠$$

وعلى ذلك فجذرا المعادلة $\frac{٢}{٣}$ ، -٣

ينتج من ذلك أنه إذا اختصرت أى معادلة من الدرجة الثانية ووضعت على صورة المعادلة (١) يسهل حلها متى أمكن تحليل الطرف الأيمن منها إلى عامليه وذلك بوضع كل من هذين العاملين مساويا للصفر لتكوين معادلتين بسيطتين يستنتج من كل منهما جذر من جذرى المعادلة ذات الدرجة الثانية

(مثال ١) لحل المعادلة $٢ س^٢ - ١ س + ٢ ب س = ١ ب$

ننقل جميع الحدود إلى أحد طرفى المعادلة فينتج أن

$٢ س^٢ - ١ س + ٢ ب س - ١ ب = ٠$

ولكون $٢ س^٢ - ١ س + ٢ ب س - ١ ب = س (٢ س - ١) + ب (٢ س - ١)$

$= (٢ س - ١) (س + ب)$

$\therefore (٢ س - ١) (س + ب) = ٠$

ومن هذا ينتج أن $٢ س - ١ = ٠$

أو $س + ب = ٠$

$\therefore س = \frac{١}{٢}$ أو $- ب$

(مثال ٢) لحل المعادلة $٢ (س^٢ - ٦) = ٣ (س - ٤)$

نقول إن $٢ س^٢ - ١٢ = ٣ س - ١٢$

أى $٢ س^٢ = ٣ س$ .... (١)

وبالنقل يحدث أن $٢ س^٢ - ٣ س = ٠$

أى أن $س (٢ س - ٣) = ٠$

$\therefore$ س = صفرا أو $٢ س - ٣$ = صفرا

فالجذران المطلوبان صفر و $\frac{٣}{٢}$

(ملاحظة) كان من الممكن أن نقسم طرفى المعادلة (١) على س فتنتج المعادلة البسيطة $٢ س = ٣$ ومنها نستنتج أن $س = \frac{٣}{٢}$ وهو أحد جذرى المعادلة ولكن يجب أن يلاحظ أنه إذا حذفت بالقسمة س أو أى عامل يشتمل على س من جميع حدود المعادلة يجب أن لا يهمل بالمرة لأنه يمكن تحقيق المعادلة باعتبار أن س = صفرا وعلى ذلك فالصفر احد جذرى المعادلة

بند ٢٠٢ — هناك بعض معادلات ليست فى الحقيقة من الدرجة الثانية ولكنها تحل بالطرق التى شرحناها فى هذا الباب

(مثال ١) لحل المعادلة $س^٤ - ١٣ س^٢ + ٣٦ = ٠$

نقول إنه بالتحليل إلى العوامل نرى أن $(س^٢ - ٩) (س^٢ - ٤) = ٠$

$\therefore س^٢ - ٩ = ٠$

أو $س^٢ - ٤ = ٠$

وتكون $س^٢ = ٩$ أو ٤

أى ان $س = \pm ٣$ أو ± ٢

(مثال ٢) لحل المعادلة $س^٢ + ٣ س - \frac{٢٠}{س^٢ + ٣ س} = ٨$

نضع بدل $س^٢ + ٣ س$ الحرف ص

فينتج ان $ص - \frac{٢٠}{ص} = ٨$

أى أن $ص^٢ - ٨ ص - ٢٠ = ٠$

ومن هذه المعادلة التى من الدرجة الثانية نجد أن

$$صـ = ١٠ \text{ أو } -٢$$

$$\therefore \quad سـ^{٢} + ٣ سـ = ١٠ \text{ أو } -٢$$

وبذلك تحولت المسألة إلى حل معادلتين من الدرجة الثانية وبحلهما نجد ان

$$سـ = -٥ ، ٢ \text{ أو } -١ ، -٢$$

(تمارين ٢٥ ح)

حل المعادلات الآتية بالطريقة المبينة بالبند ٢٠٠ وحقق الحل بالرسم البيانى كما مبين ببند (٤٢٧)

(١) $٣ سـ^{٢} = ١٥ - ٤ سـ$

(٢) $٢ سـ^{٢} + ٧ سـ = ١٥$

(٣) $٢ سـ^{٢} + ٧ - ٩ سـ = ٠$

(٤) $سـ^{٢} = ٣ سـ + ٥$

(٥) $٥ سـ^{٢} + ٤ + ٢١ سـ = ٠$

(٦) $سـ + ١١ = ٧ سـ$

(٧) $٨ سـ^{٢} = سـ + ٧$

(٨) $٥ سـ^{٢} = ١٧ سـ - ١٠$

(٩) $٣٥ + ٩ سـ - ٢ سـ^{٢} = ٠$

(١٠) $٣ سـ^{٢} = سـ + ١$

(١١) $٣ سـ^{٢} + ٥ سـ = ٢$

(١٢) $٢ سـ^{٢} + ٥ سـ - ٣٣ = ٠$

حل المعادلات الآتية بطريقة التحليل إلى العوامل

(١٣) $٦ سـ^{٢} = ٧ + سـ$

(١٤) $٢١ + ٨ سـ^{٢} = ٢٦ سـ$

(١٥) $٢٦ سـ - ٢١ + ١١ سـ^{٢} = ٠$

(١٦) $٥ سـ^{٢} + ٢٦ سـ + ٢٤ = ٠$

(١٧) $٤ سـ^{٢} = \frac{٤}{١٥} سـ + ٣$

(١٨) $سـ^{٢} - ٢ = \frac{٢٣}{١٢} سـ$

(١٩) $٧ سـ^{٢} = ٢٨ - ٩٦ سـ$

(٢٠) $٩٦ سـ^{٢} = ٤ سـ + ١٥$

(٢١) $٢٥ سـ^{٢} = ٥ سـ + ٦$

(٢٢) $٣٥ - ٤ سـ = ٤ سـ^{٢}$

(٢٣) $١٢ سـ^{٢} - ١١ ا سـ = ٣٦ ا^{٢}$

(٢٤) $١٢ سـ^{٢} + ٣٦ ا^{٢} = ٤٣ ا سـ$

(٢٥) $٣٥ ب^{٢} = ٩ سـ^{٢} + ٦ ب سـ$

(٢٦) $٣٦ سـ^{٢} - ٣٥ ب^{٢} = ١٢ ب سـ$

(٢٧) $سـ^{٢} - ٢ ا سـ + ٤ ا ب = ٢ ب سـ$

(٢٨) $سـ^{٢} - ٢ ا سـ + ٨ سـ = ١٦ ا$

(٢٩) $٣ سـ^{٢} - ٢ ا سـ - ب سـ =$

(٣٠) $ا سـ^{٢} + ٢ سـ = ب سـ$

حل المعادلات الآتية بالطريقة المبينة فى بند ٢٠٢

(٣١) $٤ = ٥ سـ^{٢} - سـ^{٤}$

(٣٢) $سـ^{٤} + ٣٦ = ١٣ سـ^{٢}$

(٣٣) $سـ^{٦} + ٧ سـ^{٣} = ٨$

(٣٤) $سـ^{٦} - ١٩ سـ^{٣} = ٢١٦$

(٣٥) $١٦ \left(سـ^{٢} + \frac{١}{سـ^{٢}} \right) = ٢٥٧$

(٣٦) $سـ^{٢} + \frac{ا^{٢} ب^{٢}}{سـ} = ا^{٢} + ب^{٢}$

(٣٧) $سـ^{١} (١٩ + سـ^{٣}) = ٢١٦$

(٣٨) $(سـ^{٢} + ٢)^{٢} + ١٩٨ = ٢٩ (سـ^{٢} + ٢)$

(٣٩) $سـ^{٢} - سـ + \frac{٧٢}{سـ^{٢} - سـ} = ١٨$

(٤٠) $سـ (سـ - ١٢ ا) = \frac{٨ ا^{٤}}{سـ^{٢} - ١٢ ا سـ} + ٧ ا^{٢}$

بند ٢٠٢ — (أ) طريقة حل المعادلات باستعمال العوامل قد تستعمل أيضا فى حل المعادلات التى درجتها أعلى من الثانية

(فمثلا) إذا كانت (س − ٢) (س + ١) (س + ٢) = ٠ أمكن تحقيق هذه المعادلة بكل من المقادير التى يمكن أن تحقق بها المعادلات الثلاث الآتية

س − ٢ = ٠

، س + ١ = ٠

، س + ٢ = ٠

وعلى ذلك تكون جذور المعادلة ٢ أو − ١ أو − ٢

(مثال) لحل المعادلة ٣ $س^{٣}$ + ٥ $س^{٢}$ = ٣ س + ٥

نضع المعادلة بالصورة الآتية ٣ $س^{٣}$ + ٥ $س^{٢}$ − ٣ س − ٥ = ٠

فيكون $س^{٢}$ (٣ س + ٥) − (٣ س + ٥) = ٠ *

أو ($س^{٢}$ − ١) (٣ س + ٥) = ٠

∴ (س + ١) (س − ١) (٣ س + ٥) = ٠

ومن هذه المعادلة الأخيرة ينتج أن

س + ١ = ٠

أو س − ١ = ٠

أو ٣ س + ٥ = ٠

فالجذور المطلوبة إذن − ١ ، ١ ، − $\frac{٥}{٣}$

(ملاحظة) كان من الممكن عند وصولنا فى الحل إلى الدرجة التى وضعنا عليها الاشارة (*) نقسم طرفى المعادلة على ٣ س + ٥ ولكن إن فعلنا ذلك فلا بدّ من جعل هذا العامل مساويا للصفر لنكوّن من ذلك معادلة بسيطة نستخرج منها أحد جذور المعادلة الأصلية

بند ٢٠٢ — (ب) إذا علم أحد جذور معادلة أو أمكن الحصول عليه بالتحسس فقد يمكننا أن نقسم طرفى المعادلة على عامل من الدرجة الأولى مركب من المقدار المجهول ناقصا الجذر المعلوم وبذلك نحصل على معادلة أقل درجة من المعادلة الأصلية

(مثال) لحل المعادلة $س^{٣}$ − ٣ $س^{٢}$ − ٦ س + ١٦ = ٠

نقول نجد بالتحسس أننا لو وضعنا بدل س العدد ٢ فى الطرف الأيمن لصحت المعادلة وعلى ذلك يكون ٢ أحد جذور المعادلة ويكون س − ٢ عاملا لها وحينئذ يمكن وضع المعادلة هكذا

$س^{٢}$ (س − ٢) − س (س − ٢) − ٨ (س − ٢) = ٠

أى أن ($س^{٢}$ − س − ٨) (س − ٢) = ٠

وبحذف العامل س − ٢ يبقى $س^{٢}$ − س − ٨ = ٠

ومن هذه المعادلة الأخيرة ينتج أن س = $\frac{١ \pm \sqrt{٣٣}}{٢}$

وعلى ذلك فثلاثة الجذور المطلوبة ٢ ، $\frac{١ + \sqrt{٣٣}}{٢}$ ، $\frac{١ - \sqrt{٣٣}}{٢}$

(تمارين ٢٥ د)

حل المعادلات الآتية بطريقة التحليل للعوامل

(١) $س^{٣} + س^{٢} - س - ١ = ٠$

(٢) $س^{٣} - ٢ س^{٢} - س + ٢ = ٠$

(٣) $س^{٣} - ٤ س = س - ٤$

(٤) $س^{٣} + ٧ س^{٢} + ٧ س - ١٥ = ٠$

(٥) $س^{٣} - ٣ س - ٢ = ٠$

(٦) $س^{٤} + ٢ س = ٣ س^{٢}$

(٧) $س^{٣} + ٣٠ = ١٩ س$

حل المعادلات الآتية مع معرفة جذر لكل منها

(٨) $س^{٣} - ٣٩ س + ٧٠ = ٠$ [$س = ٥$]

(٩) $س^{٣} - ٣٧ س - ٨٤ = ٠$ [$س = -٣$]

(١٠) $س^{٣} - ١٢ ا^{٢} س = ١٦ ا^{٣}$ [$س = ٤ ا$]

(١١) $س^{٤} + ٤٣٢ ا^{٣} س = ١٠٨ ا^{٢} س^{٢}$ [$س = ٦ ا$]

حل المعادلات الآتية بالطريقة المذكورة فى بند ٢٠٠ وأوجد مقدار كل جذر مشتملا على رقمين عشريين

(١٢) $س^{٢} + ٢ س = ٣٫٢$

(١٣) $س^{٢} - ٣ س - ٣٫٥١ = ٠$

(١٤) $س^{٢} + س = ١٫٠٩٥٦$

(١٥) $س^{٢} - ٣٦ س + ٣٢٣٫٧ = ٠$

(١٦) $س^{٢} - ٧ س + ٦٫٠٣٥ = ٠$

(١٧) $س^{٢} - ٥٫٥ س + ٧٫٣٧٧٦ = ٠$

(١٨) أوجد مقدارى $س$ اللذين يجعلان الكمية $س (٣ س - ١)$ مساوية ٠٫٣٦٢ وبيّن قيمة كل منهما مقربة لغاية الرقم العشرى الثانى .

(١٩) أوجد جذرى المعادلة $٢ س (٢ - س) = ١٫٧٣$ بحيث يكون مقدار كل منهما مقربا إلى واحد من عشرة .

(٢٠) حل المعادلة $س^{٢} + ا س - ا^{٢} = ٠$ ثم أوجد المقدارين الرقميين للجذرين إذا علم أن $ا = ١٢$ بحيث يشتمل كل منهما على ثلاثة أرقام عشرية .

(٢١) حل المعادلة $س (ا - س) = ح^{٢}$ ثم أوجد المقدارين الرقميين للجذرين إذا علم أن $ا = ١٦$ ، $ح = ٦$ بحيث يشتمل كل منهما على ثلاثة أرقام عشرية .

الباب السادس والعشرون — المعادلات الآنية التى من الدرجة الثانية

بند ٢٠٣ — سنبحث الآن فى بعض الطرق المفيدة لحل المعادلات الآنيــة التى يمكن أن تكون واحدة منها أو أكثر اعلى درجة من الدرجة الأولى

وليس لحل المعادلات التى من هذا القبيل قواعد ثابتة تتبع فى سائر الاحوال

(مثـال ١) لحل $س + ص = ١٥$ .... (١)

$س ص = ٣٦$ .... (٢)

نقول إنه بتربيع المعادلة (١) ينتج أن $س^٢ + ٢ س ص + ص^٢ = ٢٢٥$

ومن (٢) نستنتج أن $٤ س ص = ١٤٤$

وبالطرح ينتج أن $س^٢ - ٢ س ص + ص^٢ = ٨١$

وبأخذ الجذر التربيعى لطرفى هذه المعادلة ينتج أن $س - ص = \pm ٩$

وبربط هذه النتيجة الأخيرة مع (١) تنتج حالتان

$س + ص = ١٥$ ، $س - ص = ٩$ أو $س + ص = ١٥$ ، $س - ص = -٩$

ومن الحالتين ينتج أن $س = ١٢$ ، $ص = ٣$ أو $س = ٣$ ، $ص = ١٢$

(مثـال ٢) لحل $س - ص = ١٢$ .... (١)

$س ص = ٨٥$ .... (٢)

نقول من (١) ينتج أن $س^٢ - ٢ س ص + ص^٢ = ١٤٤$

ومن (٢) نستنتج أن $٤ س ص = ٣٤٠$

وبالجمع ينتج أن $س^٢ + ٢ س ص + ص^٢ = ٤٨٤$

وبأخذ الجذر التربيعى يحدث أن $س + ص = \pm ٢٢$

وبربط هذه النتيجة الأخيرة مع (١) تنتج حالتان

$س + ص = ٢٢$ ، $س - ص = ١٢$ أو $س + ص = -٢٢$ ، $س - ص = ١٢$

ومن الحالتين ينتج أن $س = ١٧$ ، $ص = ٥$ أو $س = -٥$ ، $ص = -١٧$

بند ٤٤١

بند ٢٠٤ — المثالان المتقدمان أبسط أنواع المعادلات التى نحن بصددها ولكنهما مهمان جدًا لأنه يتوقف عليهما حل معادلات أخرى كثيرة ويجب على وجه الاجمال ان يكون الغرض الذى نرمى إليه فى حل مثل هذه المعادلات حلها بطريق التمـاثل وذلك بايجاد مقدار كل من $س + ص$ ، $س - ص$ ومن الأمثـلة المتقدمة نعلم أن الحل ممكن متى حصلنا على حاصـل ضرب المجهولين ومجموعهما أو الفرق بينهما

(مثال ١) لحل $س^{٢} + ص^{٢} = ٧٤$ ... ... (١)

$س ص = ٣٥$ ... ... (٢)

نضرب المعادلة (٢) فى ٢ ثم نجمع الحاصل إلى المعادلة (١)

فيحدث ان $س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢} = ١٤٤$

وبطرح الحاصل من المعادلة (١) ينتج أن

$س^{٢} - ٢ س ص + ص^{٢} = ٤$

ومن هاتين المعادلتين الأخيرتين نستنتج أن

$س + ص = \pm ١٢$

، $س - ص = \pm ٢$

فيحدث إذن أربع حالات

$$\left.\begin{matrix} س + ص = ١٢ \\ س - ص = ٢ \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} س + ص = ١٢ \\ س - ص = -٢ \end{matrix}\right\}$$

$$\left.\begin{matrix} س + ص = -١٢ \\ س - ص = ٢ \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} س + ص = -١٢ \\ س - ص = -٢ \end{matrix}\right\}$$

ومنها تنتج مقادير س وهى ٧ ، ٥ ، –٥ ، –٧ } قارن ذلك بما هو وارد

ويقابل ذلك من المقادير للحرف ص ٥ ، ٧ ، –٧ ، –٥ } فى بند ٤٤١

(مثال ٢) لحل $س^{٢} + ص = ١٨٥$ ... ... (١)

$س + ص = ١٧$ ... ... (٢)

نطرح (١) من مربع (٢) فينتج أن

$٢ س ص = ١٠٤$

$\therefore$ $س ص = ٥٢$ ... ... (٣)

ويمكن الآن حل المعادلتين (١) ، (٣) بالطريقة التى اتبعت فى مثال ١ واستخراج الجذور الاتية

$س = ١٣$ أو ٤ }
$ص = ٤$ أو ١٣ }

(تمارين ١٢٦)

حل المعادلات الآتية

(١) $س + ص = ٢٨$
$س ص = ١٨٧$

(٢) $س + ص = ٥١$
$س ص = ٥١٨$

(٣) $س + ص = ٧٤$
$س ص = ١١١٣$

(٤) $س - ص = ٥$
$س ص = ١٢٦$

(٥) $س - ص = ٨$
$س ص = ٥١٣$

(٦) $س ص = ١٠٧٥$
$س - ص = ١٨$

(٧) سـ صـ = ٩٢٣
سـ + صـ = ٨٤

(٨) سـ − صـ = − ٨
سـ صـ = ١٣٥٣

(٩) سـ − صـ = − ٢٢
سـ صـ = ٣٨٤٨

(١٠) سـ صـ = − ٢١٩٣
سـ + صـ = − ٨

(١١) سـ − صـ = − ١٨
سـ صـ = ١٣٦٣

(١٢) سـ صـ = − ١٩١٤
سـ + صـ = − ٦٥

(١٣) سـ^{٢} + صـ^{٢} = ٨٩
سـ صـ = ٤٠

(١٤) سـ^{٢} + صـ^{٢} = ١٧٠
سـ صـ = ١٣

(١٥) سـ^{٢} + صـ^{٢} = ٦٥
سـ صـ = ٢٨

(١٦) سـ^{٢} + صـ^{٢} = ١٧٨
سـ + صـ = ١٦

(١٧) سـ + صـ = ١٥
سـ^{٢} + صـ = ١٢٥

(١٨) سـ − صـ = ٤
سـ^{٢} + صـ = ١٠٦

(١٩) سـ^{٢} + صـ^{٢} = ١٨٠
سـ − صـ = ٦

(٢٠) سـ^{٢} + صـ^{٢} = ١٨٥
سـ − صـ = ٣

(٢١) سـ + صـ = ١٣
سـ^{٢} + صـ^{٢} = ٩٧

(٢٢) سـ + صـ = ٩
سـ^{٢} + سـ صـ + صـ^{٢} = ٦١

(٢٣) سـ − صـ = ٣
سـ^{٢} − ٣ سـ صـ + صـ^{٢} = − ١٩

(٢٤) سـ − سـ صـ + صـ^{٢} = ٧٦
سـ + صـ = ١٤

(٢٥) $\frac{١}{١٠}$ (سـ^{٢} − صـ) = ١
سـ^{٢} − ٤ سـ صـ + صـ^{٢} = ٥٢

(٢٦) $\frac{١}{سـ}$ + $\frac{١}{صـ}$ = ٢
سـ + صـ = ٢

(٢٧) $\frac{١}{سـ}$ + $\frac{١}{صـ}$ = $\frac{٧}{١٢}$
سـ صـ = ١٢

(٢٨) ا سـ + ب صـ = ٢
ا ب سـ صـ = ١

(٢٩) سـ^{٢} + ط سـ صـ + صـ^{٢} = ط + ٤
ن سـ^{٢} + سـ صـ + ن صـ^{٢} = ٢ ن + ١

بند ٢٠٥ — يمكن تحويل أى معادلتين موضوعتين على الصورة الآتية

سـ^{٢} ± ى سـ صـ + صـ = ا^{٢} .... (١)

سـ ± صـ = ب .... (٢)

فيهما ى رمز لعدد ما إلى إحدى الحالات التى سبق شرحها لأنه بتربيع المعادلة (٢) وربط المعادلة الناتجة مع (١) نستخرج معادلة منها نوجد قيمة سـ صـ ثم نكمل الحل بمساعدة المعادلة (٢)

(مثال ١) الحل سـ^{٣} − صـ^{٣} = ٩٩٩ .... (١)

سـ − صـ = ٣ .... (٢)

نقسم فيحدث أن سـ^{٢} + سـ صـ + صـ^{٢} = ٣٣٣ .... (٣)

ومن (٢) نجد أن سـ − ٢ سـ صـ^{٢} + صـ^{٢} = ٩

وبالطرح يحدث أن ٣ س ص = ٣٢٤

أى أن س ص = ١٠٨ .... (٤)

ومن (٢) ، (٤) نستنتج أن س = ١٢ أو − ٩

ص = ٩ أو − ١٢

(مثال ٢) لحل $\text{س}^{4} + \text{س}^{2}\text{ص}^{2} + \text{ص}^{4}$ = ٢٦١٣ .... (١)

$\text{س}^{2} + \text{س ص} + \text{ص}^{2}$ = ٦٧ .... (٢)

نقسم (١) على (٢) فينتج أن $\text{س} - \text{س ص} + \text{ص}^{2}$ = ٣٩ .... (٣)

وبجمع (٢) على (٣) نجد أن $\text{س}^{2} + \text{ص}^{2}$ = ٥٣

ويطرح (٣) من المعادلة الأخيرة ينتج أن س ص = ١٤

إذن س = ± ٧ أو ± ٢ } بند ٢٠٤ مثال ١

و ص = ± ٢ أو ± ٧

(مثال ٣) لحل $\frac{1}{\text{س}} - \frac{1}{\text{ص}} = \frac{1}{3}$ .... (١)

$\frac{1}{\text{س}^{2}} + \frac{1}{\text{ص}^{2}} = \frac{5}{9}$ .... (٢)

نربع (١) فيحدث أن $\frac{1}{\text{س}^{2}} - \frac{2}{\text{س ص}} + \frac{1}{\text{ص}^{2}} = \frac{1}{9}$

وبالطرح ينتج أن $\frac{2}{\text{س ص}} = \frac{4}{9}$

وبربط هذه مع (٢) نجد أن

$$\frac{1}{\text{س}^{2}} + \frac{2}{\text{س ص}} + \frac{1}{\text{ص}^{2}} = 1$$

∴ $\frac{1}{\text{س}} + \frac{1}{\text{ص}} = \pm 1$

وبربط هذه مع (١) يحدث أن $\frac{1}{\text{س}} = \frac{2}{3}$ أو $-\frac{1}{3}$

و $\frac{1}{\text{ص}} = \frac{1}{3}$ أو $-\frac{2}{3}$

∴ س = $\frac{3}{2}$ أو − ٣ ، ص = ٣ أو $-\frac{3}{2}$

(تمارين ٢٦ ب)

حل المعادلات الآتية

(١) $\text{س}^{3} + \text{ص}^{3}$ = ٤٠٧ ، س + ص = ١١

(٢) $\text{س}^{3} + \text{ص}^{3}$ = ٦٣٧ ، س + ص = ١٣

(٣) س + ص = ٢٣ ، $\text{س}^{3} + \text{ص}^{3}$ = ٣٤٧٣

(٤) $\text{س}^{3} - \text{ص}^{3}$ = ٢١٨ ، س − ص = ٢

(٥) $\text{س} - \text{ص} = ٤$ ، $\text{س}^{٣} - \text{ص}^{٣} = ٩٨٨$

(٦) $\text{س}^{٣} - \text{ص}^{٣} = ٢١٩٧$ ، $\text{س} - \text{ص} = ١٣$

(٧) $\text{س}^{٤} + \text{س}^{٢}\text{ص}^{٢} + \text{ص}^{٤} = ٢١٢٨$ ، $\text{س}^{٢} + \text{س ص} + \text{ص}^{٢} = ٧٦$

(٨) $\text{س}^{٤} + \text{س}^{٢}\text{ص}^{٢} + \text{ص}^{٤} = ٢٩٢٣$ ، $\text{س}^{٢} - \text{س ص} + \text{ص}^{٢} = ٣٧$

(٩) $\text{س}^{٤} + \text{س}^{٢}\text{ص}^{٢} + \text{ص}^{٤} = ٩٢١١$ ، $\text{س}^{٢} - \text{س ص} + \text{ص}^{٢} = ٦١$

(١٠) $\text{س}^{٤} + \text{س}^{٢}\text{ص}^{٢} + \text{ص}^{٤} = ٧٣٧١$ ، $\text{س}^{٢} - \text{س ص} + \text{ص}^{٢} = ٦٣$

(١١) $\frac{١}{\text{س}^{٢}} + \frac{١}{\text{ص}^{٢}} = \frac{٤٨١}{٥٧٦}$ ، $\frac{١}{\text{س}} + \frac{١}{\text{ص}} = \frac{٢٩}{٢٤}$

(١٢) $\frac{١}{\text{س}^{٢}} + \frac{١}{\text{ص}^{٢}} = \frac{٦١}{٩٠٠}$ ، $\text{س ص} = ٣٠$

(١٣) $\frac{\text{س}}{\text{ص}} + \frac{\text{ص}}{\text{س}} = ٢\frac{١}{٢}$ ، $\text{س} + \text{ص} = ٦$

(١٤) $\frac{\text{س}}{\text{ص}} + \frac{\text{ص}}{\text{س}} = ٢\frac{١٦}{٢١}$ ، $\text{س} - \text{ص} = ٤$

(١٥) $\frac{٣٤}{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}} = \frac{١٥}{\text{س ص}}$ ، $\text{س} + \text{ص} = ٨$

(١٦) $\text{س}^{٣} - \text{ص}^{٣} = ٥٦$ ، $\text{س}^{٢} + \text{س ص} + \text{ص}^{٢} = ٢٨$

(١٧) $٤(\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}) = ١٧\,\text{س ص}$ ، $\text{س} - \text{ص} = ٦$

(١٨) $\text{س}^{١} + \text{ص}^{١} = ١٢٦$ ، $\text{س}^{٢} - \text{س ص} + \text{ص}^{٢} = ٢١$

(١٩) $\frac{١}{\text{س}^{٣}} + \frac{١}{\text{ص}^{٣}} = ١\frac{١}{١٢٥}$ ، $\frac{١}{\text{س}} + \frac{١}{\text{ص}} = ١\frac{١}{٥}$

(٢٠) $\frac{١}{\text{س}^{٣}} - \frac{١}{\text{ص}^{٣}} = ٩١$ ، $\frac{١}{\text{س}} - \frac{١}{\text{ص}} = ١$

بند ٢٠٦ — يمكن استعمال الطريقة الآتية فى جميع الأحوال التى تكون فيها المعادلتان من درجة واحدة ومتجانستين [راجع بند ٢٤]

(مثال) لحل $\text{س}^{٢} + \text{س ص} + ٢\,\text{ص}^{٢} = ٧٤$ .... (١)

$٢\,\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س ص} + \text{ص}^{٢} = ٧٣$ .... (٢)

نضع م س بدل ص فى كل من المعادلتين فيحدث أن

$\text{س}^{٢}(١ + \text{م} + ٢\,\text{م}^{٢}) = ٧٤$ .... (٣)

و $\text{س}^{٢}(٢ + ٢\,\text{م} + \text{م}^{٢}) = ٧٣$ .... (٤)

وبالقسمة نجد أن $\frac{١ + \text{م} + ٢\,\text{م}^{٢}}{٢ + ٢\,\text{م} + \text{م}^{٢}} = \frac{٧٤}{٧٣}$

$\therefore\ ٧٣ + ٧٣\,\text{م} + ١٤٦\,\text{م} = ١٤٨ + ١٤٨\,\text{م} + ٧٤\,\text{م}^{٢}$

$\therefore\ ٧٢\,\text{م}^{٢} - ٧٥\,\text{م} - ٧٥ = ٠$

أى $٢٤\,\text{م}^{٢} - ٢٥\,\text{م} - ٢٥ = ٠$

$\therefore\ (٨\,\text{م} + ٥)(٣\,\text{م} - ٥) = ٠$

$\therefore\ \text{م} = -\frac{٥}{٨}$ أو $\frac{٥}{٣}$

(أولا) نعتبر أن $م = -\frac{٥}{٨}$

فنضع هذه القيمة فى (٣) أو (٤)

فينتج من (٣) أن $س^٢ (١ - \frac{٥}{٨} + \frac{٢٥}{٦٤}) = ٧٤$

$\therefore$ $س^٢ = \frac{٧٤ \times ٦٤}{٧٤} = ٦٤$

$\therefore$ $س = \pm ٨$

$\therefore$ $ص = م س = -\frac{٥}{٨} س = \mp ٥$

(ثانيا) نعتبر أن $م = \frac{٥}{٣}$

فينتج من (٣) أن $س^٢ (١ + \frac{٥}{٣} + \frac{٢٥}{٩}) = ٧٤$

أو $س^٢ = \frac{٧٤ \times ٩}{٧٤} = ٩$

$\therefore$ $س = \pm ٣$

$\therefore$ $ص = م س = \frac{٥}{٣} س = \pm ٥$

بند ٢٠٧ — إذا كانت إحدى المعادلتين من الدرجة الأولى والأخرى من درجة أعلى من الأولى يمكننا أن نستخرج من المعادلة البسيطة قيمة أحد المجهولين بالنسبة إلى المجهول الآخر ثم نضع تلك القيمة فى المعادلة الأخرى

(مثال) لحل $٣ س - ٤ ص = ٥$ .... (١)

$٣ س^٢ - س ص - ٣ ص^٢ = ٢١$ .... (٢)

نستنتج من (١) أن $س = \frac{٥ + ٤ ص}{٣}$

وبوضع هذه القيمة فى (٢) يحدث أن $\frac{٣ (٥ + ٤ ص)^٢}{٩} - \frac{ص (٥ + ٤ ص)}{٣} - ٣ ص^٢ = ٢١$

$\therefore$ $٧٥ + ١٢٠ ص + ٤٨ ص^٢ - ١٥ ص - ١٢ ص^٢ - ٢٧ ص = ١٨٩$

ومنه $٩ ص^٢ + ١٠٥ ص - ١١٤ = ٠$

$\therefore$ $٣ ص^٢ + ٣٥ ص - ٣٨ = ٠$

$\therefore$ $(ص - ١)(٣ ص + ٣٨) = ٠$

$\therefore$ $ص = ١$ أو $-\frac{٣٨}{٣}$

وبالتعويض فى (١) نجد أن $س = ٣$ أو $-\frac{١٣٧}{٩}$

بند ٢٠٨ — الأمثلة المتقدمة كافية لتوضيح الطرق التى تستعمل فى حل المعادلات الآتية ذات الدرجة الثانية على وجه الأجمال ولكن قد يلزم أحيانا استعمال شىء من التحيل فى الحل

(مثال ١) لحل $س^٢ + ٤ س ص + ٣ س = ٤٠ - ٦ ص - ٤ ص^٢$ ...... (١)

$٢ س ص - س^٢ = ٣$ .... (٢)

نستنتج من (١) أن

$$\text{س}^{٢} + ٤\,\text{س ص} + ٤\,\text{ص}^{٢} + ٣\,\text{س} + ٦\,\text{ص} = ٤٠$$

أى $(\text{س} + ٢\,\text{ص})^{٢} + ٣\,(\text{س} + ٢\,\text{ص}) - ٤٠ = ٠$

أو $(\overline{\text{س} + ٢\,\text{ص}} + ٨)\,(\overline{\text{س} + ٢\,\text{ص}} - ٥) = ٠$

ومن هذا ينتج أن $\text{س} + ٢\,\text{ص} = -٨$ أو ٥

(أولا) نربط $\text{س} + ٢\,\text{ص} = ٥$ مع (٢)

فينتج أن $٢\,\text{س} - ٥\,\text{س} + ٣ = ٠$

ومن هذه المعادلة يستنتج أن $\text{س} = ١$ أو $\frac{٣}{٢}$

وبوضع مقدارى س الناتجين بدلها فى $\text{س} + ٢\,\text{ص} = ٥$

نجد أن $\text{ص} = ٢$ أو $\frac{٧}{٤}$

(ثانيا) نربط $\text{س} + ٢\,\text{ص} = -٨$ مع (٢)

فيحدث أن $٢\,\text{س}^{٢} + ٨\,\text{س} + ٣ = ٠$

ومن هذه المعادلة نستنتج أن $\text{س} = \frac{-٤ \pm \sqrt{١٠}}{٢}$ ، $\text{ص} = \frac{-١٢ \mp \sqrt{١٠}}{٤}$

(مثال ٢) لحل $\text{س}^{٢}\,\text{ص}^{٢} - ٦\,\text{س} = ٣٤ - ٣\,\text{ص}$ (١)

$٣\,\text{س ص} + \text{ص} = ٢\,(٩ + \text{س})$ (٢)

نستنتج من (١) أن $\text{س}^{٢}\,\text{ص}^{٢} - ٦\,\text{س} + ٣\,\text{ص} = ٣٤$

ونستنتج من (٢) أن $٩\,\text{س ص} - ٦\,\text{س} + ٣\,\text{ص} = ٥٤$

وبالطرح ينتج أن $\text{س}^{٢}\,\text{ص}^{٢} - ٩\,\text{س ص} + ٢٠ = ٠$

أى أن $(\text{س ص} - ٥)\,(\text{س ص} - ٤) = ٠$

$\therefore$ $\text{س ص} = ٥$ أو ٤

(أولا) نعتبر $\text{س ص} = ٥$

فنضع ٥ بدل س ص فى (٢) فنجد أن $\text{ص} - ٢\,\text{س} = ٣$

ومن هاتين المعادلتين نستنتج أن $\text{س} = ١$ أو $-\frac{٥}{٢}$

و $\text{ص} = ٥$ أو -٢

(ثانيا) نعتبر $\text{س ص} = ٤$

فنضع ٤ بدل س ص فى (٢) فنجد أن $\text{ص} - ٢\,\text{س} = ٦$

ومن هاتين المعادلتين نستنتج أن $\text{س} = \frac{-٣ \pm \sqrt{١٧}}{٢}$

و $\text{ص} = ٣ \pm \sqrt{١٧}$

(تمارين ٢٦ ح)

حل المعادلات الآتية

(١) ٥ س − ص = ١٧
س ص = ١٢

(٢) س^{٢} + س ص = ١٥
ص^{٢} + س ص = ١٠

(٣) س − ص = ١٠
س^{٢} − ٢ س ص − ٣ ص^{٢} = ٨٤

(٤) ٣ س + ٢ ص = ١٦
س ص = ١٠

(٥) ٣ س − ص = ١١
٣ س^{٢} − ص^{٢} = ٤٧

(٦) س − ٣ ص = ١
س^{٢} − ٢ س ص + ٩ ص^{٢} = ١٧

(٧) س + ٢ ص = ٩
٣ ص^{٢} − ٥ س^{٢} = ٤٣

(٨) س^{٢} + ص^{٢} = ٥
٢ س ص − ص^{٢} = ٣

(٩) ٥ س + ص = ٣
٢ س^{٢} − ٣ س ص − ص = ١

(١٠) ٣ س^{٢} − ٥ ص^{٢} = ٢٨
٣ س ص − ٤ ص^{٢} = ٨

(١١) ٣ س^{٢} − ص^{٢} = ٢٣
٢ س^{٢} − س ص = ١٢

(١٢) س^{٢} + س ص + ص^{٢} = ٣ $\frac{١}{٤}$
٢ س^{٢} − ٣ س ص + ٢ ص^{٢} = ٢ $\frac{٣}{٤}$

(١٣) س^{٢} − ٣ س ص + ص^{٢} + ١ = ٠
٣ س^{٢} − س ص + ٣ ص^{٢} = ١٣

(١٤) ٧ س ص − ٨ س^{٢} = ١٠
٨ ص^{٢} − ٩ س ص = ١٨

(١٥) س^{٢} − ٢ س ص = ٢١
س ص + ص^{٢} = ١٨

(١٦) س^{٢} + ٣ س ص = ٥٤
س ص + ٤ ص^{٢} = ١١٥

(١٧) س^{٣} + ص^{٣} = ١٥٢
س^{٢} ص + س ص^{٢} = ١٢٠

(١٨) س^{٣} − ص^{٣} = ١٢٧
س^{٢} ص − س ص^{٢} = ٤٢

(١٩) س^{٣} − ص^{٣} = ٢٠٨
س ص (س − ص) = ٤٨

(٢٠) س^{٢} ص^{٢} + ٥ س ص = ٨٤
س + ص = ٨

(٢١) س^{٢} + ٤ ص^{٢} + ٨٠ = ١٥ س + ٣٠ ص
س ص = ٦

(٢٢) ٩ س^{٢} + ص^{٢} − ٦٣ س − ٢١ ص + ١٢٨ = ٠
س ص = ٤

الباب السابع والعشرون

مسائل يؤدّى حلها إلى استعمال معادلات من الدرجة الثانية

بند ٢٠٩ — سنبحث فى هذا الباب فى مسائل يؤدّى حلها إلى استعمال معادلات من الدرجة الثانية

(مثال ١) سار قطار ٣٠٠ كيلومتر بسرعة منتظمة لو أنها زادت خمسة كيلومترات فى الساعة لنقص الزمن الذى استغرقه ساعتين فما سرعة القطار

نفرض أن سرعة القطار س من الكيلومترات فى الساعة فيكون الزمن الذى استغرقه فى قطع المسافة $\frac{٣٠٠}{\text{س}}$ من الساعات

وبالفرض الآخر يكون الزمن $\frac{٣٠٠}{\text{س}+٥}$ من الساعات

$$\therefore \quad \frac{٣٠٠}{\text{س}+٥} = \frac{٣٠٠}{\text{س}} - ٢ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١)$$

ومن هذا يستنتج أن $\text{س} + ٥\,\text{س} - ٧٥٠ =$

أو $(\text{س} + ٣٠)(\text{س} - ٢٥) =$

$$\therefore \quad \text{س} = ٢٥ \quad \text{أو} \quad -٣٠$$

فالسرعة إذن ٢٥ كيلومترا فى الساعة لأن مقدار س السالب لا يقبل عقلا

يحدث غالبا أن المعادلة الجبرية التى تتكوّن من منطوق المسألة يكون لها جذر (نتيجة) لا ينطبق على المسألة المراد حلها ولكن يمكننا أحيانا إيجاد معنى لأمثال تلك الجذور بتغيير عبارة المسألة والفروض المشتملة عليها تغييرا مناسبا ففى المسألة السابقة يمكننا إيجاد معنى للجذر السالب كما يأتى

لكون المعادلة (١) تصح بالجذرين ٢٥ ، −٣٠ فاذا وضعنا $-\text{س}$ بدل س نجد أن المعادلة

$$\frac{٣٠٠}{-\text{س}+٥} = \frac{٣٠٠}{-\text{س}} - ٢ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢)$$

تصح بالجذرين −٢٥ ، ٣٠

وبتغيير جميع العلامات فى المعادلة (٢)

ينتج $\frac{٣٠٠}{\text{س}-٥} = \frac{٣٠٠}{\text{س}} + ٢$

وهذه المعادلة تصح بالجذرين −٢٥ ، ٣٠ وهى ناتجة من السؤال الآتى

سار قطار ٣٠٠ كيلومتر بسرعة منتظمة لو نقصت خمسة كيلومترات فى الساعة لزاد الزمن الذى استغرقه ساعتين فما سرعة القطار (الجواب أن السرعة ٣٠ كيلومترا فى الساعة) .

(مثال ٢) باع رجل حصانا بمبلغ ٧٢ جنيها فوجد أن خسارته فى المائة تساوى $\frac{١}{٨}$ عدد الجنيهات التى دفعها ثمنا للحصان فبكم اشترى الحصان

نفرض أن الرجل اشترى الحصان بمبلغ س من الجنيهات فتكون خسارته فى المائة جنيه $\frac{\text{س}}{٨}$ من الجنيهات وتكون الخسارة فى س من الجنيهات $\frac{\text{س}}{٨٠٠} \times \text{س}$ أى $\frac{\text{س}^{٢}}{٨٠٠}$ من الجنيهات

$\therefore$ الثمن الذى بيع به الحصان $\text{س} - \frac{\text{س}^{٢}}{٨٠٠}$ من الجنيهات

$$\therefore \quad \text{س} - \frac{\text{س}^{٢}}{٨٠٠} = ٧٢$$

أو $\text{س}^{٢} - ٨٠٠\,\text{س} + ٥٧٦٠٠ =$

أى $(\text{س} - ٨٠)(\text{س} - ٧٢٠) =$

$$\therefore \quad \text{س} = ٨٠ \text{ أو } ٧٢٠$$

ولكون كل من هـذين المقدارين يطابق الفروض المشـتمل عليهـا منطوق المسألة يكون ثمن شراء الحصان ٨٠ جنيها أو ٧٢٠ جنيها .

(مثـال ٣) حوض يمكن أن تملأه حنفيتان فى $٣٣\frac{١}{٣}$ من الدقائق فاذا كانت الحنفية الكبرى تملأ الحوض فى زمن أقل مما تملؤه فيـه الصغرى بمقدار ١٥ دقيقة فما مقدار الزمن الذى تملأ كل منهما فيه الحوض بمفردها

نفرض أن الزمن الذى تملؤه فيـه الحنفية الصـغرى س من الدقائق فيكون الزمن الذى تملؤه فيه الحنفية الكبرى $\text{س} - ١٥$ من الدقائق فاذا فتحتا معا تملآن $\left(\frac{١}{\text{س}} + \frac{١}{\text{س} - ١٥}\right)$ من الحوض فى الدقيقة ولكونهما تملآن حسب منطوق المسألة $\frac{١}{٣٣\frac{١}{٣}}$ أو $\frac{٣}{١٠٠}$ من الحوض فى دقيقة

$$\text{يكون إذن} \quad \frac{١}{\text{س}} + \frac{١}{\text{س} - ١٥} = \frac{٣}{١٠٠}$$

$$\therefore \quad ١٠٠\,(٢\,\text{س} - ١٥) = ٣\,\text{س}\,(\text{س} - ١٥)$$

$$\therefore \quad ٣\,\text{س}^{٢} - ٢٤٥\,\text{س} + ١٥٠٠ = ٠$$

$$\therefore \quad (\text{س} - ٧٥)\,(٣\,\text{س} - ٢٠) = ٠$$

$$\therefore \quad \text{س} = ٧٥ \text{ أو } ٦\frac{٢}{٣}$$

فالصغرى تملؤه فى ٧٥ دقيقة والكبرى فى ٦٠ دقيقة أما الناتج الثانى وهو $٦\frac{٢}{٣}$ فغير مقبول عقلا

(مثـال ٤) رجل يمكنه أن يقطع ٢٤ كيلومترا فى نهر فى ٥ ساعات إذا جذف نصف المسافة مع التيار ومشى النصف الآخر على الشاطئ ولو جذف نصف المسافة فى الجهة المضادة للتيار لاحتاج إلى ٧ ساعات لقطع المسافة بأجمعها أما إذا كان الماء راكدا فانه يستغرق فى قطع المسافة جاذفا ـــ ٥ من الساعات فما سرعته إذا مشى وما سرعته إذا جذف وما سرعة التيار

نفرض أن الرجل يمشى على قدميـه بسرعة س من الكيلومترات فى السـاعة ويجذف بسرعة ص من الكيلومترات فى الساعة وأن سرعة التيار ع من الكيلومترات فى الساعة

فاذا جذف مع التيـار تكون سرعته ص + ع من الكيلومترات فى الساعة واذا جذف فى الجهة المضادة للتيار تكون السرعة ص ــ ع من الكيلومترات فى الساعة ومن ذلك نستنتج المعادلات الآتية :

$$\frac{١٢}{س} + \frac{١٢}{ص + ع} = ٥ \quad \text{......} \quad (١)$$

، $$\frac{١٢}{س} + \frac{١٢}{ص - ع} = ٧ \quad \text{......} \quad (٢)$$

، $$\frac{١٢}{س} + \frac{١٢}{ص} = ٥\frac{٢}{٣} \quad \text{......} \quad (٣)$$

وبطرح (١) من (٣) يحدث أن $\frac{١}{ص} - \frac{١}{ص + ع} = \frac{١}{١٨}$ ...... (٤)

وكذلك بطرح (٣) من (٢) يحدث أن

$$\frac{١}{ص - ع} - \frac{١}{ص} = \frac{١}{٩} \quad \text{......} \quad (٥)$$

ومن (٤) نستنتج أن $١٨ ع = ص (ص + ع)$ ...... (٦)

ومن (٥) « « $٩ ع = ص (ص - ع)$ ...... (٧)

وبقسمة (٦) على (٧) يحدث أن $٢ = \frac{ص + ع}{ص - ع}$

ومن هذه المعادلة نجد أن $ص = ٣ ع$

فمن (٤) ينتج أن $ع = ١\frac{١}{٢}$ وتكون $ص = ٤\frac{١}{٢}$ ، $س = ٤$

فسرعته إذا مشى إذن ٤ كيلومترات فى الساعة وسرعته إذا جذف $٤\frac{١}{٢}$ من الكيلومترات فى الساعة وسرعة التيار $١\frac{١}{٢}$ من الكيلومترات فى الساعة

(تمارين ٢٧)

(١) ما العـدد الذى إذا طرح من مربعه ١١٩ يكون باقى الطرح مساويا لعشرة أمثال باقى طرح ٨ من هذا العدد

(٢) عمر رجل خمسة أمثال عمر ولده ومجموع مربعى عمريهما ٢١٠٦ فما عمراهما

(٣) مجموع مقلوبى عددين متتاليين $\frac{١٥}{٥٦}$ فما العددان

(٤) ما العدد الذى إذا أضيف إليه ١٧ يصير الناتج مساويا مقلوب هذا العدد ستين مرة

(٥) ما العددان اللذان مجموعهما ٩ أمثال فرقهما وفرق مربعيهما ٨١

(٦) حاصل جمع عدد ومربعه تسعة أمثال العدد الذى يليه فى الكبر فما العدد

(٧) إذا زادت سرعة قطار ٥ كيلومترات فى الساعة فانه يقطع مسـافة ٢١٠ كيلومترات فى زمن أقل بساعة مما يقطع فيه هـذه المسافة عينها لو سار بسرعته الأصلية فما الزمن الذى يقطع فيـه القطار هذه المسافة

(٨) أوجد عددين مجموعهما ١٢ ومجموع مربعيهما ٧٤

(٩) محيط حقل مستطيل الشكل ٥٠٠ متر ومسطحه ١٤٤٠٠ متر مربع فما طول أضلاعه

(١٠) محيط مربع يزيد على محيط مربع آخر مائة متر ومساحة المربع الأكبر تزيد على ثلاثة أمثال مساحة الأصغر ٣٢٥ مترا مربعا فما طول ضلع كل منهما

(١١) إذا فتحت حنفيتان معا تملآن حوضا فى ½ ٢٢ من الدقائق وأكبرهما تملؤه فى زمن يقل عما تملؤه فيه الصغرى بأربع وعشرين دقيقة فما الزمن الذى تملأ فيه كل منهما الحوض

(١٢) قطع مسافر ١٠٨ كيلومترات فوجد أنه كان من الممكن أن يوفر ½ ٤ من الساعات إذا زادت سرعته كيلومترين فى الساعة فما السرعة التى قطع بها هذه المسافة

(١٣) إشتريت كرات خشبية بخمسة جنيهات ولو نقص ثمن الكرة خمسة قروش لأمكننى أن أشترى بالمبلغ نفسه خمسة كرات زيادة على ما اشتريت فما ثمن الكرة

(١٤) إشترى خادم بيضا بمبلغ ٥ قروش وانكسر منه فى الطريق أربع بيضات فزاد بذلك ثمن كل ٨ بيضات ½ قرش على سعر السوق فكم بيضة رجع بها الخادم

(١٥) ما ثمن اثنتى عشرة بيضة إذا علم أنه لو زيد ٥ بيضات على ما يشترى بمبلغ ٥ قروش لنقص ثمن الاثنتى عشرة بيضة ٦ مليمات

(١٦) طول قطعة أرض ٥٠ مترا وعرضها ٣٤ مترا وحولها طريق عرضه منتظم ومساحته ٥٤٠ مترا مربعا فما عرض هذا الطريق

(١٧) يمكن تبليط بهو (صالة) بمائتى بلاطة مربعة متساوية المساحة ولو زاد كل من طول البلاطة وعرضها سنتيمترا للزم للتبليط ١٢٨ بلاطة فقط فما طول البلاطة

(١٨) فى وسط حديقة مربعة قطعة أرض مربعة أيضا مزروعة فاكهة وحول هذه القطعة طريق مرصوف بالحجارة الصغيرة عرضه ٤ أمتار وحوله حافة من الأزهار عرضها ستة أمتار فاذا كان مسطح حافة الأزهار وقطعة الفاكهة معا ٧٢١ مترا مربعا فما مسطح قطعة الفاكهة وحدها

(١٩) وجدت بائعة تفاح أنها إذا نقصت سعره مقدار ½ قرش فى كل ١٢ تبيع ٦٠ تفاحة زيادة على ما كانت تبيعه قبل بثلاثين قرشا فبكم كانت تبيع كل ١٢ تفاحة من قبل

(٢٠) مستطيلان مساحة كل منهما ٤٨٠ مترا مربعا والفرق بين طوليهما ١٠ أمتار وبين عرضيهما ٤ أمتار فما طول كل من بعدى المستطيلين

(٢١) ما العدد المحصور بين ١٠ و ١٠٠ الذى إذا ضرب فى رقمه الأيسر ينتج ٢٨٠ واذا ضرب مجموع رقميه فى ذلك الرقم نفسه ينتج ٥٥

(٢٢) باع غنام قطيعا من الغنم بسعر الرأس ٣٧٥ قرشا وكان قد اشترى الرأس بسعر س من القروش ووجد أنه كسب س فى المائة على المبلغ الذى دفعه فى الشراء فما مقدار س

(٢٣) إشترى تاجر عدة أمتار من قماش بمبلغ ٥ جنيهات فحفظ لنفسه ٤ أمتار وباع الباقى بزيادة ١٠ قروش فى المتر على ما دفعه فحصل على ١٣٠ قرشا زيادة على ما صرفه فكم مترا اشترى

(٢٤) إذا استغرقت عربة محيط عجلتها ٤ أمتار ثانية زيادة فى كل دورة تدورها عجلتها فان سرعتها تقل بمقدار ٣٫٨٤ من الكيلومترات فى الساعة فما سرعتها

(٢٥) إشترى سمسار أسهم سكة حديدية بمبلغ ١٨٧٥ جنيها فحفظ لنفسه ١٥ سهما منها وباع الباقى بمبلغ ١٧٤٠ جنيها وربح بذلك ٤ جنيهات فى كل سهم باعه فكم سهما اشترى

(٢٦) قام قطاران فى وقت واحد من محطتى ا ، ب اللتين تبعد كل منهما عن الأخرى بمقدار ٣٠٠ كيلومتر قاصــدا كل منهما المحطة الأخرى وبعد أن تقابلا وصل القطار القائم من ا محطة ب بعد مضى تسع ساعات ووصل القائم من ب محطة ا بعد مضى ٤ ساعات فما سرعة كل منهما

(٢٧) سار قطار ا من محطة ط إلى محطة ى والمسافة بين المحطتين ٢٤٠ كيلومترا وكان يسـير بسرعة منتظمة وبعد ساعة قام قطار آخر ب من محطة ط ووصل بعد ساعتين إلى نقطة قد مر بها ا قبــل ذلك بمقدار ٤٥ دقيقة ثم زادت سرعة القطار ب ٥ كيلومترات فى السـاعة فوصل القطاران محطة ى فى وقت واحد فما سرعة كل منهما فى الابتداء

(٢٨) ملئ برميــل ط بخمسين لترا من المـاء وبرميل ى بأربعين لترا من الخل ثم أخذ س من اللترات من كل منهما فخلطت ثم ردّت إلى البرميلين وكرر ذلك مرة أخرى فما مقــدار س إذا صار مقدار الخل فى البرميل ط $\frac{٧}{٨}$ ٨ من اللترات بعد الخلط الثانى

(٢٩) ا ، ب فلاحان يملكان معا ٣٠ بقرة باع كل منهما بقراته بسعر غير الذى باع به الآخر ولكن مجموع الثمن واحد فى الحالتين ولو باع ا بقراته بالسعر الذى باع به ب لبلغ مجموع ثمن بقراته ٣٢٠ جنيها ولو باع ب بقراته بالســعر الذى باع به ا لبلغ مجموع ثمن بقراته ٢٤٥ جنيهـا فكم بقرة كان يملك كل منهما

(٣٠) أمر أحد الناس خادمه أن يحضر له العربة وينتظره بها على محطة السكة الحديدية القريبة من منزله فى زمن معين ولكن هذا الرجل وصل إلى المحطة قبــل الميعاد المحــدّد بساعة ونصف فلم ينتظر العربة بل شرع فى الحال يمشى فمشى بسرعة ٤ أميال فى الساعة وقابل عربته بعد أن سارت ٨ أميال من الطريق فركبها ووصل بيته قبل الوقت الذى كان يتوقع الوصول فيه بساعة فما بعد المحطة عن المنزل وبأى سرعة كانت تسير عربته

(٣١) ط نقطة على المستقيم ا ب الذى طوله ٦ أوجد طول ا ط إذا كان ا ب . ب ط = (ا ط)^2 وبيّن معنى كل من الجذرين الناتجين

(٣٢) إذا قسم مستقيم طوله ٦ سنتيمترات من الداخل بنقطة إلى جزأين بحيث يكون المستطيل المكوّن من المســتقيم كله وأحد الجزأين يساوى مربع الجزء الآخر فالمطلوب إيجاد طول كل من هذين الجزأين مقرّبا لأقرب مليمتر

(٣٣) إذا مدّ المستقيم ا ب إلى نقطة ط بحيث كان ا ب . ا ط = (ب ط)^2 وكان ا ب = ٨ سنتيمترات فما طول كل من ا ط ، ب ط مقربا لأقرب مليمتر .

(٣٤) إذا قسم اى مستقيم مثل ا ب من الخارج بحيث كان ا ب . ا ط = (ب ط)^2 فأثبت

(أولا) أن (ا ب)^2 + (ا ط)^2 = ٣ (ب ط)^2

(ثانيا) أن (ا ب + ا ط)^2 = ٥ (ب ط)^2

(٣٥) إذا مدّ المستقيم ا ب إلى نقطة ط بحيث يكون

$$\overline{\text{ب ط}}^{2} = 2\ \overline{\text{ا ب}}^{2}$$

وكان ا ب = ٥ر٣ من السنتيمترات فما طول ا ط مقربا لأقرب مليمتر

(٣٦) أوجد نقطة ط على المستقيم ا ب بحيث يكون

$$\text{ا ط}\ (\text{ا ط} - \text{ب ط}) = \overline{\text{ب ط}}^{2}$$

واذا كان ا ب = ٢ر٤ من السنتيمترات فما طول كل من ا ط ، ب ط مقربا لأقرب مليمتر وحقق المعادلة السابقة بوضع مقادير المستقيمات بدلها

(٣٧) إقسم مستقيما طوله ١٣ سنتيمترا إلى جزأين بحيث تكون مساحة المستطيل المكوّن منهما تساوى ٣٦ سنتيمترا مربعا

(٣٨) بيّن صحة حل التمرين السابق بالكيفية الآتية

إرسم نصف دائرة على الخط ا ب الذى طوله ١٣ سنتيمترا وأقم ا ط من نقطة ا عمودا على ا ب واجعل طوله ٦ سنتيمترات .

ثم ارسم من نقطة ط مستقيما ط ى ر موازيا للمستقيم ا ب وقاطعا لنصف الدائرة فى النقطتين ى ، ر ثم ارسم ى س ، ر ص عمودين على ا ب فتكون س أو ص نقطة التقسيم المطلوبة حقق الناتج من الحل الجبرى لسؤال ٣٧ بالقياس

(٣٩) حل المعادلات الآتية بالرسم البيانى جاعلا وحدة القياس السنتيمتر ويراعى فى الأجوبة أن تكون الجذور مقربة لأقرب مليمتر

(١) $\text{س}\ (7 - \text{س}) = 12$	(٣) $\text{س}^{2} - 6\ \text{س} + 4 = 0$
(٢) $\text{س}^{2} - 11\ \text{س} + 30 = 0$	(٤) $\text{س}^{2} + 13 = 8\ \text{س}$

الباب الثامن والعشرون ــ عوامل أصعب من السابقة

بند ٢١٠ ــ شرحنا فى الباب السابع عشر عدة قواعد لتحليل المقادير الجبرية إلى عواملها وسيكون هذا الباب متمما له فنشرح فيه حالات أصعب من السابقة

بند ٢١١ ــ قد يمكن وضع بعض المقادير الجبرية على صورة الفرق بين مربعين بتغيير قليل فى تركيبها ثم تحلل بالطريقة المبينة ببند ١٣٣

(مثال ١) لتحليل المقدار $\text{س}^{4} + \text{س}^{2}\text{ص}^{2} + \text{ص}^{4}$ إلى عوامله

نقول إن $\text{س}^{4} + \text{س}^{2}\text{ص}^{2} + \text{ص}^{4} = (\text{س}^{4} + 2\,\text{س}^{2}\text{ص}^{2} + \text{ص}^{4}) - \text{س}^{2}\text{ص}^{2}$

$$= (\text{س}^{2} + \text{ص}^{2})^{2} - (\text{س ص})^{2}$$

$$= (\text{س}^{2} + \text{ص}^{2} + \text{س ص})(\text{س}^{2} + \text{ص}^{2} - \text{س ص})$$

$$= (\text{س}^{2} + \text{س ص} + \text{ص}^{2})(\text{س}^{2} - \text{س ص} + \text{ص}^{2})$$

(مثال ٢) لتحليل المقدار $س^{٤} - ١٥ س^{٢} ص^{٢} + ٩ ص^{٤}$ إلى عوامله

نقول إن $س^{٤} - ١٥ س^{٢} ص^{٢} + ٩ ص^{٤} = (س^{٤} - ٦ س^{٢} ص^{٢} + ٩ ص^{٤}) - ٩ س^{٢} ص^{٢}$

$$= (س^{٢} - ٣ ص^{٢})^{٢} - (٣ س ص)^{٢}$$

$$= (س^{٢} - ٣ص^{٢} + ٣س ص)(س^{٢} - ٣ص^{٢} - ٣س ص)$$

بند ٢١٢ — المقادير التي يمكن وضعها على الصورة الآتية $س^{٣} \pm \frac{١}{ص^{٣}}$ يمكن تحليلها إلى عواملها لاتباع الطرق المستعملة في تحليل مجموع مكعبين أو الفرق بينهما (بند ١٣٦)

(مثال ١) لتحليل المقدار $\frac{٨}{ا^{٣}} - ٢٧ ب^{٦}$ إلى عوامله

نقول إن $\frac{٨}{ا^{٣}} - ٢٧ ب^{٦} = \left(\frac{٢}{ا}\right)^{٣} - (٣ ب^{٢})^{٣} = \left(\frac{٢}{ا} - ٣ ب^{٢}\right)\left(\frac{٤}{ا^{٢}} + \frac{٦ ب^{٢}}{ا} + ٩ ب^{٤}\right)$

(مثال ٢) لتحليل المقدار $ا^{٢} س^{٣} - \frac{٨ ا^{٢}}{ص^{٣}} - س^{٣} + \frac{٨}{ص^{٣}}$ إلى أربعة عوامل

نقول إن $ا^{٢} س^{٣} - \frac{٨ ا^{٢}}{ص^{٣}} - س^{٣} + \frac{٨}{ص^{٣}} = س^{٣}(ا^{٢} - ١) - \frac{٨}{ص^{٣}}(ا^{٢} - ١)$

$$= (ا^{٢} - ١)\left(س^{٣} - \frac{٨}{ص^{٣}}\right)$$

$$= (ا + ١)(ا - ١)\left(س - \frac{٢}{ص}\right)\left(س^{٢} + \frac{٢ س}{ص} + \frac{٤}{ص^{٢}}\right)$$

(مثال ٣) لتحليل المقدار $ا^{٩} - ٦٤ ا^{٣} - ا^{٦} + ٦٤$ إلى ستة عوامل

نقول إن المقدار $= ا^{٣}(ا^{٦} - ٦٤) - (ا^{٦} - ٦٤)$

$$= (ا^{٦} - ٦٤)(ا^{٣} - ١)$$

$$= (ا^{٣} + ٨)(ا^{٣} - ٨)(ا^{٣} - ١)$$

$$= (ا + ٢)(ا^{٢} - ٢ا + ٤)(ا - ٢)(ا^{٢} + ٢ا + ٤)(ا - ١)(ا^{٢} + ا + ١)$$

(مثال ٤) $ا(ا - ١) س^{٢} - (ا - ب - ١) س ص - ب(ب + ١) ص^{٢}$

$$= \{ا س - (ب + ١) ص\}\{(ا - ١) س + ب ص\}$$

(ملاحظة) في الأمثلة التي من قبيل هذا المثال الأخير يمكن معرفة معاملي كل من $س$ و $ص$ في العاملين ذوي الحدّين مباشرة بطريق التخمين ومتى وجدا لا يبقى إلا معرفة ما إذا كان هذان المعاملان ينتجان معامل الحدّ الأوسط في المقدار الأصلي أم لا

بند ٢١٣ — رأينا من مثال (٢) بند ٥٢ أن خارج قسمة

$ا^{٣} + ب^{٣} + ح^{٣} - ٣ ا ب ح$ على $ا + ب + ح$

هو $ا^{٢} + ب^{٢} + ح^{٢} - ب ح - ح ا - ا ب$

إذن $ا^{٣} + ب^{٣} + ح^{٣} - ٣ ا ب ح = (ا + ب + ح)(ا^{٢} + ب^{٢} + ح^{٢} - ب ح - ح ا - ا ب)$ (١)

وهذه النتيجة مهمة ولذا يجب تذكرها دائما ومن الجدير بالملاحظة أن الطرف الأيمن من المتطابقة مجموع مكعبات ا ، ب ، ح مطروحا منه ٣ أمثال حاصل الضرب ا ب ح

ومتى أمكن وضع أى مقدار على صورة الطرف الايمن من المتطابقة السابقة فانه يمكن تحليله إلى عوامله باستعمال القانون (١) المتقدم

(مثال ١) لتحليل المقدار $\text{ا}^3 - \text{ب}^3 + \text{ح}^3 + 3\,\text{ا ب ح}$ إلى عوامله

نقول إن $\text{ا}^3 - \text{ب}^3 + \text{ح}^3 + 3\,\text{ا ب ح} = \text{ا}^3 + (-\text{ب})^3 + \text{ح}^3 - 3\,\text{ا}(-\text{ب})\,\text{ح}$

$= (\text{ا} - \text{ب} + \text{ح})(\text{ا}^2 + \text{ب} + \text{ح}^2 + \text{ب ح} - \text{ح ا} + \text{ا ب})$

وذلك بوضع $-\text{ب}$ بدل ب فى المتطابقة (١)

(مثال ٢) $\text{س}^3 - 8\,\text{ص}^3 - 27 - 18\,\text{س ص} = \text{س}^3 + (-2\,\text{ص})^3 + (-3)^3 - 3\,\text{س}(-2\,\text{ص})(-3)$

$= (\text{س} - 2\,\text{ص} - 3)(\text{س}^2 + 4\,\text{ص}^2 + 9 - 6\,\text{ص} + 3\,\text{س} + 2\,\text{س ص})$

(تمارين ١٢٨)

حلل كلا من المقادير الآتية إلى عوامله

(١) $\text{س}^4 + 16\,\text{س}^2 + 256$

(٢) $81\,\text{ا}^4 + 9\,\text{ا}^2\text{ب}^2 + \text{ب}^4$

(٣) $\text{س}^4 + \text{ص}^4 - 7\,\text{س}^2\text{ص}^3$

(٤) $\text{م}^4 + \text{ن}^4 - 18\,\text{م}^2\text{ن}^2$

(٥) $\text{س}^4 - 6\,\text{س}^2\text{ص}^2 + \text{ص}^4$

(٦) $4\,\text{س}^4 + 9\,\text{ص}^4 - 93\,\text{س}^2\text{ص}^2$

(٧) $4\,\text{م}^4 + 9\,\text{ن}^4 - 24\,\text{م}^2\text{ن}^2$

(٨) $9\,\text{س}^4 + 4\,\text{ص}^4 + 11\,\text{س}^2\text{ص}^2$

(٩) $\text{س}^4 - 19\,\text{س}^2\text{ص}^2 + 25\,\text{ص}^4$

(١٠) $16\,\text{ا}^4 + \text{ب}^4 - 28\,\text{ا}^2\text{ب}^2$

(١١) $\frac{27}{\text{ا}^3\text{ب}^3} - 1$

(١٢) $216\,\text{ا}^3 - \frac{\text{ب}^3}{8}$

(١٣) $\frac{\text{س}^3}{125} + \text{ص}^3$

(١٤) $\frac{\text{م}^3\text{ن}^3}{729} - 1$

(١٥) $\frac{\text{ا}^3\text{ب}^3}{125} + 1000$

(١٦) $\frac{\text{س}^3}{512} - \frac{64}{\text{س}^3}$

حلل كلا من المقادير الآتية إلى عاملين أو أكثر

(١٧) $\text{س}^2\text{ص} + 3\,\text{س ص}^2 - 3\,\text{س}^3 - \text{ص}^3$

(١٨) $4\,\text{م ن}^2 - 20\,\text{ن}^3 + 45\,\text{ن م}^2 - 9\,\text{م}^3$

(١٩) $\text{ا ب}(\text{س}^2 + 1) + \text{س}(\text{ا}^2 + \text{ب}^2)$

(٢٠) $\text{ص}^2\text{ع}^2(\text{س}^4 - 1) + \text{س}(\text{ص}^4 - \text{ع}^4)$

(٢١) $\text{ا}^1 + (\text{ا} + \text{ب})\,\text{ا س} + \text{ب س}^2$

(٢٢) $\text{ط ن}(\text{م}^1 + 1) - \text{م}(\text{ط}^2 + \text{ن}^2)$

(٢٣) ٦ ب س (ا^{٢} + ١) − ا (٤ س^{٢} + ٩ ب^{٢})

(٢٤) (٢ ا^{٢} + ٣ ص^{٢}) س + (٢ س^{٢} + ٣ ا^{٢}) ص

(٢٥) (٢ س^{٢} − ٣ ا^{٢}) ص + (٢ ا^{٢} − ٣ ص^{٢}) س

(٢٦) ا (ا − ١) س^{٢} + (٢ ا^{٢} − ١) س + ا (ا + ١)

(٢٧) ٣ س^{٢} − (٤ ا + ٢ ب) س + ا^{٢} + ٢ ا ب

(٢٨) ٢ ا^{٢} س^{٢} − ٢ (٣ ب − ٤ ح) ب − ح) ع^{٢} + ا ب س ع

(٢٩) (ا^{٢} − ٣ ا + ٢) س^{٢} + (٢ ا^{٢} − ٤ ا + ١) س + ا (ا − ١)

(٣٠) ا (ا + ١) س^{٢} + (ا + ب) س ع − ب (ب − ١) ع^{٢}

(٣١) ب^{٣} + ح^{٣} − ١ + ٣ ب ح

(٣٢) ا^{٣} + ٨ ح^{٣} + ١ − ٦ ا ح

(٣٣) ا^{٣} + ب^{٣} + ٨ ح^{٣} − ٦ ا ب ح

(٣٤) ا^{٣} − ٢٧ ب^{٣} + ح^{٣} + ٩ ا ب ح

(٣٥) ا^{٣} − ب^{٣} − ح^{٣} − ٣ ا ب ح

(٣٦) ٨ ا^{٣} + ٢٧ ب^{٣} + ح^{٣} − ١٨ ا ب ح

(٣٧) حلل س^{٨} + ٨١ س^{٤} + ٦٥٦١ إلى ثلاثة عوامل

(٣٨) حلل (ا^{٤} − ٢ ا^{٢} ب^{٢} − ب^{٤})^{٢} − ٤ ا^{٤} ب^{٤} إلى أربعة عوامل

(٣٩) حلل ٤ (ا ب + ح ء)^{٢} − (ا^{٢} + ب^{٢} − ح^{٢} − ء^{٢})^{٢} إلى أربعة عوامل

(٤٠) حلل س^{٨} − $\frac{١}{٢٥٦}$ إلى أربعة عوامل

(٤١) حلل س^{١٦} − ص^{١٦} إلى خمسة عوامل

(٤٢) حلل س^{١٨} − ص^{١٨} إلى ستة عوامل

حلل كلا من المقادير الآتية إلى اربعة عوامل

(٤٣) $\frac{ا^{٣}}{س^{٢}}$ − ٨ س − ا^{٣} + ٨ س^{٣}

(٤٤) س^{٩} + س^{٣} ع^{٦} − ٨ س ع^{٣} − ٨ ع^{٩}

(٤٥) س^{٩} + س^{٦} + ٦٤ س^{٣} + ٦٤

(٤٦) ٤ ا − ٩ ب + $\frac{٤ ب^{٣}}{ا^{٢}}$ − $\frac{٩ ا^{٣}}{ب^{٢}}$

(٤٧) $\frac{س ع^{٣}}{٧٢}$ − $\frac{س^{٣} ع^{٥}}{٣٢}$ − $\frac{١}{٩ س^{٢}}$ + $\frac{ع^{٢}}{٤}$

(٤٨) س^{٦} − ٢٥ س^{٢} + ٦ $\frac{١}{٤}$ − $\frac{١}{٤}$ س^{٤}

حلل كلا من المقادير الآتية إلى خمسة عوامل

(٤٩) س^{٧} + س^{٤} − ١٦ س^{٣} − ١٦

(٥٠) ١٦ س^{٧} − ٨١ س^{٣} − ١٦ س + ٧١

بند ٢١٤ — يمكن غالبا الاستغناء عن إجراء عمليات الضرب أو القسمة كلها أو بعضها وإيجاد الناتج باستعمال العوامل

ومما تلزم ملاحظته، أن القوانين التى طبقناها فى الأمثلة المتقدمة لا تقتصر فائدتها على استعمالها فى إيجاد العوامل متى علمت المقادير بل قد تستعمل أيضا فى عكس ذلك بمعنى أن قانون تحليل فرق مربعين إلى عاملين مثلا يستعمل أيضا فى إيجاد حاصل ضرب مجموع كميتين فى فرقهما

(مثال ١) * لضرب ٢ا + ٣ب − ح فى ٢ا − ٣ب + ح

نقول إنه يمكن ترتيب المقدار هكذا

٢ا + (٣ب − ح) ، ٢ا − (٣ب − ح)

إذن حاصل الضرب

= {٢ا + (٣ب − ح)} {٢ا − (٣ب − ح)}

= (٢ا)^{٢} − (٣ب − ح)^{٢} (بند ١٣٣)

= ٤ا^{٢} − (٩ب^{٢} − ٦ب ح + ح^{٢})

= ٤ا^{٢} − ٩ب^{٢} + ٦ب ح − ح^{٢}

(مثال ٢) لضرب (ا^{٢} + ا + ١) س − ا − ١ فى (ا − ١) س − ا^{٢} + ا − ١

نقول إن حاصل الضرب

= {(ا^{٢} + ا + ١) س − (ا + ١)} {(ا − ١) س − (ا^{٢} − ا + ١)}

= (ا^{٣} − ١) س^{٢} − {(ا^{٤} + ا^{٢} + ١) + (ا^{٢} − ١)} س + (ا^{٣} + ١)

= (ا^{٣} − ١) س^{٢} − (ا^{٤} + ٢ا^{٢}) س + ا^{٣} + ١

= (ا^{٣} − ١) س^{٢} − ا^{٢}(ا^{٢} + ٢) س + ا^{٣} + ١

(ملاحظة) حاصل ضرب ا^{٢} + ا + ١ ، ا^{٢} − ا + ١ هو ا^{٤} + ا^{٢} + ١

وينبغى أن يتذكر الطالب هذا الحاصل حتى يمكنه أن يكتبه مباشرة بدون إجراء عملية الضرب

(مثال ٣) لضرب (٣ + س − ٢س^{٢})^{٢} − (٣ − س + ٢س^{٢})^{٢} .... (١)

فى (٣ + س + ٢س^{٢})^{٢} − (٣ − س − ٢س^{٢})^{٢} .... (٢)

نقول إن المقدار (١)

= (٣ + س − ٢س^{٢} + ٣ − س + ٢س^{٢}) (٣ + س − ٢س^{٢} − ٣ + س − ٢س^{٢})

= ٦ (٢س − ٤س^{٢})

= ١٢س (١ − ٢س)

وإن المقدار (٢)

= (٣ + س + ٢س^{٢} + ٣ − س − ٢س^{٢}) (٣ + س + ٢س^{٢} − ٣ + س + ٢س^{٢})

= ٦ (٢س + ٤س^{٢})

= ١٢س (١ + ٢س)

فحاصل الضرب إذن

= ١٢ س (١ − ٢ س) × ١٢ س (١ + ٢ س)

= ١٤٤ س (١ − ٤ س)

(مثال ٤) لقسمة حاصل ضرب ٢ س^{٢} + س − ٦ في ٦ س^{٢} − ٥ س + ١ على ٣ س^{٢} + ٥ س − ٢

نقول إنه بوضع المقسوم والمقسوم عليه في صورة كسر نرى أن الخارج

= (٢ س^{٢} + س − ٦) (٦ س^{٢} − ٥ س + ١) / (٣ س^{٢} + ٥ س − ٢)

= (٢ س − ٣) (س + ٢) (٣ س − ١) (٢ س − ١) / (٣ س − ١) (س + ٢)

= (٢ س − ٣) (٢ س − ١)

(مثال ٥) للبرهنة على أن (٢ س + ٣ ص − ع)^{٣} + (٣ س + ٧ ص + ع)^{٣}
يقبل القسمة على ٥ (س + ٢ ص)

نقول إن المقدار من قبيل ا^{٣} + ب^{٣}

فيكون ا + ب احد عوامله أي أن المقدار

(٢ س + ٣ ص − ع)^{٣} + (٣ س + ٧ ص + ع)^{٣} يقبل القسمة على

(٢ س + ٣ ص − ع) + (٣ س + ٧ ص + ع)

أي على ٥ س + ١٠ ص

أي على ٥ (س + ٢ ص)

(مثال ٦) لايجاد خارج قسمة

ا^{٣} + ٨ − ٥ ب (٢٥ ب^{٢} − ٦ ا) على ا − ٥ ب + ٢

نقول إن المقدار

= ا^{٣} + ٨ − ١٢٥ ب^{٣} + ٣٠ ا ب

= ا^{٣} + (− ٥ ب)^{٣} + (٢)^{٣} − ٣ × ا × (− ٥ ب) (٢)

= (ا − ٥ ب + ٢) (ا^{٢} + ٢٥ ب^{٢} + ٤ + ١٠ ب − ٢ ا + ٥ ا ب) [بند ٢١٣]

فخارج القسمة المطلوب ا^{٢} + ٢٥ ب^{٢} + ٤ + ١٠ ب − ٢ ا + ٥ ا ب

(مثال ٧) إذا كان س + ص = ا و س − ص = ب

فبرهن على أن ٤ (س^{٤} − ٦ س^{٢} ص^{٢} + ص^{٤}) = ٦ ا^{٢} ب^{٢} − ا^{٤} − ب^{٤}

لذلك نقول إن

س^{٤} − ٦ س ص + ص^{٤} = (س^{٤} − ٢ س^{٢} ص^{٢} + ص^{٤}) − ٤ س^{٢} ص^{٢}

= (س^{٢} − ص^{٢})^{٢} − ١/٤ (٤ س ص)^{٢}

= {(س + ص) (س − ص)}^{٢} − ١/٤ {(س + ص)^{٢} − (س − ص)^{٢}}^{٢}

= (ا ب)^{٢} − ١/٤ (ا^{٢} − ب^{٢})^{٢}

∴ ٤ (س^{٤} − ٦ س^{٢} ص^{٢} + ص^{٤}) = ٤ ا^{٢} ب^{٢} − (ا^{٢} − ب^{٢})^{٢} = ٦ ا^{٢} ب^{٢} − ا^{٤} − ب^{٤}

(تمارين ٢٨ ب)

ما حاصل ضرب المقادير الآتية بعضها فى بعض

(١) ٢ س − ٧ ص + ٣ ع ، ٢ س + ٧ ص − ٣ ع

(٢) ٣ س^٢ − ٤ س ص + ٧ ص^٢ ، ٣ س^٢ + ٤ س ص + ٧ ص^٢

(٣) ٥ س^٢ + ٥ س ص − ٩ ص^٢ ، ٥ س^٢ − ٥ س ص − ٩ ص^٢

(٤) ٧ س^٢ − ٨ س ص + ٣ ص^٢ ، ٧ س^٢ + ٨ س ص − ٣ ص^٢

(٥) س^٣ + ٢ س^٢ ص + ٢ س ص^٢ + ص^٣ ، س^٣ − ٢ س^٢ ص + ٢ س ص^٢ − ص^٣

(٦) (س + ص)^٢ + ٢ (س + ص) + ٤ ، (س + ص)^٢ − ٢ (س + ص) + ٤

(٧) (١ + س + ٢ س^٢)^٢ − (١ − س − ٢ س^٢)^٢ ، (١ + س − ٢ س^٢)^٢ − (١ − س + ٢ س^٢)^٢

(٨) (أ^٢ + ٣ أ − ١) − (أ^٢ − ٣ أ − ١)^٢ ، (أ^٢ + أ + ١)^٢ − (أ^٢ − أ + ١)^٢

(٩) س^٣ − ٤ س^٢ + ٨ س − ٨ ، س^٣ + ٤ س^٢ + ٨ س + ٨

(١٠) س^٣ − ٦ أ س^٢ + ١٨ أ س − ٢٧ أ^٣ ، س^٣ + ٦ أ س^٢ + ١٨ أ^٢ س + ٢٧ أ^٣

(١١) س − أ − س^٢/أ − أ/س ، س + أ + س^٢/أ − أ^٢/س

(١٢) (٢ س^٢ + ٣ س + ١)^٢ − (٢ س^٢ − ٣ س − ١)^٢ ، (س^٢ + ٦ س − ٢)^٢ − (س^٢ − ٦ س + ٢)^٢

(١٣) س^٢ + أ س + أ^٢ ، س^٢ − أ س + أ^٢ ، س^٤ − أ^٢ س^٢ + أ^٤

(١٤) ١ − س + س^٢ ، ١ + س + س^٢ ، ١ − س^٢ + س^٤ ، ١ − س^٤ + س^٨

(١٥) (أ − س)^٣ ، (أ + س)^٣ ، (أ^٢ + س^٢)

(١٦) (١ − س)^٢ ، (١ + س)^٢ ، (١ + س^٢)^٢ ، (١ + س^٤)^٢

(١٧) س^٢ + ٤ س + ٣ ، س^٢ + س − ٢ ، س^٢ − ٥ س + ٦

(١٨) س^٢ + ٢ س − ٣ ، س^٢ − ٥ س + ٦ ، س^٢ + ٣ س + ٢

(١٩) س + ٢ ، س^٢ + ٢ س + ٤ ، س − ٢ ، س^٢ − ٢ س + ٤

(٢٠) إضرب مربع أ + ٣ ب فى أ^٢ − ٦ أ ب + ٩ ب^٢

(٢١) إضرب ½ (أ − ب)^٢ + ½ (ب − ح)^٢ + ½ (ح − أ)^٢ فى أ + ب + ح

(٢٢) إقسم (٤ س + ٣ ص − ٢ ع)^٢ − (٣ س − ٢ ص + ٣ ع)^٢ على س + ٥ ص − ٥ ع

(٢٣) إقسم س^٨ + ١٦ أ^٤ س^٤ + ٢٥٦ أ^٨ على س^٢ + ٢ أ س + ٤ أ^٢

(٢٤) إقسم (٣ س + ٤ ص − ٢ ع)^٢ − (٢ س + ٣ ص − ٤ ع)^٢ على س + ص + ٢ ع

(٢٥) إقسم حاصل ضرب س^٢ + ٧ س + ١٠ ، س + ٣ على س^٢ + ٥ س + ٦

(٢٦) إقسم ٢ س (س^٢ − ١) (س + ٢) على س^٢ + س − ٢

(٢٧) إقسم ٥ س (س − ١١) (س − س − ١٥٦) على س^٣ + س^٢ − ١٣٢ س

(٢٨) إقسم س^٦ + ١٩ س^٣ − ٢١٦ على (س^٢ − ٣ س + ٩) (س − ٢)

(٢٩) إقسم (٥ س^٢ − ٣ س − ٦) − (٢ س − ٧ س + ٩) على حاصل ضرب ٣ س − ٥ ، س + ٣

(٣٠) اقسم ا^{٩} − ب على حاصل ضرب ا^{٢} + ا ب + ب^{٢} ، ا^{٦} + ا^{٣} ب^{٣} + ب^{٦}

(٣١) اقسم (س^{٣} − ٣ س^{٢} ص)^{٢} − (٣ س ص^{٢} − ص^{٣})^{٢} على (س − ص)^{٣}

(٣٢) اقسم (س^{٢} − ص ع)^{٣} + ٨ ص^{٣} ع^{٣} على س^{٢} + ص ع

(٣٣) اقسم ١٨ س ص + ١ + ٢٧ س^{٣} − ٨ ص^{٣} على ١ + ٣ س − ٢ ص

(٣٤) اقسم (٢ س^{٢} + ٣ س − ١)^{٢} − (س^{٢} + ٤ س + ٥)^{٢} على حاصل ضرب ٣ س + ٤ ، س + ٢

(٣٥) اقسم حاصل ضرب ٦ ا^{٢} − ٢٣ ا + ٢٠ ، ٢٢ ا^{٢} − ٨١ ا + ١٤ على ٣٣ ا^{٢} − ٥٠ ا + ٨

(٣٦) اقسم حاصل ضرب س^{٢} + (ا − ب) س − ا ب ، س^{٢} − (ا − ب) س − ا ب على س^{٢} + (ا + ب) س + ا ب

(٣٧) اقسم ا^{٣} − ٨ ص^{٣} − ٩ س (٣ س^{٢} + ٢ ا ص) على ا − ٣ س − ٢ ص

(٣٨) اقسم ٢٧ − ٨ س^{٣} − ٦٤ ص^{٣} − ٧٢ س ص على ٣ − ٢ (س + ٢ ص)

(٣٩) بيّن أن (٢ س − ٣ ص + ١)^{٣} − (١ − ٣ س + ٢ ص)^{٣} يقبل القسمة على ٥ (س − ص)

(٤٠) بيّن أن مربع س + ١ يقسم (س^{٣} + س^{٢} + ٤)^{٣} − (س^{٣} − ٢ س + ٣)^{٣} قسمة صحيحة

(٤١) بيّن أن ٢ ب + ٢ د عامل للمقدار (ا + ب + ح + د)^{٣} − (ا − ب + ح − د)^{٣}

(٤٢) بيّن أن (٣ س^{٢} − ٧ س + ٢)^{٣} − (س^{٢} − ٨ س + ٨)^{٣} يقبل القسمة على كل من المقدارين ٢ س − ٣ ، س + ٢

(٤٣) بيّن أن (٧ س^{٢} + ٣ س − ٣)^{٣} + (٥ س^{٢} − ٤ س − ٣)^{٣} يقبل القسمة على كل من المقدارين ٤ س − ٣ ، ٣ س + ٢

(٤٤) بيّن أن مجموع مكعبي المقدارين
٢ س^{٢} − ٥ س − ٩ ، س^{٢} + ٦ س − ٥ يقبل القسمة على حاصل ضرب
٣ س + ٧ في س − ٢

(٤٥) إذا كان س + ص = م ، س − ص = ن فاكتب قيمة س^{٣} + ص^{٣} بدلالة المقدارين م ، ن

(٤٦) إذا كان س + ص = م ، س − ص = ن فبيّن أن
١٦ (س^{٤} − ٧ س^{٢} ص^{٢} + ص^{٤}) = (٥ م^{٢} − ن^{٢}) (٥ ن^{٢} − م^{٢})

(٤٧) أوجد قيمة س^{٤} + س ص^{٢} + ص^{٤}
إذا كان س + ص = ٢ ا ، س − ص = ٢ ب

(٤٨) إذا كان س + ص = ٢ ا ، س − ص = ٢ ب
فبرهن على أن س^{٤} − ٢٣ س^{٢} ص^{٢} + ص^{٤} = (٧ ا^{٢} − ٣ ب^{٢}) (٧ ب^{٢} − ٣ ا^{٢})

(٤٩) أوجد قيمة س^{٤} − ٤٧ س^{٢} ص^{٢} + ص^{٤} بدلالة المقدارين ط ، ن
إذا كان س + ص = ط ، س − ص = ن

(٥٠) أوجد قيمة س^{٤} − ٢ س^{١} ص + ٢ س ص^{١} − ص^{٤}
إذا كان س = ا + ب ، ص = ا − ب

الباب التاسع والعشرون ــ نظريات وأمثلة متنوّعة

بند ٢١٥ ــ قد يصادف المتعلم مسائل على القواعد البسيطة كالقسمة والعامل المشترك الأعلى واستخراج الجذور وهلم جرا لا يمكن حلها حلا مختصرا موافقا إلا باستعمال العوامل والمقادير المركبة ولم نذكر مثل هذه المسائل إلى الآن حتى يثق الطالب بنفسه باتساع معلوماته وكثرة تمرنه . وسيكون موضوع هذا الباب حل عدّة تمارين متنوّعة غالبها ليس بجديد من حيث القواعد التى يستلزمها حلها وانما يحتاج إلى شىء من المهارة والفطنة . ولذا فان هذا الباب نافع لاعادة ما تقدّم فى الأبواب السابقة

(مثال ١) لقسمة ا س^{٤} ــ (ا ط ــ ب) س^{٣} + (ا ى ــ ب ط ــ ح) س^{٢} + (ب ى + ح ط) س ــ ح ى على ا س^{٢} + ب س ــ ح نجرى العمل هكذا

ا س^{٤} ــ (ا ط ــ ب) س^{٣} + (ا ى ــ ب ط ــ ح) س^{٢} + (ب ى + ح ط) س ــ ح ى | ا س^{٢} + ب س ــ ح

ا س^{٤} + ب س^{٣} ــ ح س^{٢} | س^{٢} ــ ط س + ى

ــ ا ط س^{٣} + (ا ى ــ ب ط) س^{٢} + (ب ى + ح ط) س

ــ ا ط س^{٣} ــ ب ط س^{٢} + ح ط س

ا ى س^{٢} + ب ى س ــ ح ى

ا ى س^{٢} + ب ى س ــ ح ى

(ملاحظة) إذا كانت المعاملات فى المقسوم أو المقسوم عليه مقادير مركبة فالافضل أن تبق محصورة بين الأقواس أثناء العمل كله

بند ٢١٦ ــ علمنا من طريقة إيجاد العامل المشترك الأعلى وهى المدوّنة بالباب الثامن عشر أن كل باق للقسمة ينتج أثناء العمل يحتوى على العامل المراد استخراجه فاذا تيسر أثناء العملية أن نحلل أحد البواقى إلى عوامله أمكن اختصار العمل غالبا

(مثال ١) لايجاد العامل المشترك الأعلى للقدارين

٢ س^{٣} ــ (٤ ا ــ ٣ ح) س^{٢} + ٦ (ب ــ ا ح) س + ٩ ب ح

و ٢ س^{٣} + (٢ ا + ٣ ح) س^{٢} + (٣ ا ح ــ ٤ ب) س ــ ٦ ب ح

نجرى العمل هكذا

١ | ٢ س^{٣} ــ (٤ ا ــ ح) س^{٢} + ٦ (ب ــ ٣ ا ح) س + ٩ ب ح | ٢ س^{٣} + (٢ ا + ٣ ح) س^{٢} + (٣ ا ح ــ ٤ ب) س ــ ٦ ب ح

٢ س^{٣} ــ (٤ ا ــ ٣ ح) س^{٢} + ٦ (ب ــ ا ح) س + ٩ ب ح

٦ ا س^{٢} + (٩ ا ح ــ ١٠ ب) س ــ ١٥ ب ح

نرى أن الباقى = ٦ ا س^{٢} + ٩ ا ح س ــ ١٠ ب س ــ ١٥ ب ح

= ٣ ا س (٢ س + ٣ ح) ــ ٥ ب (٢ س + ٣ ح)

= (٢ س + ٣ ح) (٣ ا س ــ ٥ ب)

وبديهى أن ١٣ ا س − ٥ ب ليس بعامل مشترك فيقطع النظر عنه فلو كان بين المقدارين إذن عامل مشترك فلا بدّ من أن يكون ٢ س + ٣ ح وبقسمة كل من المقدارين على هذا العامل أو باتباع الطريقة الموضحة ببند ١٥٢ نرى أن ٢ س + ٣ ح عامل لكل منهما

فالعامل المشترك الأعلى إذن ٢ س + ٣ ح

(مثال ٢) ما العامل المشترك الأعلى للمقدارين

(ا − ٢ ا) س^{٢} + ٢ (٢ ا − ١) س − ا^{٢} + ١

، (ا^{٢} − ا − ٢) س^{٢} + (٤ ا + ١) س − ا^{٢} − ا

نقول إنه يمكن تحليل كل من المقدارين إلى عوامله بالطريقة المذكورة فى بند ٢١٢ مثال (٤) هكذا

(ا^{٢} − ٢ ا) س^{٢} + ٢ (٢ ا − ١) س − ا^{٢} + ١

= ا (ا − ٢) س^{٢} + ٢ (٢ ا − ١) س − (ا + ١) (ا − ١)

= {(ا − ٢) س + (ا + ١)} {ا س − (ا − ١)}

، (ا^{٢} − ا − ٢) س^{٢} + (٤ ا + ١) س − ا^{٢} − ا

= (ا − ٢) (ا + ١) س^{٢} + (٤ ا + ١) س − ا (ا + ١)

= {(ا − ٢) س + (ا + ١)} {(ا + ١) س − ا}

فالعامل المشترك الأعلى للمقدارين إذن (ا − ٢) س + ا + ١

(تمارين ١٢٩)

إقسم

(١) س^{٣} + (ا + ب + ح) س^{٢} + (ب ح + ح ا + ا ب) س + ا ب ح
على س^{٢} + (ا + ب) س + ا ب

(٢) س^{٤} − (٥ + ا) س^{٣} + (٤ + ٥ ا + ب) س^{٢} − (٤ ا + ٥ ب) س + ٤ ب
على س^{٢} − ٥ س + ٤

(٣) س^{٢} − (ا − ب) س − (ا ب + ٢ ب^{٣}) س + ٢ ا ب على س − ب

(٤) س^{٣} − (ط^{٢} + ٣ ن^{٢}) س + ٢ ط^{٢} ن − ٢ ن^{٣} على س + ط + ن

(٥) س^{٣} − (٣ م ن + ن^{٢}) س + م (م^{٢} − ن^{٢}) على س + م + ن

(٦) ا (ا − ١) س^{٢} + (٢ ا^{٢} − ١) س + ا (ا + ١) على (ا − ١) س + ا

(٧) س^{٤} + (ا + ب) س^{٣} + (ا^{٢} + ا ب + ب^{٢}) س^{٢} + (ا^{٣} + ب^{٣}) س + ا^{٢} ب^{٢}
على س^{٢} + ا س + ب^{٢}

(٨) ٢ ل^{٢} س^{٢} − ٢ (٣ م − ٤ ن) (م − ن) ص^{٢} + ل م س ص
على ل س + ٢ (م − ن) ص

(٩) (ا^{٢} + ا − ٢) س^{٢} − (٢ ا^{٢} + ١) س ص − (ا^{٢} + ا) ص^{٢}
على (ا − ١) س − ا ص

(١٠) س^{٣} − (ا − ب − ٢) س^{٢} − (اب + ٢ا − ٢ب) س − ٢اب
على (س − ا) (س + ٢)

(١١) (س + ١)^{٨} + ٤ (س + ١)^{٦} + ٦ (س + ١)^{٤} + ٤ (س + ١)^{٢} + ١
على س^{٢} + ٢س + ٢

(١٢) (م + ١) (ب س + ا ه) ب^{٢} س^{٢} − (ه + ١) (م ب س + ا) ا^{٢} على ب س − ا

استخرج العامل المشترك الأعلى للمقادير الآتية

(١٣) (م^{٢} − ٣م + ٢) س^{٢} + (٢م^{٢} − ٤م + ١) س + م (م − ١)
و م (م − ١) س^{٢} + (٢م^{٢} − ١) س + م (م + ١)

(١٤) م ط س^{٣} + (م ن − ه ط) س^{٢} − (م ر + ه ن) س + ه ر
و م ا س^{٣} − (م ح + ه ا) س^{٢} − (م ب − ه ح) س + ه ب

(١٥) ٢ا ط^{٣} + (٣ا − ٢ب) ط^{٢} ن + (ا − ٣ب) ط ن^{٢} − ب ن^{٣}
و ٣ا ط^{٣} − (ا + ٣ب) ط^{٢} ن + (٢ا + ب) ط ن^{٢} − ٢ب ن^{٣}

(١٦) ا ح س^{٣} + (ب ح + ا د) س^{٢} + (ب د + ا ح) س + ب ح
و ٢ا ح س^{٣} + (٢ب ح − ا د) س^{٢} − (٣ا ح + ب د) س − ٣ب ح

(١٧) ٢ا^{٢} س^{٣} − (٤ب + ٣) ا س^{٢} + ٢ (٣ب − ا ح) س + ٣ح
و ٢ا^{٢} س^{٣} + (٢ب − ٣) ا س^{٢} − (٤ا ح + ٣ب) س + ٦ح

(١٨) ٢ا س^{٣} + (٤ا^{٢} − ١) ب س^{٢} − (٢ا ب^{٢} + ٣ح) س − ٦ا ب ح
و ا س^{٣} − (٣ − ٢ا^{٢}) ب س^{٢} + (٢ح − ٦ا ب^{٢}) س + ٤ا ب ح

استخرج المضاعف المشترك البسيط للمقادير الآتية

(١٩) س^{٤} − ط س^{٣} + (ن − ١) س^{٢} + ط س − ن
و س^{٤} − ن س^{٣} + (ط − ١) س^{٢} + ن س − ط

(٢٠) ط (ط + ١) س^{٢} + س − ط (ط − ١)
و ط (ط + ٢) س^{٢} + ٢س − ط^{٢} + ١

(٢١) (ا^{٢} − ٥ا + ٦) س^{٢} + ٢ (ا − ١) س − ا (ا + ١)
و ا (ا − ٣) س^{٢} + ١٢س − (ا + ١) (ا + ٤)

بند ٢١٧ — نذكر الآن بعض أمثلة متنوعة فى استخراج الجذور

يستخرج الجذر الرابع لأى مقدار باستخراج الجذر التربيعى لجذره التربيعى

وباجراء عملية الجذر التربيعى عدة مرات متوالية يستخرج الجذر الثامن والسادس عشر وهلم جرا

أما الجذر السادس فيستخرج بأخذ الجذر التكعيبى للجذر التربيعى أو بأخذ الجذر التربيعى للجذر التكعيبى

وبهذه الصفة أى بالجمع بين عمليتى استخراج الجذر التربيعى والتكعيبى تستخرج بعض جذور أخرى أعلى مما ذكر

(مثال ١) لايجاد الجذر الرابع للقدار

$$٨١ \text{س}^{٤} - ٢١٦ \text{س}^{٣} \text{ص} + ٢١٦ \text{س}^{٢} \text{ص}^{٢} - ٩٦ \text{س} \text{ص}^{٣} + ١٦ \text{ص}^{٤}$$

نستخرج الجذر التربيعى بواسطة القاعدة المعلومة فنجد أنه

$$٩ \text{س}^{٢} - ١٢ \text{س} \text{ص} + ٤ \text{ص}^{٢}$$

وبأخذ الجذر التربيعى لهذا المقدار الأخير ينتج $٣ \text{س} - ٢ \text{ص}$ وهو الجذر الرابع المطلوب

(مثال ٢) لايجاد الجذر السادس للقدار

$$\left(\text{س}^{٣} - \frac{١}{\text{س}^{٣}}\right)^{٢} - ٦\left(\text{س} - \frac{١}{\text{س}}\right)\left(\text{س}^{٣} - \frac{١}{\text{س}^{٣}}\right) + ٩\left(\text{س} - \frac{١}{\text{س}}\right)^{٢}$$

نقول إنه بمجرد النظر نرى أن الجذر التربيعى لهذا المقدار

$$\left(\text{س}^{٣} - \frac{١}{\text{س}^{٣}}\right) - ٣\left(\text{س} - \frac{١}{\text{س}}\right)$$

وهذا يساوى $\text{س}^{٣} - ٣ \text{س} + \frac{٣}{\text{س}} - \frac{١}{\text{س}^{٣}}$

والجذر التكعيبى لهذا المقدار الأخير $\text{س} - \frac{١}{\text{س}}$

وهو الجذر السادس المطلوب

بند ٢١٨ — ذكرنا فى الباب السادس بعض أمثلة على القسمة غير الصحيحة وعلى مثل ما ذكر هناك يمكن إيجاد أى عدد من الحدود عند استخراج جذر أى مقدار جبرى غير مربع كامل كان أوغير مكعب كامل

(مثال) لاستخراج الجذر التربيعى للقدار $١ + ٢ \text{س} - ٢ \text{س}^{٢}$ بحيث يشتمل ناتج الجذر على أربعة حدود نجرى العمل هكذا

$١ + ٢ \text{س} - ٢ \text{س}^{٢}$ | $١ + \text{س} - \frac{٣}{٢} \text{س}^{٢} + \frac{٣}{٢} \text{س}^{٣}$

١

$٢ + \text{س}$ | $٢ \text{س} - ٢ \text{س}^{٢}$

$٢ \text{س} + \text{س}^{٢}$

$٢ + ٢ \text{س} - \frac{٣}{٢} \text{س}^{٢}$ | $- ٣ \text{س}^{٢}$

$- ٣ \text{س}^{٢} - ٣ \text{س}^{٣} + \frac{٩}{٤} \text{س}^{٤}$

$٢ + ٢ \text{س} - ٣ \text{س}^{٢} + \frac{٣}{٢} \text{س}^{٣}$ | $٣ \text{س}^{٣} - \frac{٩}{٤} \text{س}^{٤}$

$٣ \text{س}^{٣} + ٣ \text{س}^{٤} - \frac{٩}{٢} \text{س}^{٥} + \frac{٩}{٤} \text{س}^{٦}$

$- \frac{٢١}{٤} \text{س}^{٤} + \frac{٩}{٢} \text{س}^{٥} - \frac{٩}{٤} \text{س}^{٦}$

فناتج الجذر المطلوب إذن $١ + \text{س} - \frac{٣}{٢} \text{س}^{٢} + \frac{٣}{٢} \text{س}^{٣}$

بند ٢١٩ — أوضحنا فى بند ١٢٤ وجه الشبه بين الطرق الجبرية والطرق الحسابية المستعملة فى استخراج الجذر التربيعى والجذر التكعيبى وسنبرهن الآن أنه فى استخراج الجذر التربيعى أو التكعيبى لأى عدد يمكننا بعد استخراج عدة أرقام من الجذر المطلوب بالطريقة المعتادة أن نستخرج عددا آخر من أرقام الجذر يعادل تقريبا عدد الأرقام التى استخرجناها وذلك باجراء عملية القسمة العادية

بند ٢٢٠ — إذا تركب الجذر التربيعى لعدد ما من ٢ ن + ١ من الأرقام واستخرج منها (ن + ١) من الأرقام بالطريقة المعتادة فانه يمكن الحصول على الأرقام الباقية التى عددها ن بطريقة القسمة

ليكن العدد المراد أخذ جذره ن̄ ولتكن ا جزء الجذر التربيعى الذى أوجد بالطريقة المعتادة أى الجزء المركب من ن + ١ من الأرقام متبوعة بأصفار عددها ن وليكن س الجزء الباقى من الجذر

إذن $\sqrt{\bar{ن}} = ا + س$

∴ $\bar{ن} = ا^٢ + ٢ا\,س + س^٢$

∴ $\frac{\bar{ن} - ا^٢}{٢ا} = س + \frac{س^٢}{٢ا}$ ... ... (١)

ومعلوم أن $\bar{ن} - ا^٢$ هو الباقى بعد استخراج ن + ١ من أرقام الجذر أى بعد استخراج الجزء الذى رمزنا له بالحرف ا وأيضا ٢ ا هو المقسوم عليه فى عملية الجذر وقتئذ . ونرى فى المعادلة (١) أن خارج قسمة $\bar{ن} - ا^٢$ على ٢ ا هو س وهو عبارة عن الجزء الباقى من الجذر مضافا إليه $\frac{س^٢}{٢ا}$ وسنبين الآن أن $\frac{س^٢}{٢ا}$ كسر حقيق وحينئذ يمكننا أن نقطع النظر عن الباقى من القسمة الذى هو هذا الكسر لنحصل على مقدار س وهو الجزء الباقى من الجذر ولاثبات أن $\frac{س^٢}{٢ا}$ كسر حقيق نقول

لكون س مركبا من ن من الأرقام فمربعه يشتمل على ٢ ن من الأرقام على الأكثر ومعلوم أن ا عدد مركب من ٢ ن + ١ من الأرقام (ن الأخيرة منها أصفار) فيكون حينئذ عدد أرقام ٢ ا هو ٢ ن + ١ على الأقل وعلى ذلك يكون $\frac{س^٢}{٢ا}$ كسرا حقيقيا

ولو وضعنا بدل ن الواحد الصحيح فى البرهان المتقدّم لاستنتجنا أنه يلزم استخراج رقمين على الأقل بالطريقة المعروفة لأخذ الجذور لكى يكون الرقم التالى الذى نستخرجه بواسطة القسمة مضبوطا

(مثال) لاستخراج الجذر التربيعى للعدد ٢٩٠ حتى يكون فى الجزء العشرى من الناتج خمسة أرقام نجرى العمل هكذا

```
        ٢٩٠ | ١٧٫٠٢
          ١
٢٧    | ١٩٠
      | ١٨٩
٣٤٠٢  | ١٠٠٠٠
      |  ٦٨٠٤
         ٣١٩٦
```

حصلنا الآن بالطريقة المعتادة على أربعة أرقام من ناتج الجذر ويمكن الحصول على ثلاثة أرقام أخرى بطريقة القسمة فقط وذلك بجعل المقسوم عليه ٢ × ١٧٠٢ أى ٣٤٠٤ والمقسوم ٣١٩٦ باعتبار أن ٣١٩٦ باق

٣١٩٦٠	٣٤٠٤
٣٠٦٣٦	٩٣٨
١٣٢٤٠	
١٠٢١٢	
٣٠٢٨٠	
٢٧٢٣٢	
٣٠٤٨	

إذن $\sqrt{٢٩٠}$ = ١٧,٠٢٩٣٨ مشتملا على خمسة أرقام عشرية

واذا اشتمل المقسوم عليه على عدّة أرقام يحسن استعمال طريقة القسمة المختصرة

ومما يلاحظ أيضا أننا فى استخراج الرقم الثانى من الجذر قسمنا ١٩٠ على ٢٠ ووجدنا أن ٩ وهى الناتج أكبر من المطلوب فأخذنا بدلها الرقم ٧ لظهور موافقته بالتجربة

وهذه الملاحظة (التجربة فى عملية الجذر) هى احدى النقط التى تخالف فيها الطريقة الحسابية الطريقة الجبرية لاستخراج الجذور والتى أشرنا اليها فى بند ١٢٤

بند ٢٢١ — إذا تركب الجذر التكعيبى لأى عدد من ٢ ن + ٢ من الأرقام واستخرج منها ن + ٢ من الأرقام بالطريقة المعروفة تمكن الحصول على الأرقام الباقية وهى ن بالقسمة

ليكن العدد المراد أخذ جذره ن َ وليكن ا جزء الجذر التكعيبى الذى استخرج بالطريقة المعتادة وهو المركب من ن + ٢ من الأرقام متبوعة بأصفار عددها ن وليكن س الجزء الباقى من الجذر التكعيبى

إذن $\sqrt[3]{\text{نَ}} = \text{ا} + \text{س}$

$\therefore \quad \text{نَ} = \text{ا}^{٣} + ٣\,\text{ا}^{٢}\,\text{س} + ٣\,\text{ا}\,\text{س}^{٢} + \text{س}^{٣}$

$$\therefore \quad \frac{\text{نَ} - \text{ا}^{٣}}{٣\,\text{ا}^{٢}} = \text{س} + \frac{\text{س}^{٢}}{\text{ا}} + \frac{\text{س}^{٣}}{٣\,\text{ا}^{٢}} \qquad \text{(١)}$$

نعلم أن نَ — ا^{٣} هو الباقى بعد استخراج ن + ٢ من الأرقام فى الجذر وهو الجزء المرموز له بالحرف ا وأيضا ٣ ا^{٢} هو المقسوم عليه فى العملية وقتئذ ونرى من المعادلة (١) أن خارج قسمة نَ — ا^{٣} على ٣ ا^{٢} هو س وهو الجزء الباقى من الجذر مضافا إليه $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{ا}} + \frac{\text{س}^{٣}}{٣\,\text{ا}^{٢}}$ وسنبين الآن أن هذا المقدار الأخير كسر حقيقى وحينئذ يمكننا أن نقطع النظر عن الباقى من القسمة وهو هذا المقدار ونحصل على مقدار س وهو الجزء الباقى من الجذر ولاثبات أن $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{ا}} + \frac{\text{س}^{٣}}{٣\,\text{ا}^{٢}}$ كسر حقيقى نقول

فرضا $س < ١٠^{ن}$ ، $ط > ١٠^{٢ن+١}$

$\therefore \frac{س^{٢}}{ط} < \frac{١٠^{٢ن}}{١٠^{٢ن+١}}$ أى $< \frac{١}{١٠}$

، $\frac{س^{٣}}{٣ط^{٢}} < \frac{١٠^{٣ن}}{٣ \times ١٠^{٤ن+٢}}$ أى $< \frac{١}{٣ \times ١٠^{ن+١}}$

فاذن $\frac{س^{٢}}{ط} + \frac{س^{٣}}{٣ط^{٢}} < \frac{١}{١٠} + \frac{١}{٣ \times ١٠^{ن+١}}$

فهو كسر حقيقى

(تمارين ٢٩ ب)

أوجد الجذر الرابع لكل من المقادير الآتية

(١) $س^{٤} - ٢٨ س^{٣} + ٢٩٤ س^{٢} - ١٣٧٢ س + ٢٤٠١$

(٢) $١٦ - \frac{٣٢}{م} + \frac{٢٤}{م^{٢}} - \frac{٨}{م^{٣}} + \frac{١}{م^{٤}}$

(٣) $ا^{٤} + ٨ ا^{٣} س + ١٦ س^{٤} + ٣٢ ا س^{٣} + ٢٤ ا^{٢} س^{٢}$

(٤) $١ + ٤ س + ٢ س^{٢} - ٨ س^{٣} - ٥ س^{٤} + ٨ س^{٥} + ٢ س^{٦} - ٤ س^{٧} + س^{٨}$

(٥) $١ + ٨ س + ٢٠ س^{٢} + ٨ س^{٣} - ٢٦ س^{٤} - ٨ س^{٥} + ٢٠ س^{٦} - ٨ س^{٧} + س^{٨}$

اوجد الجذر السادس لكل من المقادير الآتية

(٦) $١ + ٦ س + ١٥ س^{٢} + ٢٠ س^{٣} + ١٥ س^{٤} + ٦ س^{٥} + س^{٦}$

(٧) $س^{٦} - ١٢ ا س^{٥} + ٢٤٠ ا^{٤} س^{٢} - ١٩٢ ا^{٥} س + ٦٠ ا^{٢} س^{٤} - ١٦٠ ا^{٣} س^{٣} + ٦٤ ا^{٦}$

(٨) $ا^{٦} - ١٨ ا^{٥} س + ١٣٥ ا^{٤} س^{٢} - ٥٤٠ ا^{٣} س^{٣} + ١٢١٥ ا س^{٤} - ١٤٥٨ ا س^{٥} + ٧٢٩ س^{٦}$

أوجد الجذر الثامن لكل من المقادير الآتية

(٩) $س^{٨} - ٨ س^{٧} ص + ٢٨ س^{٦} ص^{٢} - ٥٦ س^{٥} ص^{٣} + ٧٠ س^{٤} ص^{٤} - ٥٦ س^{٣} ص^{٥} + ٢٨ س^{٢} ص^{٦} - ٨ س ص^{٧} + ص^{٨}$

(١٠) $\{س^{٤} + ٢(ط - ١) س^{٣} + (ط^{٢} - ٢ط - ١) س^{٢} - ٢(ط - ١) س + ١\}$

أوجد الجذر التربيعى لكل من المقادير الآتية بحيث يشتمل كل جذر على أربعة حدود

(١١) $١ + س$

(١٢) $١ - ٢ س$

(١٣) $٤ + ٢ س$

(١٤) $١ - س - س^{٢}$

(١٥) $ا - س$

(١٦) $س^{٢} + ا^{٢}$

(١٧) $ا^{٤} - ٣ س^{٢}$

(١٨) $٩ ا^{٢} + ١٢ س$

أوجد الجذر التكعيبى لكل من المقادير الآتية بحيث يشتمل كل جذر على ثلاثة حدود

(١٩) $س^{٣} - ١$

(٢٠) $٨ + س$

(٢١) $\frac{١}{ا^{٣}} + ٩ س$

(٢٢) $١ - ٦ س + ٢١ س^{٢}$

(٢٣) $٢٧ س^{٦} - ٢٧ س^{٥} - ١٨ س^{٤}$

(٢٤) $٦٤ - ٤٨ س + ٩ س^{٢}$

المتطابقات والتغييرات

بنـد ٢٢٢ — تعريف : كل متساوية جبرية تصح بأى مقادير تعطى للحروف الداخلة فيها تسمى متطابقة

(أمثلة) $ا^3 + ب^3 = (ا + ب)(ا^2 - ا ب + ب^2)$

$$س^3 + ص^3 + ع^3 - 3 س ص ع = (س + ص + ع)(س^2 + ص^2 + ع^2 - ص ع - ع س - س ص)$$

بند ٢٢٣ — طرفا المتطابقة متساويان دائما والبرهان على تساويهما يسمى إثبات المتطابقة وكيفية الاثبات أن ينتخب أحد الطرفين ثم يبرهن أنه يمكن تحويله إلى صورة الطرف الآخر وذلك بادخال عدّة تغييرات متتابعة عليه

(مثال ١) للبرهنة على أن

$$ب ح (ب - ح) + ح ا (ح - ا) + ا ب (ا - ب) = -(ب - ح)(ح - ا)(ا - ب)$$

نقول إن الطرف الأول

$$= ب ح (ب - ح) + ح^2 ا - ح ا^2 + ا^2 ب - ا ب^2$$
$$= ب ح (ب - ح) + ا^2 (ب - ح) - ا (ب^2 - ح^2)$$
$$= (ب - ح) \{ب ح + ا^2 - ا (ب + ح)\}$$
$$= (ب - ح) \{ب ح + ا^2 - ا ب - ا ح\}$$
$$= (ب - ح) \{ا (ا - ب) - ح (ا - ب)\}$$
$$= (ب - ح)(ا - ب)(ا - ح)$$
$$= -(ب - ح)(ح - ا)(ا - ب)$$

ويحصل على الناتج الأخير بتغيير العلامتين فى العامل ا — ح للمحافظة على الترتيب الدائرى (راجع بند ٢٢٩ مثال ٣)

ولكون المقدار الذى فى الطرف الأيمن من المتطابقة السابقة يمكن وضعه على الصورتين الآتيتين

$$ا^2 (ب - ح) + ب^2 (ح - ا) + ح^2 (ا - ب)$$
$$\text{و} \quad -\{ا (ب^2 - ح^2) + ب (ح^2 - ا^2) + ح (ا^2 - ب^2)\}$$

نستنتج من ذلك مايأتى

$$ب ح (ب - ح) + ح ا (ح - ا) + ا ب (ا - ب) = -(ب - ح)(ح - ا)(ا - ب)$$
$$\text{و} \quad ا^2 (ب - ح) + ب^2 (ح - ا) + ح^2 (ا - ب) = -(ب - ح)(ح - ا)(ا - ب)$$
$$\text{و} \quad ا (ب^2 - ح^2) + ب (ح^2 - ا^2) + ح (ا^2 - ب^2) = (ب - ح)(ح - ا)(ا - ب)$$

ولكون هذه المتطابقات كثيرة الاستعمال ينبغى الالتفات إليها على الخصوص وتذكرها جيدا

(مثال ٢) إذا كانت $٢ع = ا + ب + ح$ فأثبت أن

$$\frac{1}{ع-ا}+\frac{1}{ع-ب}+\frac{1}{ع-ح}-\frac{1}{ع}=\frac{ا\,ب\,ح}{ع\,(ع-ا)\,(ع-ب)\,(ع-ح)}$$

لذلك نقول إن الطرف الأول

$$=\left[\frac{1}{ع-ا}+\frac{1}{ع-ب}\right]+\left[\frac{1}{ع-ح}-\frac{1}{ع}\right]$$

$$=\frac{ع-ب+ع-ا}{(ع-ا)\,(ع-ب)}+\frac{ع-ع+ح}{ع\,(ع-ح)}$$

$$=\frac{٢ع-ا-ب}{(ع-ا)\,(ع-ب)}+\frac{ح}{ع\,(ع-ح)}$$

$$=\frac{ح}{(ع-ا)\,(ع-ب)}+\frac{ح}{ع\,(ع-ح)}$$

$$=ح\left\{\frac{ع\,(ع-ح)+(ع-ا)\,(ع-ب)}{ع\,(ع-ا)\,\,(ع-ب)\,(ع-ح)}\right\}$$

$$=\frac{ح\{ع^{2}-ح\,ع+ع^{2}-ا\,ع-ب\,ع+ا\,ب\}}{ع\,(ع-ا)\,(ع-ب)\,(ع-ح)}$$

$$=\frac{ح\{٢ع^{2}-ع\,\,(ا+ب+ح)+ا\,ب\}}{ع\,(ع-ا)\,(ع-ب)\,(ع-ح)}$$

$$=\frac{ا\,ب\,ح}{ع\,(ع-ا)\,(ع-ب)\,(ع-ح)}$$

لأن $ع\,(ا+ب+ح)=ع\times ٢ع=٢ع^{2}$

(ملاحظة) نرى فى المثال المتقدم أن استعمالنا ٢ هـ بدل $ا + ب + ح$ من المستحسن واستبقاء هـ أثناء العمل وإرجاء وضع قيمتها مما يسهل العمل ويساعد على اختصاره ولذا فانا ننبه الطالب فى حل مثل هذا التمرين إلى أن لا يعجل فى تعويض الحروف الموضوعة رمزا لمقادير بل يوالى استعمالها حتى يضطره الحل إلى وضع مقاديرها بدلها

(مثال ٣) إذا كانت

$$س^{2}+ى^{2}=٢\,(س\,ص+ص\,ع+ع\,ى-ص^{2}-ع^{2})$$

فللبرهنة على أن $س = ص = ع = ى$

نقول إنه بالنقل يحدث أن

$$س^{2}-٢س\,ص+ص^{2}+ص^{2}-٢ص\,ع+ع^{2}+ع^{2}-٢ع\,ى+ى^{2}=٠$$

أى أن $(س-ص)^{2}+(ص-ع)^{2}+(ع-ى)^{2}=٠$

ولكون مربع أى كمية يلزم أن يكون موجبا دائما فكل من المقادير

$(س-ص)^{2}$ ، $(ص-ع)^{2}$ ، $(ع-ى)^{2}$ موجب

ولا يتأتى إذن أن يكون حاصل جمع ثلاثة المربعات صفرا إلا اذا كان كل منها على انفراد يساوى الصفر

$\therefore \quad \text{س} - \text{ص} = ٠ \text{ ، } \text{ص} - \text{ع} = ٠ \text{ ، } \text{ع} - \text{ے} = ٠$

أو $\quad \text{س} = \text{ص} = \text{ع} = \text{ے}$

ملاحظة — يجب أن يتنبه الطالب للفرق بين مايستنتج من كل من المتساويتين الآتيتين

$$(\text{س} - \text{ا})^٢ + (\text{ص} - \text{ب})^٢ = ٠ \quad \ldots\ldots\ldots (١)$$

،
$$(\text{س} - \text{ا})(\text{ص} - \text{ب}) = ٠ \quad \ldots\ldots\ldots (٢)$$

فمن الأولى نستنتج أن $\text{س} - \text{ا} = ٠$ ، $\text{ص} - \text{ب} = ٠$
فى آن واحد أما الثانية فنستدل منها على أحد أمرين وهما إما أن تكون

$\text{س} - \text{ا} = ٠$ أو $\text{ص} - \text{ب} = ٠$

(تمارين ٢٩ ح)

أثبت كلا من المتطابقات الآتية

(١) $\text{ب}(\text{س}^٣ + \text{ا}^٣) + \text{ا}\,\text{س}(\text{س}^٢ - \text{ا}^٢) + \text{ا}^٣(\text{س} + \text{ا})$
$= (\text{ا} + \text{ب})(\text{س} + \text{ا})(\text{س}^٢ - \text{ا}\,\text{س} + \text{ا}^٢)$

(٢) $(\text{ا}\,\text{س} + \text{ب}\,\text{ص})^٢ + (\text{ا}\,\text{ص} - \text{ب}\,\text{س})^٢ + \text{ح}^٢\text{س}^٢ + \text{ح}^٢\text{ص}^٢$
$= (\text{س}^٢ + \text{ص}^٢)(\text{ا}^٢ + \text{ب}^٢ + \text{ح}^٢)$

(٣) $(\text{س} + \text{ص})^٣ + ٣(\text{س} + \text{ص})^٢\,\text{ع} + ٣(\text{س} + \text{ص})\,\text{ع}^٢ + \text{ع}^٣$
$= (\text{س} + \text{ع})^٣ + ٣(\text{س} + \text{ع})^٢\,\text{ص} + ٣(\text{س} + \text{ع})\,\text{ص}^٢ + \text{ص}^٣$

(٤) $(\text{ا} + \text{ب} + \text{ح})(\text{ا}\,\text{ب} + \text{ب}\,\text{ح} + \text{ح}\,\text{ا}) - \text{ا}\,\text{ب}\,\text{ح} = (\text{ا} + \text{ب})(\text{ب} + \text{ح})(\text{ح} + \text{ا})$

(٥) $(\text{ا} + \text{ب} + \text{ح})^٢ - \text{ا}(\text{ب} + \text{ح} - \text{ا}) - \text{ب}(\text{ا} + \text{ح} - \text{ب})$
$- \text{ح}(\text{ا} + \text{ب} - \text{ح}) = ٢(\text{ا}^٢ + \text{ب}^٢ + \text{ح}^٢)$

(٦) $(\text{س} - \text{ص})^٣ + (\text{س} + \text{ص})^٣ + ٣(\text{س} - \text{ص})^٢(\text{س} + \text{ص})$
$+ ٣(\text{س} + \text{ص})^٢(\text{س} - \text{ص}) = ٨\,\text{س}^٣$

(٧) $\text{س}^٢(\text{ص} - \text{ع}) + \text{ص}^٢(\text{ع} - \text{س}) + \text{ع}^٢(\text{س} - \text{ص}) + (\text{ص} - \text{ع})$
$(\text{ع} - \text{س})(\text{س} - \text{ص}) = ٠$

(٨) $\text{ا}^٣(\text{ب} - \text{ح}) + \text{ب}^٣(\text{ح} - \text{ا}) + \text{ح}^٣(\text{ا} - \text{ب}) = -(\text{ب} - \text{ح})$
$(\text{ح} - \text{ا})(\text{ا} - \text{ب})(\text{ا} + \text{ب} + \text{ح})$

(٩) إذا كان $\quad \text{س} + \text{ص} + \text{ع} = ٠$
فبرهن على أن $\quad \text{س}^٣ + \text{ص}^٣ + \text{ع}^٣ = ٣\,\text{س}\,\text{ص}\,\text{ع}$

(١٠) برهن على أن $(ب - حـ)^{٣} + (حـ - ا)^{٣} + (ا - ب)^{٣} = ٣(ب - حـ)(حـ - ا)(ا - ب)$

إذا كان $٢ع = ا + ب + حـ$ فبرهن على أن

(١١) $(ع - ا)^{٢} + (ع - ب)^{٢} + (ع - حـ)^{٢} + ع = ا^{٢} + ب + حـ^{٢}$

(١٢) $(ع - ا)^{٣} + (ع - ب)^{٣} + (ع - حـ)^{٣} + ٣ا ب حـ = ع^{٣}$

(١٣) $١٦ع(ع - ا)(ع - ب)(ع - حـ) = ٢ب^{٢}حـ^{٢} + ٢حـ^{٢}ا^{٢} + ٢ا^{٢}ب^{٢} - ا^{٤} - ب^{٤} - حـ^{٤}$

(١٤) $٢(ع - ا)(ع - ب)(ع - حـ) + ا(ع - ب)(ع - حـ) + ب(ع - حـ)(ع - ا) + حـ(ع - ا)(ع - ب) = ا ب حـ$

إذا كان $ا + ب + حـ = ٠$ فبرهن على أن

(١٥) $(٢ا - ب)^{٣} + (٢ب - حـ)^{٣} + (٢حـ - ا)^{٣} = ٣(٢ا - ب)(٢ب - حـ)(٢حـ - ا)$

(١٦) $\frac{ا^{٢}}{٢ا^{٢} + ب حـ} + \frac{ب^{٢}}{ب^{٢} + حـ ا} + \frac{حـ^{٢}}{٢حـ^{٢} + ا ب} = ١$

(١٧) برهن على أن

$(س + ص + ع)^{٣} + (س + ص - ع)^{٣} + (س - ص + ع)^{٣} + (س - ص - ع)^{٣} = ٤س(س^{٢} + ٣ص^{٢} + ٣ع^{٢})$

(١٨) إذا كانت $ا + ب + حـ = س$ فبرهن على أن

$(س - ٣ا)^{٣} + (س - ٣ب)^{٣} + (س - ٣حـ)^{٣} - ٣(س - ٣ا)(س - ٣ب)(س - ٣حـ) = ٠$

(١٩) إذا كانت $س = ب + حـ - ٢ا$ ، $ص = حـ + ا - ٢ب$ ، $ع = ا + ب - ٢حـ$

فأوجد قيمة $س^{٣} + ص^{٣} + ع^{٣} - ٣س ص ع$

(٢٠) أوجد قيمة $ا(ا^{٢} + ب حـ) + ب(ب^{٢} + حـ ا) - حـ(حـ - ا ب)$

إذا كانت $ا = ٠٫٧$ ، $ب = ٠٫٠٨$ ، $حـ = ٠٫٧٨$

(٢١) برهن على أن $(ا - ب)^{٢} + (ب - حـ)^{٢} + (حـ - ا)^{٢}$

$= ٢(حـ - ب)(حـ - ا) + ٢(ب - ا)(ب - حـ) + ٢(ا - ب)(ا - حـ)$

(٢٢) برهن على أن $ا^{٢}(ب^{٣} - حـ^{٣}) + ب^{٢}(حـ^{٣} - ا^{٣}) + حـ^{٢}(ا^{٣} - ب^{٣})$

$= (ا - ب)(ب - حـ)(حـ - ا)(ا ب + ب حـ + حـ ا)$

$= ا^{٢}(ب - حـ)^{٣} + ب^{٢}(حـ - ا)^{٣} + حـ(ا - ب)^{٣}$

$= -[ا^{٢}ب^{٢}(ا - ب) + ب^{٢}حـ^{٢}(ب - حـ) + حـ^{٢}ا^{٢}(حـ - ا)]$

(٢٣) إذا كان $(ا + ب)^٢ + (ب + حـ)^٢ + (حـ + ى)^٢ = ٤ (اب + ب حـ + حـ ى)$

فبرهن على أن $ا = ب = حـ = ى$

(٢٤) إذا كان $س = ا + ى$ ، $ص = ب + ى$ ، $ع = حـ + ى$

فبرهن على أن $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ - ص ع - ع س - س ص$

$= ا^٢ + ب^٢ + حـ^٢ - ب حـ - حـ ا - ا ب$

(٢٥) إذا كان $ا + ب + حـ =$ صفرا فبرهن على أن

$$\frac{١}{ب^٢ + حـ^٢ - ا^٢} + \frac{١}{حـ^٢ + ا^٢ - ب^٢} + \frac{١}{ا^٢ + ب^٢ - حـ^٢} = ٠$$

(٢٦) إذا كان $ا + ب + حـ =$ صفرا فاختصر ما يأتى

$$\frac{ب + حـ}{ب حـ}(ب^٢ + حـ - ا^٢) + \frac{حـ + ا}{حـ ا}(حـ^٢ + ا^٢ - ب^٢) + \frac{ا + ب}{ا ب}(ا + ب^٢ - حـ^٢)$$

(٢٧) برهن على أن المعادلة $(س - ا)^٢ + (ص - ب)^٢ + (ا^٢ + ب^٢ - ١)$

$(س^٢ + ص^٢ - ١) = ٠$

هى عين المعادلة $(ا س + ب ص - ١)^٢ + (ب س - ا ص)^٢ = ٠$

ومن ذلك بيّن أن $س$ ، $ص$ لا يمكن أن يكون لهما غير هاتين القيمتين

$$\frac{ا}{ا^٢ + ب^٢} ، \frac{ب}{ا^٢ + ب^٢}$$

(٢٨) إذا كانت $٢(س^٢ + ا^٢ - ا س)(ص^٢ + ب^٢ - ب ص) = س^٢ ص^٢ + ا^٢ ب^٢$

فبرهن على أن $(س - ا)^٢ (ص - ب)^٢ + (ب س - ا ص)^٢ = ٠$

واستنتج من ذلك أنه لا يمكن تحقيق هذه المعادلة إلا بالمقدارين الآتيين

$س = ا$ ، $ص = ب$

بند ٢٢٤ — سنأتى الآن على بعض أمثلة إضافيــة فى الكسور لنبين منها فائدة ترتيب المقادير ترتيبا دائريا (راجع بند ١٧٢)

(مثـال) أوجد قيمة ما يأتى

$$\frac{ا}{(ا - ب)(ا - حـ)(س - ا)} + \frac{ب}{(ب - حـ)(ب - ا)(س - ب)} + \frac{حـ}{(حـ - ا)(حـ - ب)(س - حـ)}$$

لذلك نقول إنه بتغيير إشارة أحد العوامل فى كل من المقامات الثلاثة لحفظ الترتيب الدائرى نجد أن المقام المشترك البسيط

$$(ا - ب)(ب - حـ)(حـ - ا)(س - ا)(س - ب)(س - حـ)$$

وبسط المقدار جميعه

$$- [ا (ب - حـ)(س - ب)(س - حـ) + \cdots\cdots + \cdots\cdots]$$

أو $- [ا(ب - حـ)\{س^٢ - (ب + حـ) س + ب حـ\} + \cdots\cdots + \cdots\cdots]$

فاذا رتبنا هذا البسط على حسب قوى الحرف س ينتج أن

معامل س^٢ = − { ا (ب − ح) + ب (ح − ا) + ح (ا − ب) } = صفرا

معامل س = { ا (ب^٢ − ح^٢) + ب (ح^٢ − ا^٢) + ح (ا^٢ − ب^٢) } = (ب − ح) (ح − ا) (ا − ب) (بند ٢٢٣)

أما الحدود الخالية من الحرف س فهى

= − { ا ب ح (ب − ح) + ا ب ح (ح − ا) + ا ب ح (ا − ب) }

= − ا ب ح { ب − ح + ح − ا + ا − ب } = صفرا

فالمقدار كله إذن = (ب − ح) (ح − ا) (ا − ب) س ÷ [(ب − ح) (ح − ا) (ا − ب) (س − ا) (س − ب) (س − ح)]

= س ÷ [(س − ا) (س − ب) (س − ح)]

(ملاحظة) مما يسهل حل الامثلة التى من هذا القبيل تذكر المتطابقات الآتية جيدا حتى يعود الطالب نفسه استعمالها بدون أن يصرف وقتا فى التفكر فيها

(ب − ح) + (ح − ا) + (ا − ب) = صفرا

ا (ب − ح) + ب (ح − ا) + ح (ا − ب) = صفرا

ا^٢ (ب − ح) + ب (ح − ا) + ح^٢ (ا − ب) = − (ا − ب) (ب − ح) (ح − ا)

ب ح (ب − ح) + ح ا (ح − ا) + ا ب (ا − ب) = − (ا − ب) (ب − ح) (ح − ا)

ا (ب^٢ − ح^٢) + ب (ح^٢ − ا^٢) + ح (ا^٢ − ب^٢) = (ا − ب) (ب − ح) (ح − ا)

ولا بأس بتذكر بعض المتطابقات المذكورة فى التمرين (التاسع والعشرين ح) لأنها مفيدة أيضا

(تمارين ٢٩ ء)

اختصر ما يأتى

(١) ا ÷ [(ا − ب) (ا − ح)] + ب ÷ [(ب − ح) (ب − ا)] + ح ÷ [(ح − ا) (ح − ب)]

(٢) ب ح ÷ [(ا − ب) (ا − ح)] + ح ا ÷ [(ب − ح) (ب − ا)] + ا ب ÷ [(ح − ا) (ح − ب)]

(٣) ا^٢ ÷ [(ا − ب) (ا − ح)] + ب^٢ ÷ [(ب − ح) (ب − ا)] + ح^٢ ÷ [(ح − ا) (ح − ب)]

(٤) ا^٣ ÷ [(ا − ب) (ا − ح)] + ب^٣ ÷ [(ب − ح) (ب − ا)] + ح^٣ ÷ [(ح − ا) (ح − ب)]

(٥) ا (ب + ح) ÷ [(ا − ب) (ح − ا)] + ب (ا + ح) ÷ [(ا − ب) (ب − ح)] + ح (ا + ب) ÷ [(ح − ا) (ب − ح)]

(٦) ١ ÷ [ا (ا − ب) (ا − ح)] + ١ ÷ [ب (ب − ح) (ب − ا)] + ١ ÷ [ح (ح − ا) (ح − ب)]

(٧) ب ح ÷ [ا (ا^٢ − ب^٢) (ا^٢ − ح^٢)] + ح ا ÷ [ب (ب^٢ − ح^٢) (ب^٢ − ا^٢)] + ا ب ÷ [ح (ح^٢ − ا^٢) (ح^٢ − ب^٢)]

(٨) $\frac{(س-ب)(س-ح)}{(ا-ب)(ا-ح)} + \frac{(س-ح)(س-ا)}{(ب-ح)(ب-ا)} + \frac{(س-ا)(س-ب)}{(ح-ا)(ح-ب)}$

(٩) $\frac{ب ح (ا+د)}{(ا-ب)(ا-ح)} + \frac{ح ا (ب+د)}{(ب-ح)(ب-ا)} + \frac{ا ب (ح+د)}{(ح-ا)(ح-ب)}$

(١٠) $\frac{1}{(ا-ب)(ا-ح)(س-ا)} + \frac{1}{(ب-ح)(ب-ا)(س-ب)} + \frac{1}{(ح-ا)(ح-ب)(س-ح)}$

(١١) $\frac{ا^2}{(ا-ب)(ا-ح)(س+ا)} + \frac{ب^2}{(ب-ح)(ب-ا)(س+ب)} + \frac{ح^2}{(ح-ا)(ح-ب)(س+ح)}$

(١٢) $ا^2 \frac{(ا+ب)(ا+ح)}{(ا-ب)(ا-ح)} + ب^2 \frac{(ب+ح)(ب+ا)}{(ب-ح)(ب-ا)} + ح^2 \frac{(ح+ا)(ح+ب)}{(ح-ا)(ح-ب)}$

(١٣) $\frac{ا^3(ب-ح)+ب^3(ح-ا)+ح^3(ا-ب)}{(ب-ح)^3+(ح-ا)^3+(ا-ب)^3}$

(١٤) $\frac{ا^2(ب-ح)+ب^2(ح-ا)+ح^2(ا-ب)+2(ا-ب)(ب-ح)(ح-ا)}{(ب-ح)^3+(ح-ا)^3+(ا-ب)^3}$

(١٥) $\frac{ا^3(ب-ح)+ب^3(ح-ا)+ح^3(ا-ب)}{ا^2(ب-ح)+ب^2(ح-ا)+ح^2(ا-ب)}$

(١٦) $\frac{ا^2(ب-ح)^3+ب^2(ح-ا)^3+ح^2(ا-ب)^3}{(ا-ب)(ب-ح)(ح-ا)}$

(١٧) $\frac{\frac{1}{ا}(ب-ح)+\frac{1}{ب}(ح-ا)+\frac{1}{ح}(ا-ب)}{\frac{1}{ا}\left(\frac{1}{ب^2}-\frac{1}{ح^2}\right)+\frac{1}{ب}\left(\frac{1}{ح^2}-\frac{1}{ا^2}\right)+\frac{1}{ح}\left(\frac{1}{ا^2}-\frac{1}{ب^2}\right)}$

(١٨) $\frac{ا^2\left(\frac{1}{ح^2}-\frac{1}{ب^2}\right)+ب^2\left(\frac{1}{ا^2}-\frac{1}{ح^2}\right)+ح^2\left(\frac{1}{ب^2}-\frac{1}{ا^2}\right)}{\frac{1}{ب ح}\left(\frac{1}{ح}-\frac{1}{ب}\right)+\frac{1}{ح ا}\left(\frac{1}{ا}-\frac{1}{ح}\right)+\frac{1}{ا ب}\left(\frac{1}{ب}-\frac{1}{ا}\right)}$

بند ٢٢٥ — لمعرفة شرط قابلية المقدار

$س^3 + ط س^2 + ن س + ر$ ... ... (١)

القسمة على $س^2 + ا س + ب$ ... ... (٢)

نقسم (١) على (٢) بالطريقة المعتادة هكذا

$$
\begin{array}{l|l}
س^3 + ط س^2 + ن س + ر & س^2 + ا س + ب \\
س^3 + ا س^2 + ب س & س + (ط - ا) \\
\hline
(ط - ا) س^2 + (ن - ب) س + ر & \\
(ط - ا) س^2 + ا (ط - ا) س + ب (ط - ا) & \\
\hline
\end{array}
$$

$ن - \{(ا - ب)(ط - ا)\} س + ر - ب (ط - ا)$ ... ... (٣)

ومعلوم أنه لو كان الباقى صفرا لكانت القسمة صحيحة ولا يكون الباقى صفرا إلا إذا كان

{(ن − ب) − ا (ط − ا)} س + م − ب (ط − ا) = ٠

أو س = (ب (ط − ا) − م) / (ن − ب − ا (ط − ا))

وعلى ذلك يكون المقدار (١) يقبل القسمة على (٢) متى كانت قيمة س هذه القيمة الأخيرة

ولكن إذا كان فى المقدار (٣)   ن − ب − ا (ط − ا) = ٠

وكان أيضا   م − ب (ط − ا) = ٠

فانا نستنتج من ذلك أن الباقى يساوى صفرا مهما كانت قيمة س

وعليه فالمقدار س³ + ط س² + ن س + م يقبل القسمة على س² + ا س + ب

مهما كانت قيمة س على شرط أن يكون ن − ب − ا (ط − ا) = ٠

و   م − ب (ط − ا) = ٠

بند ٢٢٦ — لمعرفة الشرط الذى به يكون س² + ط س + ن مربعا كاملا نستخرج الجذر التربيعى بالطريقة المعتادة فيحدث

س² + ط س + ن	س + ط/٢
س²	
ط س + ن	٢ س + ط/٢
ط س + ط²/٤	
ن − ط²/٤	

واذا كانت س² + ط س + ن مربعا كاملا يجب أن يكون الباقى وهو ن − ط²/٤ = صفرا

فالشرط المطلوب إذن أن يكون   ن − ط²/٤ = ٠

أو   ط² = ٤ ن

بند ٢٢٧ — للبرهنة على أن المقدار س⁴ + ط س³ + ن س² + ى س + هـ مربع كامل إذا كان (ن − ط²/٤)² = ٤ هـ ، ى² = ط² هـ .

نقول إنه من الواضح أن الجذر التربيعى لابدّ أن يكون مقدارا ذا ثلاثة حدود على صورة س² + ل س + م فاذا وضعنا س⁴ + ط س³ + ن س² + ى س + هـ = (س² + ل س + م)² وربعنا الطرف الأيسر من هذه المتساوية نجد أن

س⁴ + ط س³ + ن س² + ى س + هـ

= س⁴ + ٢ ل س³ + س² (ل² + ٢ م) + ٢ ل م س + م²

ولكون هذه المتساوية صحيحة مهما كانت قيمة $س$ يمكننا أن نعتبر معاملات القوى المتشابهة للحرف $س$ متساوية

وإذن ينتج أن $٢ ل = ط ل^٢ + ٢ م = ن$

$٢ ل م = ء \quad م = هـ$

وبحذف الكميتين المجهولتين $ل$ ، $م$ من هذه المعادلات يمكننا أن نوجد الارتباط بين $ط$ ، $ن$ ، $ء$ ، $هـ$

فنرى أن $ن - \frac{ط^٢}{٤} = ٢ م = ٢ \sqrt{هـ}$

، $ء = ٢ ل م = ط \sqrt{هـ}$

$\therefore \left(ن - \frac{ط^٢}{٤}\right)^٢ = ٤ هـ$ ، $ء^٢ = ط^٢ هـ$

(ملاحظة) كان ممكنا أن نستعمل فى برهان ما ورد بهذا البند الطريقة المذكورة ببند ٢٢٦ كما أنه يمكن استعمال طريقة هذا البند (أى بند ٢٢٧) فى إثبات النتيجتين اللتين برهنا عليهما فى البندين ٢٢٥ و ٢٢٦

بند ٢٢٨ — الغرض من النظرية الواردة فى البند السابق إيضاح قاعدة كبيرة الفائدة كثيرة الاستعمال وقد اعتمدنا فى برهانها على حقيقة قانون مهم وهو

إذا تساوى مقداران جبريان صحيحان جذريان مشتملان على $س$ تساوت معاملات القوى المتماثلة للحرف $س$ فى المقدارين

[يسمى المقدار الجبرى جذريا إذا لم يشتمل أى حدّ من حدوده على جذر تربيعى أو أى جذر آخر ويسمى صحيحا بالنسبة للحرف $س$ متى كانت جميع قوى $س$ فيه صحيحة موجبة]

وإثبات هذا القانون المتقدّم أصعب من أن يذكر بالتفصيل فى الجبر الابتدائى فلا حاجة إلى استيفاء برهانه هنا (راجع كتاب الجبر العالى للؤلفين بند ٣١١)

نظرية الباقى

بند ٢٢٩ — إذا قسم مقدار جبرى صحيح جذرى موضوع على صورة

$س^{ن} + ط_١ س^{ن-١} + ط_٢ س^{ن-٢} + ط_٣ س^{ن-٣} + \dots + ط_{ن-١} س + ط_{ن}$ على $س - ١$

فباقى القسمة يكون

$١^{ن} + ط_١ ١^{ن-١} + ط_٢ ١^{ن-٢} + ط_٣ ١^{ن-٣} + \dots \dots + ط_{ن-١} ١ + ط_{ن}$

لاثبات ذلك نقسم المقدار المذكور على $س - ١$ ونسير فى عملية القسمة حتى نحصل على باق لا يشتمل على $س$ ولنفرض ان $ن$ خارج القسمة ، $ر$ باقيها المجرّد من $س$

إذن $س^{ن} + ط_١ س^{ن-١} + ط_٢ س^{ن-٢} + \dots \dots + ط_{ن-١} س + ط_{ن} = ن (س - ١) + ر$

ولكون الباقى ر مجردا عن الحرف س فهو لا يتغير مهما كانت قيمة س

وعلى ذلك لو اعتبرنا س = ١

لنتج أن $ا^ن + ط_١ ا^{ن-١} + ط_٢ ا^{ن-٢} + ... + ط_{ن-١} ا + ط_ن = ق × صفر + ر$

$\therefore$ $ر = ا^ن + ط_١ ا^{ن-١} + ط_٢ ا^{ن-٢} + ط_٣ ا^{ن-٣} + ... + ط_{ن-١} ا + ط_ن$

وبذلك تثبت النظرية

ويظهر من ذلك أنه عند قسمة مقدار جبرى على س — ا يمكن إيجاد باقى القسمة بوضع ا بدل س فى المقدار المذكور .

ولكون الباقى صفرا إذا قبل المقدار القسمة على س — ا نستنتج من ذلك نظرية أخرى مهمة تعرف بنظرية العوامل وهى

إذا صار مقدار جبرى صحيح جذرى مشتمل على الحرف س مساويا للصفر عند وضع ا بدلا من س فيه فلا بدّ أن يكون س — ا أحد عوامله

(مثال ١) لتحليل $س^٣ + ٣ س^٢ - ١٣ س - ١٥$ إلى عوامله

نقول إنه بطريق التحسس نجد أن المقدار يساوى الصفر إذا وضعنا ٣ بدلا من س وتكون إذن س — ٣ عاملا له

$\therefore$ $س^٣ + ٣ س^٢ - ١٣ س - ١٥ = س^٢ (س - ٣) + ٦ س (س - ٣) + ٥ (س - ٣)$

$= (س - ٣) (س^٢ + ٦ س + ٥)$

$= (س - ٣) (س + ١) (س + ٥)$

(ملاحظة) المقادير العددية التى يمكن تجربتها بوضعها بدلا من س يلزم أن لا تتعدّى عوامل الحدّ الأخير فى المقدار ففى المثال المتقدّم لو جرّبنا العدد — ٥ وذلك بوضعه بدل س لاستنتجنا أن س + ٥ عامل للمقدار

(مثال ٢) لايجاد باقى قسمة $س^٤ - ٢ س^٣ + س - ٧$ على س + ٢

نقول إن ذلك الباقى هو $(-٢)^٤ - ٢ (-٢)^٣ + (-٢) - ٧$ أى $١٦ + ١٦ - ٢ - ٧$ أى ٢٣

ويمكن الحصول على نفس الباقى بطريقة أخصر وذلك بوضع س = — ٢ فى المقدار

$[\{(س - ٢) س\} س + ١] س - ٧$

(مثال ٣) لتحليل $ب ح (ب - ح) + ح ا (ح - ا) + ا ب (ا - ب)$ إلى عوامله

نقول إنه بالتحسس نرى أن المقدار يساوى الصفر إذا وضعت ب بدل ح فتكون إذن ب — ح عاملا له وبالطريقة عينها نستنتج أن كلا من ح — ا ، ا — ب عامل للمقدار

$\therefore$ $ب ح (ب - ح) + ح ا (ح - ا) + ا ب (ا - ب) = م (ب - ح) (ح - ا) (ا - ب) \cdots (١)$

ولكون الطرف الأيمن لهذه المتطابقة من الدرجة الثالثة بالنسبة للحروف ا ، ب ، ح فلا بدّ أن يكون العامل م الذى فى الطرف الأيسر كمية رقمية خالية من الحروف ا ، ب ، ح . ويمكن إيجاد قيمته إما بوضع مقادير مخصوصة للحروف ا ، ب ، ح فى (١) أو بتكوين متساويات من معاملات الحدود المتشابهة فى كل من الطرفين ومن أيها نستخرج قيمة م

لنفرض أن ا = صفرا ، ب = ١ ، ح = ٢ فالمتطابقة (١) تصير

٢ (− ١) + ٠ + ٠ = م (− ١) × ٢ × (− ١)

ومن هذا ينتج أن م = − ١

∴ ب ح (ب − ح) + ح ا (ح − ا) + ا ب (ا − ب) = − (ب − ح) (ح − ا) (ا − ب)

بند ٢٣٠ — سنأتى الآن على البراهين العمومية لما ذكرناه فى بند ٥٥ بفرض أن ن كمية صحيحة موجبة

(أولا) لاثبات أن سـ^ن − صـ^ن تقبل القسمة دائما على سـ − صـ

نعلم من نظرية الباقى أنه لو قسم سـ^ن − صـ^ن على سـ − صـ فالباقى يكون

صـ^ن − صـ^ن = صفرا

ومن ذلك نستنتج أن سـ^ن − صـ^ن تقبل القسمة على سـ − صـ دائما

(ثانيا) لاثبات أن سـ^ن + صـ^ن تقبل القسمة على سـ + صـ إذا كانت ن عددا فرديا ولا تقبل القسمة عليه إذا كانت ن عددا زوجيا

نقول إننا نستنتج من نظرية الباقى أننا إن قسمنا سـ^ن + صـ^ن على سـ + صـ فالباقى يكون

(− صـ)^ن + صـ^ن

(١) إذا كانت ن فردية كان (− صـ)^ن + صـ^ن = − صـ^ن + صـ^ن = ٠

(٢) إذا كانت ن زوجية كان (− صـ)^ن + صـ^ن = صـ^ن + صـ^ن = ٢ صـ^ن

أى أنه يكون للقسمة باق إذا كانت ن عددا زوجيا ولا يكون لها باق إن كانت ن عددا فرديا وهذا يثبت المطلوب

وبالطريقة عينها يمكننا أن نثبت أن سـ^ن − صـ^ن تقبل القسمة على سـ + صـ إذا كانت ن عددا زوجيا وأن سـ^ن + صـ^ن لا تقبل القسمة على سـ − صـ مطلقا

إذا أجرينا عملية القسمة فى كل من الاحوال المتقدّمة واستخرجنا بعض حدود الخارج فانه يمكننا من هذا الجزء المستخرج أن نستنتج الوضع الذى سيكون عليه خارج القسمة جميعه

ويمكن تلخيص ما استنتجناه من هذا البند فيما يأتى :

(أوّلا) إذا كانت ن عددا زوجيا أو فرديا فان

سـ^ن − صـ^ن = (سـ − صـ) (سـ^(ن−١) + سـ^(ن−٢) صـ + سـ^(ن−٣) صـ^٢ + ... + صـ^(ن−١))

(ثانيا) إذا كانت ن عددا فرديا فان

سـ^ن + صـ^ن = (سـ + صـ) (سـ^(ن−١) − سـ^(ن−٢) صـ + سـ^(ن−٣) صـ^٢ − ...... + صـ^(ن−١))

(ثالثا) إذا كانت ن عددا زوجيا فان

سـ^ن − صـ^ن = (سـ + صـ) (سـ^(ن−١) − سـ^(ن−٢) صـ + سـ^(ن−٣) صـ^٢ − ... − صـ^(ن−١))

(تمارين ٢٩ هـ)

مامقدار س الذى يجعل كلا من المقادير الآتية مربعا كاملا

(١) $\text{س}^{4} + 6\,\text{س}^{3} + 13\,\text{س}^{2} + 13\,\text{س} - 1$

(٢) $\text{س}^{4} + 6\,\text{س}^{3} + 11\,\text{س}^{2} + 3\,\text{س} + 31$

(٣) $\text{س}^{4} - 2\,\text{ا}\,\text{س}^{3} + (\text{ا}^{2} + 2\,\text{ب})\,\text{س}^{2} - 3\,\text{ا}\text{ب}\,\text{س} + 2\,\text{ب}$

(٤) $4\,\text{ط}^{1}\,\text{س}^{4} - 4\,\text{ط}\text{ن}\,\text{س}^{3} + (\text{ن}^{2} + 2\,\text{ط}^{2})\,\text{س}^{2} - 5\,\text{ط}\text{ن}\,\text{س} + \frac{\text{ط}^{2}}{2}$

(٥) $\frac{\text{ا}^{2}\,\text{س}^{6}}{9} - \frac{\text{ا}\text{ب}\,\text{س}^{4}}{2} + \frac{2\,\text{ا}\text{ح}\,\text{س}^{3}}{3} + \frac{9\,\text{ب}^{2}\,\text{س}^{2}}{16} - \frac{5\,\text{ب}\text{ح}\,\text{س}}{2} + 6\,\text{ح}^{2}$

(٦) $\text{ا}\,\text{س}^{4} + 2\,\text{ا}\,\text{س}^{3} + 3\,\text{ا}^{2}\,\text{س}^{2} + \text{ح}\,\text{س} + \text{د}$

(٧) بأى شروط يكون المقدار $\text{س}^{4} - \text{ا}\,\text{س}^{3} + \text{ن}\,\text{س}^{2} - \text{ح}\,\text{س} + 1$ مربعا كاملا مهما كان مقدار س .

مامقدار س الذى يجعل كلا من المقادير الآتية مكعبا كاملا

(٨) $8\,\text{س}^{3} - 36\,\text{س}^{2} + 56\,\text{س} - 39$

(٩) $\frac{\text{س}^{6}}{27} - \frac{\text{ا}^{2}\,\text{س}^{4}}{3} + 4\,\text{ا}^{4}\,\text{س}^{2} - 28\,\text{ا}^{6}$

(١٠) $\text{م}^{3}\,\text{س}^{6} - 9\,\text{م}^{2}\,\text{ن}\,\text{س}^{4} + 39\,\text{م}\,\text{ن}^{2}\,\text{س}^{2} - 51\,\text{ن}^{3}$

(١١) ما العلاقة بين ب و ح التى تجعل $\text{س}^{3} + 3\,\text{ا}\,\text{س}^{2} + \text{ب}\,\text{س} + \text{ح}$ مكعبا كاملا مهما كانت قيمة س

(١٢) ما الشروط التى تجعل المقدار

$\text{س}^{6} + 3\,\text{ا}\,\text{س}^{5} + 3\,\text{ب}\,\text{س}^{4} + \text{ا}\,(6\,\text{ب} - 5\,\text{ا}^{2})\,\text{س}^{3} + 3\,\text{ب}\,(\text{ب} - \text{ا}^{2})\,\text{س}^{2}$
$+ 3\,\text{ح}\,\text{س} + \text{د}$ مكعبا كاملا مهما كان مقدار س

(١٣) ما العدد الذى تلزم إضافته إلى $\text{س}^{3} + 2\,\text{س}^{2}$ ليصير المجموع قابلا القسمة على $\text{س} + 4$

(١٤) إذا كانت $\text{س} + 1$ عاملا مشتركا بين $\text{س}^{2} + \text{ط}\,\text{س} + \text{ن}$ و $\text{س}^{2} + \text{ل}\,\text{س} + \text{م}$

فبيّن أن $1 = \frac{\text{م} - \text{ن}}{\text{ل} - \text{ط}}$

حلل كلا من المقادير الآتية إلى عوامله

(١٥) $\text{س}^{3} - 6\,\text{س} + 11\,\text{س} - 6$

(١٦) $\text{س}^{3} - 5\,\text{س}^{2} - 2\,\text{س} + 24$

(١٧) $\text{س}^{3} + 9\,\text{س}^{2} + 26\,\text{س} + 24$

(١٨) $\text{س}^{3} - \text{س}^{2} - 41\,\text{س} + 105$

(١٩) $\text{س}^{2} - 39\,\text{س} + 70$

(٢٠) $\text{س}^{3} - 8\,\text{س}^{2} - 31\,\text{س} - 22$

(٢١) $6\,\text{س}^{3} + 7\,\text{س}^{2} - \text{س} - 2$

(٢٢) $6\,\text{س}^{3} + \text{س}^{2} - 19\,\text{س} + 6$

اكتب خارج القسمة لكل من المقادير الآتية

(٢٣) $\frac{س^{٧} + ص^{٧}}{س + ص}$ | (٢٥) $\frac{س^{٦} - ص^{٦}}{س - ص}$

(٢٤) $\frac{س^{٨} - ص^{٨}}{س + ص}$ | (٢٦) $\frac{س^{٩} - ص^{٩}}{س - ص}$

أوجد الجذر التربيعى لكل من المقدارين الآتيين

(٢٧) $س^{٤} + (٢ ا - ٤) س^{٣} + (ا^{٢} - ٢ ا + ٤) س^{٢} + (٢ ا - ٤ ا) س + ا^{٢}$

(٢٨) $(ا + ١)^{٢} س^{٤} + (٢ ا^{٢} + ٢ ا) س^{٣} + (٣ ا^{٢} - ٤ ا - ٦) س$
$+ (٢ ا^{٢} - ٦ ا) س + ا^{٢} - ٦ ا + ٩$

(٢٩) أوجد مقدار م الذى يجعل المقدار $٣ م س^{٢} + (٦ م - ١٢) س + ٨$ مربعا كاملا

(٣٠) إذا كان $٤ س^{٤} + ١٢ س^{٣} ص + ط س^{٢} ص^{٢} + ٦ س ص^{٢} + ص^{٤}$ مربعا كاملا فما مقدار ط

بيّن بدون إجراء عملية القسمة أن

(٣١) $٣٢ س^{١٠} - ٣٣ س^{٥} + ١$ تقبل القسمة على $س - ١$

(٣٢) $٣ س^{٤} + ٥ س^{٣} - ١٣ س^{٢} - ٢٠ س + ٤$ تقبل القسمة على $س^{٢} - ٤$

(٣٣) $س^{٤} + ٤ س^{٣} - ٥ س^{٢} - ٣٦ س - ٣٦$ تقبل القسمة على $س^{٢} - س - ٦$

بدون إجراء عملية القسمة اكتب باقى قسمة

(٣٤) $س^{٥} - ٥ س^{٢} + ٥$ على $س - ٥$

(٣٥) $س^{٣} - ٧ س^{٢} ا + ٨ س ا^{٢} + ١٥ ا^{٣}$ على $س + ٢ ا$

(٣٦) إذا كان المقداران

$ا س^{٢} - ب س + ح$ ، $ى س^{٢} - ب س + ح$ بينهما عامل مشترك

كان $ا^{٣} - ا ب ى + ح ى^{٢} = ٠$

(٣٧) إذا فرض أن ن عدد صحيح موجب فبرهن على أن $٥^{٢ن} - ١$ يقبل القسمة على ٢٤ دائما

(٣٨) بيّن أن $١ - س - س^{ن} + س^{ن+١}$ يقبل القسمة على $١ - ٢ س + س^{٢}$

(٣٩) إذا كان بين المقدارين $س^{٣} + ط س + ر$ ، $٣ س^{٢} + ط$ عامل مشترك فأثبت أن $\frac{ط^{٣}}{٢٧} + \frac{ر^{٢}}{٤} = ٠$

(٤٠) اثبت أنه إذا كان المقدار

$س^{ن} + ط ص^{ن} + ن ع^{ن}$ يقبل القسمة على $س^{٢} - (ا ص + ب ع) س + ا ب ص ع$

يكون $\frac{ط}{ا^{ن}} + \frac{ن}{ب^{ن}} + ١ = ٠$

الباب الثلاثون – نظريات الأسس

[لا بأس بدراسة اللوغاريتمات (الباب التاسع والثلاثين) مع هذا الباب عقب دراسة البنود من ٢٣١ الى ٢٤٢]

بند ٢٣١ – اعتمدنا فى كل التعاريف والقواعد السابقة المتعلقة بالأسس على فرض أنها أعداد صحيحة موجبة فمثلا

(١) $ا^{١٤} = ا \times ا \times ا \times \dots$ إلى ١٤ عاملا

(٢) $ا^{١٤} \times ا^{٣} = ا^{١٤+٣} = ا^{١٧}$

(٣) $ا^{١٤} \div ا^{٣} = ا^{١٤-٣} = ا^{١١}$

(٤) $(ا^{١٤})^{٣} = ا^{١٤\times٣} = ا^{٤٢}$

والغرض من هذا الباب شيئان

(أولا) إثبات القواعد الخاصة بالأسس الصحيحة الموجبة بطريقة عامة

(ثانيا) استعمال هذه القواعد فى إيجاد معان واضحة للرموز التى تكون أسسها كسورا أو أصفارا أو كميات سالبة على الوجه الوافى

وسنبدأ ببرهنة ثلاث نظريات مهمة معتمدين على تعريف الأس الصحيح الموجب

بند ٢٣٢ – تعريف : إذا كانت م عددا صحيحا موجبا فان $ا^{م}$ تدل على حاصل ضرب عوامل عددها م كل منها يساوى ا

بند ٢٣٣ – النظرية الأولى : لاثبات أن $ا^{م} \times ا^{ن} = ا^{م+ن}$ إذا كان كل من م ، ن عددا صحيحا موجبا

نقول من التعريف المتقدّم نعلم أن $ا^{م} = ا \times ا \times ا \times \dots$ إلى م من العوامل

وأن $ا^{ن} = ا \times ا \times ا \dots$ إلى ن من العوامل

$\therefore$ $ا^{م} \times ا^{ن} = (ا \times ا \times ا \dots$ إلى م عوامل$) (ا \times ا \times ا \dots$ إلى ن من العوامل$)$

$= ا \times ا \times ا \times ا \dots$ إلى $(م + ن)$ من العوامل $= ا^{م+ن}$ بمقتضى التعريف

نتيجة : إذا فرض أن ط عدد صحيح موجب أيضا يكون $ا^{م} \times ا^{ن} \times ا^{ط} = ا^{م+ن+ط}$ وهكذا مهما كان عدد العوامل

بند ٢٣٤ – النظرية الثانية : لاثبات أن $ا^{م} \div ا^{ن} = ا^{م-ن}$ إذا كان كل من م ، ن عددا صحيحا موجبا ، م أكبر من ن

نقول إن $ا^{م} \div ا^{ن} = \frac{ا^{م}}{ا^{ن}} = \frac{ا \times ا \times ا \dots \text{ إلى م من العوامل}}{ا \times ا \times ا \dots \text{ إلى ن من العوامل}}$

$= ا \times ا \times ا \dots$ إلى $(م - ن)$ من العوامل

$= ا^{م-ن}$

بند ٢٣٥ — النظرية الثالثة : لاثبات أن $(ا^{م})^{ن} = ا^{م ن}$ إذا كان كل من م ، ن عددا صحيحا موجبا

نقول إن $(ا^{م})^{ن} = ا^{م} \times ا^{م} \times ا^{م} \ldots\ldots$ إلى ن من العوامل

= (ا × ا × ا ... ... إلى م من العوامل) (ا × ا × ا ... إلى م من العوامل) ... مع تكرار الأقواس ن من المرات

= ا × ا × ا ... ... إلى م ن من العوامل

$= ا^{م ن}$

بند ٢٣٦ — تلك هي القوانين الاساسية للأسس بنينا برهانها على تعريف الأس وهذا التعريف لا يمكن تصوّر معناه إلا إذا كان الأس عددا صحيحا موجبا

ولكن هناك حالات يستحسن فيها استعمال أسس كسرية أو سالبة مثل

$ا^{\frac{٤}{٥}}$ ، $ا^{-٧}$ أو على وجه عام $ا^{\frac{ط}{ن}}$ ، $ا^{-ن}$ وهذان لا يتيسر فهمهما الآن لأن التعريف المذكور ببند ٢٣٢ الذى بنى عليه برهان ثلاث النظريات السابقة لا يسرى على الأحوال التى تكون فيها م كسرا أو كمية سالبة

ومن حيث إنه من المهم أن تدخل الأسس سواء كانت موجبة أو سالبة صحيحة أو كسرية فى قانون عام واحد فسنبحث عن معنى لكل من الرمزين $ا^{\frac{ط}{ن}}$ ، $ا^{-ن}$ هكذا

نفرض أن القانون الأساسى $ا^{م} \times ا^{ن} = ا^{م+ن}$ ينطبق عليهما ونقبل معنى كل منهما الذى يؤدّى إليه تطبيق هذا القانون

(وسيتضح لنا أن جميع الرموز التى نوجد لها معنى بتطبيق القانون الأساسى عليها لها علاقة أيضا بالقانونين المذكورين فى النظريتين الثانية والثالثة)

بند ٢٣٧ — لايجاد معنى للرمز $ا^{\frac{ط}{ن}}$ إذا كان كل من ط ، ن عددا صحيحا موجبا

نقول من حيث إن $ا^{م} \times ا^{ن} = ا^{م+ن}$ مهما كان مقدار كل من م ، ن نضع $\frac{ط}{ن}$ بدلا من كل من الحرفين م ، ن فنجد أن

$$ا^{\frac{ط}{ن}} \times ا^{\frac{ط}{ن}} = ا^{\frac{ط}{ن}+\frac{ط}{ن}} = ا^{\frac{٢ط}{ن}}$$

وكذا $ا^{\frac{ط}{ن}} \times ا^{\frac{ط}{ن}} \times ا^{\frac{ط}{ن}} = ا^{\frac{٢ط}{ن}} \times ا^{\frac{ط}{ن}} = ا^{\frac{٢ط}{ن}+\frac{ط}{ن}} = ا^{\frac{٣ط}{ن}}$

وبالسير على هذا النسق إلى أربعة أو خمسة أو ... ن من العوامل يحدث أن

$$ا^{\frac{ط}{ن}} \times ا^{\frac{ط}{ن}} \times ا^{\frac{ط}{ن}} \ldots\ldots \text{ إلى ن من العوامل } = ا^{\frac{ن ط}{ن}}$$

أى أن $\left(ا^{\frac{ط}{ن}}\right)^{ن} = ا^{ط}$

واذن باستخراج الجذر القافى نجد أن $ا^{\frac{ط}{ن}} = \sqrt[ن]{ا^{ط}}$

وبعبارة أخرى أن الكمية $ا^{\frac{ط}{ن}}$ هى الجذر القافى للكمية $ا^{ط}$

أمثلة

(١) $س^{\frac{٥}{٧}} = \sqrt[٧]{س^{٥}}$

(٢) $ا^{\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{ا}$

(٣) $٤^{\frac{٣}{٢}} = \sqrt{٤^{٣}} = \sqrt{٦٤} = ٨$

(٤) $ا^{\frac{٢}{٣}} \times ا^{\frac{٥}{٦}} = ا^{\frac{٢}{٣}+\frac{٥}{٦}} = ا^{\frac{٣}{٢}}$

(٥) $ح^{\frac{١}{٢}} \times ح^{\frac{٢}{٣}} = ح^{\frac{١}{٢}+\frac{٢}{٣}} = ح^{\frac{٣+٤}{٦}}$

(٦) $٣ا^{\frac{٢}{٣}} ب^{\frac{١}{٢}} \times ٤ا^{\frac{١}{٦}} ب^{\frac{٥}{٦}} = ١٢ا^{\frac{٢}{٣}+\frac{١}{٦}} \times ب^{\frac{١}{٢}+\frac{٥}{٦}}$

$= ١٢ا^{\frac{٥}{٦}} ب^{\frac{٤}{٣}}$

بند ٢٣٨ — لايجاد معنى للرمز $ا^{٠}$ نقول من حيث إن $ا^{م} \times ا^{ن} = ا^{م+ن}$ مهما كان مقدار كل من م ، ن فبوضع الصفر بدل م يحدث أن

$$ا^{٠} \times ا^{ن} = ا^{٠+ن}$$
$$= ا^{ن}$$
$$ا^{٠} = \frac{ا^{ن}}{ا^{ن}}$$
$$= ١$$

ومنه ينتج أن كل كمية أسها الصفر تساوى الوحدة

(مثال) $س^{ب-ح} \times س^{ح-ب} = س^{ب-ح+ح-ب} = س^{٠} = ١$

بند ٢٣٩ — لايجاد معنى للرمز $ا^{-ن}$ نقول من حيث إن

$ا^{م} \times ا^{ن} = ا^{م+ن}$ مهما كان مقدار كل من م ، ن فاذا وضعنا $-ن$ بدل م يحدث أن

$$ا^{-ن} \times ا^{ن} = ا^{-ن+ن} = ا^{٠}$$

ولكون $ا^{٠} = ١$

$\therefore$ $ا^{-ن} = \frac{١}{ا^{ن}}$

وأيضا $ا^{ن} = \frac{١}{ا^{-ن}}$

ومن هذا ينتج أنه يمكن نقل أى عامل من البسط إلى المقام وبالعكس بتغيير علامة أسه

(مثال ١) $س^{-٣} = \frac{١}{س^{٣}}$

(مثال ٢) $\frac{١}{ص^{-\frac{١}{٢}}} = ص^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{ص}$

(مثال ٣) $٢٧^{-\frac{٢}{٣}} = \frac{١}{٢٧^{\frac{٢}{٣}}} = \frac{١}{\sqrt[٣]{٢٧^{٢}}} = \frac{١}{\sqrt[٣]{٣^{٦}}} = \frac{١}{٣^{٢}} = \frac{١}{٩}$

بند ٢٤٠ — لاثبات أن $ا^{م} \div ا^{ن} = ا^{م-ن}$ مهما كانت قيمة م ، ن

نقول إن $ا^{م} \div ا^{ن} = ا^{م} \times \frac{١}{ا^{ن}}$

$= ا^{م} \times ا^{-ن}$

$= ا^{م-ن}$ بموجب القانون العام للأسس

(مثال ١) $ا^{٣} \div ا^{٥} = ا^{٣-٥} = ا^{-٢} = \frac{١}{ا^{٢}}$

(مثال ٢) $ح \div ح^{-\frac{٨}{٥}} = ح^{١+\frac{٨}{٥}} = ح^{\frac{١٣}{٥}}$

(مثال ٣) $س^{ا-ب} \div س^{ا-ح} = س^{ا-ب-(ا-ح)} = س^{ح-ب}$

بند ٢٤١ — إن الطريقة التى أثبتناها فى إيجاد معان للرموز التى أوردناها فى البنود السابقة جديرة بالالتفات لان الطريقة المعتادة فى علم الجبر أن تنتخب الرموز ثم توضع لها معان ويعقب ذلك إثبات القواعد التى تربطها أما هنا فقد انعكس الامر فاننا بدأنا بوضع الرموز ثم القانون الذى طبقناه على تلك الرموز ومن ذلك استنتجنا معانيها

بند ٢٤٢ — سنورد الأمثلة الآتية لايضاح القواعد التى قررناها

(مثال ١) $\frac{٣ ا^{-٢}}{٥ س^{-١} ص} = \frac{٣ س}{٥ ا^{٢} ص}$

(مثال ٢) $\frac{ا^{\frac{١}{٢}} \times ا^{\frac{٢}{٣}} \times ١٦ ا^{-\frac{٧}{٣}}}{٩ ا^{-\frac{٥}{٣}} \times ا^{\frac{٣}{٢}}} = \frac{٤}{٣} ا^{\frac{١}{٢}+\frac{٢}{٣}-\frac{٧}{٣}+\frac{٥}{٣}-\frac{٣}{٢}} = \frac{٤}{٣} ا^{-١} = \frac{٤}{٣ا}$

(مثال ٣) $\frac{\sqrt{س^{٣}} \times \sqrt[٣]{ص^{٢}}}{\sqrt[٦]{ص^{-٢}} \times \sqrt[٤]{س^{٦}}} = \frac{س^{\frac{٣}{٢}} \times ص^{\frac{٢}{٣}}}{ص^{-\frac{١}{٣}} \times س^{\frac{٣}{٢}}} = س^{\frac{٣}{٢}-\frac{٣}{٢}} ص^{\frac{٢}{٣}+\frac{١}{٣}} = س^{٠} ص = ص$

(مثال ٤) $٢\sqrt{ا} + \frac{٣}{ا^{-\frac{١}{٢}}} + ا^{\frac{٥}{٢}} = ٢ ا^{\frac{١}{٢}} + ٣ ا^{\frac{١}{٢}} + ا^{\frac{٥}{٢}}$

$= ٥ ا^{\frac{١}{٢}} + ا^{\frac{٥}{٢}} = ا^{\frac{١}{٢}} (٥ + ا^{٢})$

(تمارين ١٣٠)

أكتب ماياتى بأسس موجبة

(١) $٢\,س^{-\frac{١}{٤}}$

(٢) $٣\,ا^{-\frac{٢}{٣}}$

(٣) $٤\,س^{-٢}\,ا^{٣}$

(٤) $٣ \div ا^{-٢}$

(٥) $\frac{١}{٤\,ا^{-٢}}$

(٦) $\frac{١}{٥\,س^{-\frac{١}{٢}}}$

(٧) $\frac{٣\,ا^{-٣}\,س^{٢}}{٥\,ص^{٢}\,ح^{-٤}}$

(٨) $\frac{س^{ا}\,ص^{-ب}}{ب^{-ا}}$

(٩) $٢\,س^{\frac{١}{٢}} \times ٣\,س^{-١}$

(١٠) $١ \div ٢\,ا^{-\frac{١}{٢}}$

(١١) $س\,ص \times س^{-١}$

(١٢) $ا^{-٢}\,س^{-١} \div ٣\,س$

(١٣) $\frac{١}{\sqrt{س^{٣}}}$

(١٤) $\frac{١}{٤\sqrt[٥]{س^{-٣}}}$

(١٥) $\frac{٢}{\sqrt{ص^{-٣}}}$

(١٦) $\frac{\sqrt[٤]{س^{٣}}}{\sqrt{س^{-١}}}$

(١٧) $ا^{-٢}\,س^{-\frac{١}{٢}} \div ا^{-٣}$

(١٨) $\sqrt[٣]{ا^{-١}} \div \sqrt[٣]{ا}$

(١٩) $\sqrt[٥]{ا^{-٣}} \div \sqrt[٥]{ا^{٧}}$

أدخل ماياتى تحت علامة الجذر بحيث تكون الأسس موجبة

(٢٠) $س^{\frac{٣}{٥}}$

(٢١) $ا^{-\frac{١}{٢}}$

(٢٢) $٥\,س^{-\frac{١}{٢}}$

(٢٣) $٢\,ا^{-\frac{١}{س}}$

(٢٤) $\frac{١}{٢\,ا^{\frac{١}{٣}}}$

(٢٥) $\frac{٢}{ب^{-\frac{٣}{٤}}}$

(٢٦) $\frac{س^{-\frac{١}{٣}}}{٢}$

(٢٧) $\frac{١}{س^{-\frac{١}{س}}}$

(٢٨) $ا^{-\frac{١}{٣}} \times ٢\,ا^{-\frac{١}{٢}}$

(٢٩) $س^{-\frac{٢}{٣}} \div ٢\,ا^{-\frac{١}{٢}}$

(٣٠) $٧\,ا^{-\frac{١}{ح}} \times ٣\,ا^{-١}$

(٣١) $\frac{٢\,ا^{-٢}}{ا^{-\frac{٣}{٢}}}$

(٣٢) $\frac{ا^{-\frac{١}{٢}}}{٣\,ا}$

(٣٣) $\frac{٤\,س^{-١}}{س^{-\frac{١}{٣}}}$

(٣٤) $\frac{\sqrt[٣]{س^{-١٠}}}{\sqrt[٣]{س^{٢}}}$

(٣٥) $\sqrt[ن]{ا^{٢}} \times \sqrt[٢]{ا^{٣}}$

(٣٦) $\sqrt[٥]{ا^{-س}} \div \sqrt[٥]{ا^{-٢س}}$

(٣٧) $\sqrt[٢ا]{س} \times \sqrt[ا]{س^{٢}}$

(٣٨) $\sqrt[ا]{س} \div \sqrt[٢ا]{س^{٣}}$

(٣٩) $\sqrt[٣س]{ا^{٣}} \div \sqrt[س]{ا^{٢}}$

(٤٠) $\sqrt[٤]{ا^{ن}} \times \sqrt[٣]{ا^{ن}} \div \sqrt[١٢]{ا^{٥ن}}$

أوجد قيمة

(٤١) $١٦^{\frac{٣}{٤}}$	(٤٥) $٣٦^{-\frac{٣}{٢}}$	(٤٨) $\left(\frac{٨}{٢٧}\right)^{-\frac{١}{٣}}$
(٤٢) $٤^{-\frac{٥}{٢}}$	(٤٦) $٢٥^{\frac{١}{-٢}}$	(٤٩) $\left(\frac{٨١}{١٦}\right)^{\frac{٣}{٤}}$
(٤٣) $١٢٥^{\frac{٢}{٣}}$		
(٤٤) $٨^{-\frac{٢}{٣}}$	(٤٧) $٢٤٣^{\frac{٢}{٥}}$	(٥٠) $\left(\frac{٣٢}{٢٤٣}\right)^{-\frac{٧}{٥}}$

بند ٢٤٣ — لاثبات أن $(ا^م)^ن = ا^{من}$ فى كل الأحوال مهما كانت قيمة م ، ن

(الحالة الأولى) نفرض أن ن عدد صحيح موجب

فمهما كانت قيمة م فان $(ا^م)^ن = ا^م \cdot ا^م \cdot ا^م \cdot \cdot \cdot$ إلى ن من العوامل

$= ا^{م+م+م \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot}$ إلى ن من العوامل

$= ا^{من}$

(الحالة الثانية) نفرض أن م أى عدد كان كما سبق وأن ن كسر موجب فبوضع $\frac{ط}{ى}$ بدل ن على فرض أن ط ، ى عددان صحيحان موجبان نجد أن $(ا^م)^ن = (ا^م)^{\frac{ط}{ى}}$

ومعلوم أن

القوة القافية للمقدار $(ا^م)^{\frac{ط}{ى}} = \left\{(ا^م)^{\frac{ط}{ى}}\right\}^ى$

$= (ا^م)^{\frac{ط}{ى} \cdot ى}$ [بالحالة الأولى]

$= (ا^م)^ط$

$= ا^{مط}$ [بالحالة الأولى]

وبأخذ الجذر القافى لهاتين الكميتين المتساويتين ينتج أن

$(ا^م)^{\frac{ط}{ى}} = \sqrt[ى]{ا^{مط}}$

$= ا^{\frac{مط}{ى}}$ (بند ٢٣٧)

(الحالة الثالثة) نفرض أن م أى عدد كان كما سبق وأن ن أى كمية سالبة فبوضع $-ر$ بدل ن على فرض أن ر كمية موجبة يحدث أن

$(ا^م)^ن = (ا^م)^{-ر} = \frac{١}{(ا^م)^ر}$ (بند ٢٣٩)

$= \frac{١}{ا^{مر}}$ (بالحالة الثانية)

$= ا^{-مر} = ا^{من}$

ومن ذلك نستنتج أن النظرية الثالثة بند ٢٣٥ وهى $(\text{ا}^{م})^{ن} = \text{ا}^{من}$ صحيحة على وجه الاطلاق

(مثـال ١) $\left(\text{ب}^{\frac{٢}{٣}}\right)^{\frac{٦}{٧}} = \text{ب}^{\frac{٢}{٣}\times\frac{٦}{٧}} = \text{ب}^{\frac{٤}{٧}}$

(مثـال ٢) $\{(\text{س}^{-٢})^{١}\}^{-٤} = (\text{س}^{-٦})^{-٤} = \text{س}^{٢٤}$

(مثـال ٣) $\left(\text{س}^{\frac{١}{١-ح}}\right)^{١^{٢}-ح^{٢}} = \text{س}^{\frac{١}{١-ح}\times(١^{٢}-ح^{٢})} = \text{س}^{١+ح}$

بند ٢٤٤ — لاثبات أن $(\text{ا ب})^{ن} = \text{ا}^{ن}\text{ب}^{ن}$ مهما كانت قيمة ن وعلى فرض أن كلا من ا ، ب أى كمية كانت

(الحالة الأولى) نفرض أن ن عدد صحيح موجب

فيكون $(\text{ا ب})^{ن} =$ ا ب × ا ب × ا ب × ا ب ... إلى ن من العوامل

$=$ (ا × ا × ا ... ... إلى ن من العوامل)(ب × ب × ب ... إلى ن من العوامل)

$= \text{ا}^{ن}\text{ب}^{ن}$

(الحالة الثانية) نفرض أن ن كسر موجب . فبوضع $\frac{ط}{ى}$ بدل ن على فرض أن ط ، ى عددان صحيحان موجبان يحدث أن $(\text{ا ب})^{ن} = (\text{ا ب})^{\frac{ط}{ى}}$

ومعلوم أن القوة القافية للقدار $(\text{ا ب})^{\frac{ط}{ى}} = \left[(\text{ا ب})^{\frac{ط}{ى}}\right]^{ى}$

$= (\text{ا ب})^{ط}$ (بند ٢٤٣)

$= \text{ا}^{ط}\text{ب}^{ط}$

$= \left(\text{ا}^{\frac{ط}{ى}} . \text{ب}^{\frac{ط}{ى}}\right)^{ى}$ (الحالة الاولى)

وبأخذ الجذر القافى للطرفين يحدث $(\text{ا ب})^{\frac{ط}{ى}} = \text{ا}^{\frac{ط}{ى}}\text{ب}^{\frac{ط}{ى}}$

(الحالة الثالثة) نفرض أن ن أى كمية سالبة فبوضع $-م$ بدل ن على فرض أن م كمية موجبة

يحدث أن $(\text{ا ب})^{ن} = (\text{ا ب})^{-م} = \frac{١}{(\text{ا ب})^{م}}$

$= \frac{١}{\text{ا}^{م}\text{ب}^{م}} = \text{ا}^{-م}\text{ب}^{-م}$

$= \text{ا}^{ن}\text{ب}^{ن}$

ومن ذلك نستنتج أن هذه النظرية صحيحة على وجه الاطلاق

يمكن التعبير عن نتيجة النظرية السابقة التى برهنا عليها بالعبارة الآتية وهى أس حاصل الضرب يمكن أن يوزع على عوامله

(ملاحظة) أس المقدار الجبرى لايمكن توزيعه على الحدود الداخلة فيه

$\left(ا^{\frac{1}{2}} + ب^{\frac{1}{2}}\right)^{2}$ لا يساوى ا + ب

وأيضا $\left(ا^{2} + ب^{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ يساوى $\sqrt{ا^{2} + ب^{2}}$ ولا يمكن وضعه على صورة أبسط

(مثال ١) $\left(ص\, ع\right)^{1-ح} \left(ع\, س\right)^{ح} \left(س\, ص\right)^{-ح}$

$= ص^{1-ح}\, ع^{1-ح}\, ع^{ح}\, س^{ح}\, س^{-ح}\, ص^{-ح}$

$= ص^{1-2ح}\, ع^{1}$

(مثال ٢) $\left\{(ا - ب)^{ك}\right\}^{-ل} \times \left\{(ا + ب)^{-ك}\right\}^{ل}$

$= (ا - ب)^{-ك\,ل} \times (ا + ب)^{-ك\,ل}$

$= \left\{(ا - ب)\,(ا + ب)\right\}^{-ك\,ل}$

$= \left(ا^{2} - ب^{2}\right)^{-ك\,ل}$

بند ٢٤٥ — يلاحظ أنه فى إثبات ما ذكر فى بند ٢٤٤ اعتبرنا ا ، ب أى كميتين مطلقا وقد يحتمل أن يشتملا هما على أسس

(مثال ١) $\left(س^{\frac{1}{2}} ص^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{3}} \div \left(س^{2} ص^{-1}\right)^{-\frac{1}{3}}$

$= س^{\frac{2}{3}} ص^{-\frac{2}{3}} \div س^{-\frac{2}{3}} ص^{\frac{1}{3}} = س^{\frac{4}{3}} ص^{-1}$

(مثال ٢) $\left(\frac{ا^{\frac{2}{3}} \sqrt{ب^{-1}}}{\sqrt[3]{ب\, ا^{-2}}} \div \sqrt{\frac{ا \sqrt{ب^{-4}}}{ب \sqrt{ا^{-2}}}}\right)^{6}$

$= \left(\frac{ا^{\frac{2}{3}} ب^{-\frac{1}{2}}}{ب\, ا^{-\frac{2}{3}}} \div \sqrt{\frac{ا\, ب^{-2}}{ب\, ا^{-1}}}\right)^{6}$

$= \left(ا^{\frac{4}{3}} ب^{-\frac{3}{2}} \div \sqrt{ا^{2} ب^{-3}}\right)^{6}$

$= \left(ا^{\frac{4}{3}} ب^{-\frac{3}{2}} \div ا\, ب^{-\frac{3}{2}}\right)^{6}$

$= \left(ا^{\frac{1}{3}}\right)^{6} = ا^{2}$

(تمارين ٣٠ ب)

إختصر كلا من المقادير الآتية بحيث تكون الأسس فى النواتج موجبة

(١) $\left(\sqrt{ا^{٢} ب^{٣}}\right)^{٦}$

(٢) $\left(\sqrt[٩]{س^{-٤} ص^{٣}}\right)^{-٣}$

(٣) $(س^{ا} ص^{-ب})^{٣} \times (س^{٣} ص^{٢})^{-١}$

(٤) $\left(\frac{١٦ س^{٢}}{ص^{-٢}}\right)^{-\frac{١}{٤}}$

(٥) $\left(\frac{٢٧ س^{٣}}{٨ ا^{-٣}}\right)^{-\frac{٢}{٣}}$

(٦) $\left(\frac{ا^{-\frac{١}{٢}}}{٤ ح^{٢}}\right)^{-٢}$

(٧) $\left\{\sqrt[٤]{\left(س^{-\frac{٢}{٣}} ص^{\frac{١}{٢}}\right)^{٣}}\right\}^{-\frac{٢}{٣}}$

(٨) $\sqrt[٤]{س \sqrt[٣]{س^{-١}}}$

(٩) $(٤ ا^{-٢} \div ٩ س^{ن})^{-\frac{١}{٢}}$

(١٠) $\left(س \div \sqrt[ن]{س}\right)^{ن}$

(١١) $\left(س \times \sqrt[ن]{س^{-\frac{١}{ن}}}\right)^{\frac{ن^{٢}}{ن-١}}$

(١٢) $\left(\sqrt[ب]{س^{ب}} \div \sqrt[ا]{س}\right)^{\frac{١}{ا-١}}$

(١٣) $\sqrt{ا^{-٢} ب} \times \sqrt[٣]{ا ب^{-٣}}$

(١٤) $\sqrt[٣]{ا ب^{-١} ح^{-٣}} \times (ا^{-١} ب^{-٢} ح^{-٤})^{-\frac{١}{٦}}$

(١٥) $\sqrt[٦]{ا^{٤ب} س^{٢ب}} \times \left(ا^{\frac{٢}{٣}} س^{-١}\right)^{-ب}$

(١٦) $\sqrt[٣]{س^{-١} \sqrt{ص^{٣}}} \div \sqrt{ص \sqrt[٣]{س}}$

(١٧) $\left(ا^{\frac{١}{٢}} \sqrt[٣]{س}\right)^{-٣} \times \sqrt{س^{-٢} \sqrt{ا^{-٦}}}$

(١٨) $\sqrt[ن]{ا^{ن+م} ل^{٢ن-م}} \div \left(ا^{\frac{١}{ن}} ل^{-\frac{١}{ن}}\right)^{م}$

(١٩) $\sqrt[٣]{(ا+ب)^{٩}} \times (ا+ب)^{-\frac{٢}{٣}}$

(٢٠) $\{(س-ص)^{-٣}\}^{ن} \div \{(س+ص)^{ن}\}^{٣}$

(٢١) $\left(\frac{ا^{-١} ب^{-٢}}{ا^{٣} ب^{-٤}}\right)^{-٣} \div \left(\frac{ا ب^{-١}}{ا^{-٣} ب^{٢}}\right)^{٥}$

(٢٢) $\left\{\frac{\sqrt[٣]{ا}}{\sqrt[٤]{ب^{-١}}}\left(\frac{ب^{\frac{١}{٤}}}{ا^{\frac{١}{٣}}}\right)^{٢} \div \frac{ا^{-\frac{١}{٣}}}{ب^{-\frac{١}{٢}}}\right\}^{٦}$

(٢٣) $\left(ا^{-\frac{١}{٢}} س^{\frac{١}{٣}} \sqrt{ا س^{-\frac{١}{٣}} \sqrt[٤]{س^{\frac{٤}{٣}}}}\right)^{\frac{١}{٣}}$

(٢٤) $\sqrt[٤]{(ا+ب)^{٦}} \times (ا^{٢}-ب^{٢})^{-\frac{١}{٢}}$

(٢٥) $\left(\frac{ا^{-٣}}{ب^{-\frac{٢}{٣}} ح}\right)^{-\frac{٣}{٢}} \div \left(\frac{\sqrt[٦]{ا^{-\frac{١}{٣}} \sqrt{ب^{٣}}}}{ا^{٢} ح^{-١}}\right)^{-٢}$

(٢٦) $\left(\frac{ا^{-\frac{٢}{٣}} س^{\frac{١}{٢}}}{س^{-١} ا}\right)^{٢} \div \sqrt[٣]{\frac{ا^{-١}}{س^{-٣}}}$

(٢٧) $\left(\sqrt[٥]{\frac{ا^{\frac{١}{٢}} س^{-٢}}{س^{\frac{١}{٢}} ا^{-٢}}} \times \sqrt[٣]{\frac{ا \sqrt{س}}{س^{-١} \sqrt{ا}}}\right)^{-٤}$

(٢٨) $\frac{\sqrt[٣]{ا^{٣} ب^{٣} + ب^{٦}}}{\sqrt[٣]{(ب^{٦} - ا^{٣} ب^{٣})^{-١}}}$

(٢٩) $\left(ا^{ن^2-1}\right)^{\frac{ن}{ن+1}} + \frac{\sqrt[ن]{ا^{2ن}}}{ا}$

(٣٠) $\left(س^{\frac{ن}{ن+1}}\right)^{ن^2-1} + \frac{\sqrt{س^{2ن}}}{س}$

(٣١) $\left\{\frac{اط - ق}{\sqrt[ق]{اق^2 - طق}} \times ا^2(ط - ق)\right\}^{ن}$

(٣٢) $\left(س^{\frac{1}{ب}} ص^{-1}\right)^{ب} \div \left(\frac{س^{ا^2 - ب^2}}{ص^{اب + ب^2}}\right)^{\frac{1}{ا+ب}}$

(٣٣) $\left(\frac{س^{-2} ص^{3}}{س^{3} ص^{-2}}\right)^{-\frac{1}{5}} \times \left(\frac{ص\, س^{-3}}{س^{3} ص^{-3}}\right)^{-1}$

(٣٤) $\left(\frac{ص^{-3}}{س^{\frac{2}{7}} ع^{-1}}\right)^{\frac{3}{2}} \times \left(\frac{ص^{\frac{14}{3}} س^{-1}}{ع^{-\frac{21}{4}}}\right)^{\frac{2}{7}}$

(٣٥) $\frac{2^{ن} \times (2^{ن-1})^{ن}}{2^{ن+1} \times 2^{ن-1}} \times \frac{1}{4^{-ن}}$

(٣٦) $\frac{2^{ن+1}}{(2^{ن})^{ن-1}} \div \frac{4^{ن+1}}{(2^{ن-1})^{ن+1}}$

(٣٧) $\frac{3 \times 2^{ن} - 4 \times 2^{ن-2}}{2^{ن} - 2^{ن-1}}$

(٣٨) $\frac{3^{ن+4} - 6 \times 3^{ن+1}}{3^{ن+2} \times 7}$

بند ٢٤٦ — من حيث إن قوانين الأسس صحيحة وعامة يمكن حينئــذ إجراء عمليات الضرب . والقسمة واستخراج الجذور والرفع إلى القوى فى المقادير ذات الاسس الكسرية أو السالبة

بند ٢٤٧ — بيّنا فى بند ١٢١ أن القوى التنازلية للحرف س هى

$$\ldots\ldots\ س^{3}،\ س^{2}،\ س،\ 1،\ \frac{1}{س}،\ \frac{1}{س^{2}}،\ \frac{1}{س^{3}} \ldots$$ إلخ

ويمكننا إدراك سبب هذا الترتيب لو وضعنا هذه الحدود على الصورة الآتية

$$س^{3}،\ س^{2}،\ س^{1}،\ س،\ س^{-1}،\ س^{-2}،\ س^{-3}$$ إلخ

(مثـال ١) لضرب $3س^{-\frac{1}{3}} + س + 2س^{\frac{2}{3}}$ فى $س^{\frac{1}{3}} - 2$

نرتب المضروب فيه حسب القوى التنازلية للحرف س

$$\begin{array}{r}
س + 2س^{\frac{2}{3}} + 3س^{-\frac{1}{3}} \\
س^{\frac{1}{3}} - 2 \\
\hline
س^{\frac{4}{3}} + 2س + 3 \\
- 2س - 4س^{\frac{2}{3}} - 6س^{-\frac{1}{3}} \\
\hline
س^{\frac{4}{3}} - 4س^{\frac{2}{3}} + 3 - 6س^{-\frac{1}{3}}
\end{array}$$

(مثال ٢) لقسمة $١٦ أ^{-٣} - ٦ أ^{-٢} + ٥ أ^{-١} + ٦$ على $١ + ٢ أ^{-١}$

نجرى العمل هكذا

$$
\begin{array}{r|l}
١٦ أ^{-٣} - ٦ أ^{-٢} + ٥ أ^{-١} + ٦ & ٢ أ^{-١} + ١ \\
\cline{2-2}
١٦ أ^{-٣} + ٨ أ^{-٢} & ٨ أ^{-٢} - ٧ أ^{-١} + ٦ \\
\cline{1-1}
- ١٤ أ^{-٢} + ٥ أ^{-١} & \\
- ١٤ أ^{-٢} - ٧ أ^{-١} & \\
\cline{1-1}
١٢ أ^{-١} + ٦ & \\
١٢ أ^{-١} + ٦ & \\
\cline{1-1}
\end{array}
$$

(مثال ٣) لايجاد الجذر التربيعى للقدار

$$\frac{٤ س^{٢}}{ص} + \frac{\sqrt{س^{٣}}}{ص^{-\frac{١}{٢}}} - ٢ س + \frac{ص}{٤} + س - ٤ \sqrt{س^{٥} ص^{-١}}$$

نقول إنه بعد حذف علامات الجذور وترتيب المقدار حسب القوى التنازلية للحرف س نجد

$$
\begin{array}{r|l}
س^{٣} - ٤ س^{\frac{٥}{٢}} ص^{-\frac{١}{٢}} + ٤ س^{٢} ص^{-١} + س^{\frac{٣}{٢}} ص^{\frac{١}{٢}} - ٢ س + \frac{ص}{٤} & س^{\frac{٣}{٢}} - ٢ س ص^{-\frac{١}{٢}} + \frac{ص^{\frac{١}{٢}}}{٢} \\
\cline{2-2}
س^{١} & \\
\cline{1-1}
٢ س^{\frac{٣}{٢}} - ٢ س ص^{-\frac{١}{٢}} & - ٤ س^{\frac{٥}{٢}} ص^{-\frac{١}{٢}} + ٤ س ص^{-١} \\
 & - ٤ س^{\frac{٥}{٢}} ص^{-\frac{١}{٢}} + ٤ س ص^{-١} \\
\cline{2-2}
٢ س^{\frac{٣}{٢}} - ٤ س ص^{-\frac{١}{٢}} + \frac{ص^{\frac{١}{٢}}}{٢} & س^{\frac{٣}{٢}} ص^{\frac{١}{٢}} - ٢ س + \frac{ص}{٤} \\
 & س^{\frac{٣}{٢}} ص^{\frac{١}{٢}} - ٢ س + \frac{ص}{٤} \\
\cline{2-2}
\end{array}
$$

(ملاحظة) يلاحظ فى هذا المثال أن استعمال الأسس السالبة يغنى عن استعمال الكسور الجبرية

(تمارين ٣٠ ح)

(١) اضرب $٣ س^{\frac{١}{٣}} - ٥ + ٨ س^{-\frac{١}{٣}}$ فى $٤ س^{\frac{١}{٣}} + ٣ س^{-\frac{١}{٣}}$

(٢) اضرب $٣ أ^{\frac{٣}{٥}} - ٤ أ^{\frac{١}{٥}} - أ^{-\frac{١}{٥}}$ فى $٣ أ^{\frac{١}{٥}} + أ^{-\frac{١}{٥}} - ٦ أ^{-\frac{٣}{٥}}$

(٣) ما حاصل ضرب $ح^{س} + ٢ ح^{-س} - ٧$ فى $٥ - ٣ ح^{-س} + ٢ ح^{س}$

(٤) ما حاصل ضرب $٥ + ٢ س^{١٢} + ٣ س^{-١٢}$ فى $٤ س^{١} - ٣ س^{-١}$

(٥) اقسم $٢١ س + س^{\frac{٢}{٣}} + س^{\frac{١}{٣}} + ١$ على $٣ س^{\frac{١}{٣}} + ١$

(٦) اقسم $١٥ أ - ٣ أ^{\frac{١}{٣}} - ١٢ أ^{-\frac{١}{٣}} + ١٨ أ^{-١}$ على $٥ أ^{\frac{٢}{٣}} + ٤$

(٧) اقسم $١٦ ا^{-٣} + ٦ ا^{-٢} + ٥ ا^{-١} - ٦$ على $٢ ا^{-١} - ١$

(٨) اقسم $٥ ب^{\frac{٢}{٣}} - ٦ ب^{\frac{١}{٣}} - ٤ ب^{-\frac{٢}{٣}} - ٤ ب^{-\frac{١}{٣}} - ٥$ على $ب^{\frac{١}{٦}} - ٢ ب^{-\frac{١}{٦}}$

(٩) اقسم $٢١ ا^{٣س} + ٢٠ - ٢٧ ا^{س} - ٢٦ ا^{٢س}$ على $٣ ا^{س} - ٥$

(١٠) اقسم $٨ ح^{-ن} - ٨ ح^{ن} + ٥ ح^{٣ن} - ٣ ح^{-٣ن}$ على $٥ ح^{ن} - ٣ ح^{-ن}$

ما الجذر التربيعي لكل من المقادير الآتية

(١١) $٩ س - ١٢ س^{\frac{١}{٢}} + ١٠ - ٤ س^{-\frac{١}{٢}} + س^{-١}$

(١٢) $٢٥ ا^{\frac{٤}{٣}} + ١٦ - ٣٠ ا - ٢٤ ا^{\frac{١}{٣}} + ٤٩ ا^{\frac{٢}{٣}}$

(١٣) $٤ س^{ن} + ٩ س^{-ن} + ٢٨ - ٢٤ س^{-\frac{ن}{٢}} - ١٦ س^{\frac{ن}{٢}}$

(١٤) $١٢ ا^{س} + ٤ - ٦ ا^{٣س} + ا^{٤س} + ٥ ا^{٢س}$

(١٥) اضرب $ا^{\frac{٣}{٢}} - ٨ ا^{-\frac{٣}{٢}} + ٤ ا^{-\frac{١}{٢}} - ٢ ا^{\frac{١}{٢}}$ فى $٤ ا^{-\frac{٣}{٢}} + ا^{\frac{١}{٢}} + ٤ ا^{-\frac{١}{٢}}$

(١٦) اضرب $١ - ٢ \sqrt[٣]{س} - ٢ س^{\frac{١}{٢}}$ فى $١ - \sqrt[٦]{س}$

(١٧) اضرب $٢ \sqrt[٣]{ا^{٥}} - ا^{\frac{١}{٣}} - \frac{٣}{ا}$ فى $٢ ا - ٣ \sqrt[٣]{\frac{١}{ا}} - ا^{-\frac{٥}{٣}}$

(١٨) اقسم $\sqrt[٣]{س^{٢}} + ٢ س^{\frac{١}{٣}} - ١٦ س^{-\frac{٢}{٣}} - \frac{٣٢}{س}$ على $س^{\frac{١}{٦}} + ٤ س^{-\frac{١}{٦}} + \frac{٤}{\sqrt{س}}$

(١٩) اقسم $١ - \sqrt{ا} - \frac{٢}{ا - ١} + ٢ ا^{٢}$ على $١ - ا^{\frac{١}{٢}}$

(٢٠) اقسم $٤ \sqrt[٣]{س^{٢}} - ٨ س^{\frac{١}{٣}} - ٥ + \frac{١٠}{\sqrt[٣]{س}} + ٣ س^{-\frac{٢}{٣}}$ على $٢ س^{\frac{٥}{١٢}} - \sqrt[١٢]{س} - \frac{٣}{\sqrt[٤]{س}}$

استخرج الجذر التربيعي لكل من المقادير الآتية

(٢١) $٩ س^{-٤} - ١٨ س^{-٣} \sqrt{ص} + \frac{١٥ ص}{س^{٢}} - ٦ \sqrt{\frac{ص^{٣}}{س^{٢}}} + ص^{٢}$

(٢٢) $٤ \sqrt{س^{٣}} - ١٢ \sqrt[٤]{س^{٣} ص} + ٢٥ \sqrt{ص} - ٢٤ \sqrt[٤]{\frac{ص^{٣}}{س^{٣}}} + ١٦ س^{-\frac{٣}{٢}} ص$

(٢٣) $٨١ \left(\sqrt[٣]{\frac{س^{٤}}{ص^{٢}}} + ١\right) + ٣٦ \frac{س^{\frac{١}{٣}}}{\sqrt{ص}} (س^{\frac{٢}{٣}} ص^{-١} - ١) - ١٥٨ \sqrt[٣]{\frac{س^{٢}}{ص}}$

(٢٤) $\frac{س^{-٢}}{١٦} + ١ + \frac{٩}{\sqrt[٣]{ص^{-٢}}} + \frac{١ - ٣ \sqrt[٣]{ص}}{٢ س} - ٦ \sqrt[٣]{ص}$

بند ٢٤٨ — من الأمثلة الآتية يتضح استعمال القوانين التى مرت بالأبواب السالفة فى المقادير التى تشتمل على أسس كسرية أو سالبة

(مثال ١) $(ا^{\frac{هـ}{ك}} - ب^{\frac{ط}{ن}})(ا^{-\frac{هـ}{ك}} + ب^{-\frac{ط}{ن}}) = ا^{\frac{هـ}{ك}}ا^{-\frac{هـ}{ك}} - ا^{-\frac{هـ}{ك}}ب^{\frac{ط}{ن}} + ا^{\frac{هـ}{ك}}ب^{-\frac{ط}{ن}} - ب^{\frac{ط}{ن}}ب^{-\frac{ط}{ن}}$

$= ١ - ا^{-\frac{هـ}{ك}}ب^{\frac{ط}{ن}} + ا^{\frac{هـ}{ك}}ب^{-\frac{ط}{ن}} - ١$

$= ا^{\frac{هـ}{ك}}ب^{-\frac{ط}{ن}} - ا^{-\frac{هـ}{ك}}ب^{\frac{ط}{ن}}$

(مثال ٢) لضرب $٢س^{٢ط} - س^{ط} + ٣$ فى $٢س^{٢ط} + س^{ط} - ٣$

نقول إن حاصل الضرب $= \{٢س^{٢ط} - (س^{ط} - ٣)\}\{٢س^{٢ط} + (س^{ط} - ٣)\}$

$= (٢س^{٢ط})^{٢} - (س^{ط} - ٣)^{٢}$

$= ٤س^{٤ط} - س^{٢ط} + ٦س^{ط} - ٩$

(مثال ٣) مربع $٣س^{\frac{١}{٢}} - ٢ - س^{-\frac{١}{٢}}$

$= ٩س + ٤ + س^{-١} - ٢\times٣س^{\frac{١}{٢}}\times٢ - ٢\times٣س^{\frac{١}{٢}}\times س^{-\frac{١}{٢}} + ٢\times٢\times س^{-\frac{١}{٢}}$

$= ٩س + ٤ + س^{-١} - ١٢س^{\frac{١}{٢}} - ٦ + ٤س^{-\frac{١}{٢}}$

$= ٩س - ١٢س^{\frac{١}{٢}} - ٢ + ٤س^{-\frac{١}{٢}} + س^{-١}$

وذلك باختصار الحدود المتشابهة ثم ترتيبها

(مثال ٤) لقسمة $ا^{\frac{٣ن}{٢}} + ا^{-\frac{٣ن}{٢}}$ على $ا^{\frac{ن}{٢}} + ا^{-\frac{ن}{٢}}$

نقول إن الخارج $= (ا^{\frac{٣ن}{٢}} + ا^{-\frac{٣ن}{٢}}) \div (ا^{\frac{ن}{٢}} + ا^{-\frac{ن}{٢}})$

$= \{(ا^{\frac{ن}{٢}})^{٣} + (ا^{-\frac{ن}{٢}})^{٣}\} \div (ا^{\frac{ن}{٢}} + ا^{-\frac{ن}{٢}})$

$= (ا^{\frac{ن}{٢}})^{٢} - ا^{\frac{ن}{٢}} \times ا^{-\frac{ن}{٢}} + (ا^{-\frac{ن}{٢}})^{٢}$

$= ا^{ن} - ١ + ا^{-ن}$

(تمارين ٣٠ د)

أكتب قيمة ما يأتى

(١) $(س^{\frac{١}{٢}} - ٧)(س^{\frac{١}{٢}} + ٣)$

(٢) $(٤س - ٥س^{-١})(٤س + ٣س^{-١})$

(٣) $(٧س - ٩ص^{-١})(٧س + ٩ص^{-١})$

(٤) $(س^{م} - ص^{ن})(س^{-م} + ص^{-ن})$

(٥) $\left(ا^{س} - ٢\,ا^{-س}\right)^{٢}$

(٦) $\left(ا^{س} + \frac{١}{ا^{س}}\right)^{٢}$

(٧) $\left(س^{\frac{١}{٢}} - \frac{١}{٢}\,س^{-\frac{١}{٢}}\right)^{٢}$

(٨) $\left(٥\,س^{١}\,ص^{ب} - ٣\,س^{-١}\,ص^{-ب}\right)$
$\left(٤\,س^{١}\,ص^{ب} + ٥\,س^{-١}\,ص^{-ب}\right)$

(٩) $\left(\frac{١}{٣}\,ا^{\frac{١}{٣}} - ا^{-\frac{١}{٣}}\right)^{٢}$

(١٠) $\left(٣\,س^{١}\,ص^{-ب} + ٥\,س^{-١}\,ص^{ب}\right)$
$\left(٣\,س^{١}\,ص^{ب} - ٥\,س^{-١}\,ص^{-ب}\right)$

(١١) $\left(ا^{س} - \frac{١}{٢} - ا^{-س}\right)$

(١٢) $\left(س^{\frac{١}{٢}} - س^{-\frac{١}{٢}} + س\right)$

(١٣) $\left\{(١+ب)^{\frac{١}{٢}} + (١-ب)^{\frac{١}{٢}}\right\}^{٢}$

(١٤) $\left\{(١+ب)^{\frac{١}{٢}} - (١-ب)^{-\frac{١}{٢}}\right\}^{٢}$

اكتب خارج قسمة

(١٥) $س - ٩\,ا$ على $س^{\frac{١}{٢}} + ٣\,ا^{\frac{١}{٢}}$

(١٦) $س^{\frac{٣}{٢}} - ٢٧$ على $س^{\frac{١}{٢}} - ٣$

(١٧) $ا^{٢س} - ١٦$ على $ا^{س} - ٤$

(١٨) $س^{١٣} + ٨$ على $س^{١} + ٢$

(١٩) $ح^{٢س} - ح^{-س}$ على $ح^{س} - ح^{-\frac{س}{٢}}$

(٢٠) $١ - ٨\,ا^{-٣}$ على $١ - ٢\,ا^{-١}$

(٢١) $ا^{٤س} - س$ على $ا^{س} + س^{٣}$

(٢٢) $س^{-٤} - ١$ على $س^{-١} + ١$

(٢٣) $س^{\frac{٥}{٣}} - ١$ على $س^{\frac{١}{٣}} - ١$

(٢٤) $س^{٥ن} + ٣٢$ على $س^{ن} + ٢$

ما قيمة كل من المقادير الآتية

(٢٥) $\left(س + س^{\frac{١}{٢}} - ٤\right)\left(س + س^{\frac{١}{٢}} + ٤\right)$

(٢٦) $\left(٢\,س^{\frac{١}{٣}} + ٤ + ٣\,س^{-\frac{١}{٣}}\right)\left(٢\,س^{\frac{١}{٣}} + ٤ - ٣\,س^{-\frac{١}{٣}}\right)$

(٢٧) $\left(٢ - س^{\frac{١}{٣}} + س\right)\left(٢ + س^{\frac{١}{٣}} + س\right)$

(٢٨) $\left(ا^{س} + ٧ + ٣\,ا^{-س}\right)\left(ا^{س} - ٧ - ٣\,ا^{-س}\right)$

(٢٩) $$\frac{ا^{\frac{٤}{٣}} - ٨\,ا^{\frac{١}{٣}}\,ب}{ا^{\frac{٢}{٣}} + ٢\sqrt[٣]{اب} + ٤\,ب^{\frac{٢}{٣}}}$$

(٣٠) $$\frac{س - ٧\,س^{\frac{١}{٢}}}{س - ٥\sqrt{س} - ١٤} \div \left(١ + \frac{٢}{\sqrt{س}}\right)^{-١}$$

(٣١) $$\frac{س^{\frac{٢}{٣}} - ٤\sqrt[٣]{س^{-٢}}}{\sqrt[٣]{س^{٢}} + ٤ + ٤\,س^{-\frac{٢}{٣}}}$$

(٣٢) $$\frac{ا^{\frac{٣}{٢}} + اب}{اب - ب^{٢}} - \frac{\sqrt{ا}}{\sqrt{ا} - ب}$$

الباب الحادى والثلاثون – مبادئ الجذور الصماء

بند ٢٤٩ – (تعريف) إذا لم يمكن استخراج جذر كمية بالضبط بجذرها يسمى أصم

فمثلا $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt[٣]{٥}$ ، $\sqrt[٥]{أ^٢}$ ، $\sqrt{أ^٢ + ب^٢}$ جذور صماء

وعلى مقتضى ما جاء فى الباب السابق نرى أن هذه الجذور ما هى إلا كميات ذات أسس كسرية لأنه يمكن كتابة الامثلة السابقة هكذا

$$٢^{\frac{١}{٢}} ، ٥^{\frac{١}{٣}} ، أ^{\frac{٣}{٥}} ، (أ^٢ + ب^٢)^{\frac{١}{٢}}$$

ومن حيث إنه يمكن وضع الجذور الصماء على صورة كميات ذات أسس كسرية فاذا أريد ربط هذه الجذور بعضها ببعض فاننا نستعمل نفس القوانين الجبرية التى تسرى على غيرها من الرموز .

بند ٢٥٠ – قد يمكن وضع الكمية على صورة جذر أصم وان لم تكن فى الحقيقة كذلك .

فمثلا $\sqrt[٣]{س^٦}$ أى $س^{\frac{٦}{٣}}$ هو فى الحقيقة $س^٢$ ولو أنه جذر أصم صورة .

بند ٢٥١ – يقال أحيانا للجذور الصماء إنها كميات غير جذرية ويقال للقادير التى ليست بجذور صماء إنها كميات جذرية وذلك على سبيل تمييزها عن الجذور الصماء .

بند ٢٥٢ – علمنا أن الجذور الصماء العددية مثل $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt[٣]{٥}$ لايمكن تقدير قيمتها بالضبط ولكن قد يمكن استخراج هذه القيم بالتقريب وتزداد قربا من الحقيقة بزيادة عدد الأرقام العشرية فى ناتج الجذور .

مثلا $\sqrt{٥} = ٢,٢٣٦٠٦٨$ إلخ

أى ان $\sqrt{٥}$ أكبر من ٢,٢٣٦٠٦ وأصغر من ٢,٢٣٦٠٧ وحينئذ فالخطأ يكون أقل من ٠,٠٠٠٠١ إذا استعملنا إحدى هاتين القيمتين بدل $\sqrt{٥}$ فاذا زدنا الأرقام العشرية ازددنا قربا من الحقيقة .

ويتضح من ذلك أن استعمال الجذور الصماء فى الأمثلة الحسابية ليس محتما أصلا فى الأحوال التى يطلب فيها جواب تقريبى ولكنا سنبرهن فى هذا الباب على قواعد ارتباط الجذور الصماء بعضها ببعض وذلك يمكّننا من استعمال رموز مثل $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt[٣]{٥}$ ، $\sqrt[٤]{أ}$ بمقاديرها الحقيقية لا التقريبية مادامت تلك الرموز على شكلها الجذرى . وفضلا عن ذلك سنرى أنه حتى فى المسائل التى يراد فيها الحصول على ناتج تقريبى يستحسن لتسهيل العمل حفظ الجذور الصماء بشكلها الجذرى وعدم وضع قيمتها الحسابية بدلها إلا فى آخر العملية إذا اقتضى الحال ذلك .

بند ٢٥٣ – يدل على درجة الجذر الأصم دليله فمثلا درجة $\sqrt[٣]{س}$ الثالثة ودرجة $\sqrt[ن]{أ}$ النونية وأكثر الجذور شيوعا الجذور التربيعية مثل $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{أ}$ ، $\sqrt{س + ص}$ ويقال لها أحيانا جذور الدرجة الثانية .

بند ٢٥٤ — يحسن أحيانا أن نضع الكمية الجذرية على صورة جذر أصم ويمكن أن توضع أى كمية جذرية فى صورة جذر أصم بدرجة مّا وذلك برفعها إلى القوة التى جذرها يساوى ذلك الجذر الاصم وإدخال تلك القوة تحت علامة الجذر .

وعلى ذلك يكون $٥ = \sqrt{٢٥} = \sqrt[٣]{١٢٥} = \sqrt[٤]{٦٢٥} = \sqrt[ن]{٥^{ن}}$

، $١ + س = \sqrt{(١+س)^{٢}} = \sqrt[٦]{(١+س)^{٦}} = \sqrt[ن]{(١+س)^{ن}}$

بند ٢٥٥ — يمكن تحويل جذر من درجة مّا إلى جذر من درجة أخرى أو بعبارة أخرى يمكن تحويل جذر بأى دليل إلى جذر آخر بدليل مغاير للأول .

أمثلة

(١) $\sqrt[٣]{٢} = ٢^{\frac{١}{٣}} = ٢^{\frac{٤}{١٢}} = \sqrt[١٢]{٢^{٤}}$ | (٢) $\sqrt[ط]{أ} = أ^{\frac{١}{ط}} = أ^{\frac{ن}{ط ن}} = \sqrt[ط ن]{أ^{ن}}$

بند ٢٥٦ — يمكن تحويل الجذور الصماء المختلفة الدليل وجعل دليلها واحدا وقد يكون ذلك الدليل أى مضاعف لكل من الأدلة المختلفة ولكن قد يختار المضاعف المشترك البسيط غالبا .

(مثال) لتحويل $\sqrt[٤]{أ^{٣}}$ ، $\sqrt[٣]{ب^{٢}}$ ، $\sqrt[٦]{أ^{٥}}$ إلى جذور صماء بأدنى دليل متحد .

نقول إن المضاعف البسيط للأعداد ٤ ، ٣ ، ٦ هو ١٢ وبتحويل جميع هذه الجذور إلى جذور مساوية لها دليلها ١٢ نجدها مساوية للجذور $\sqrt[١٢]{أ^{٩}}$ ، $\sqrt[١٢]{ب^{٨}}$ ، $\sqrt[١٢]{أ^{١٠}}$

بند ٢٥٧ — لترتيب الجذور المختلفة الأدلة حسب مقاديرها يلزم أولا تحويلها إلى جذور ذات دليل واحد

(مثلا) لترتيب $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt[٣]{٦}$ ، $\sqrt[٤]{١٠}$ حسب مقاديرها

نقول إن المضاعف البسيط المشترك للأعداد ٢ ، ٣ ، ٤ هو ١٢ وبتحويل الثلاثة إلى جذور دليلها ١٢ نجد أن

$$\sqrt{٣} = \sqrt[١٢]{٣^{٦}} = \sqrt[١٢]{٧٢٩}$$

$$\sqrt[٣]{٦} = \sqrt[١٢]{٦^{٤}} = \sqrt[١٢]{١٢٩٦}$$

$$\sqrt[٤]{١٠} = \sqrt[١٢]{١٠^{٣}} = \sqrt[١٢]{١٠٠٠}$$

فيكون إذن ترتيبها التصاعدى حسب مقاديرها هو $\sqrt{٣}$ ثم $\sqrt[٤]{١٠}$ ثم $\sqrt[٣]{٦}$

(تمارين ١٣١ أ)

ضع كلا من المقادير الآتية على صورة جذر دليله ١٢ بأس موجب

(١) $س^{\frac{١}{٣}}$

(٢) $أ^{-١} \div أ^{-\frac{١}{٢}}$

(٣) $\sqrt[٤]{أ س^{٣}} \times \sqrt[٣]{أ^{-١} س^{-٢}}$

(٤) $\frac{١}{أ^{-\frac{٣}{٤}}}$

(٥) $\frac{١}{\sqrt[٨]{أ^{-١٤}}}$

(٦) $\sqrt[٦]{\frac{١}{أ^{-٢}}}$

ضع كلا من المقادير الآتية على صورة جذر دليله ن بأس موجب

(٧) $\sqrt[٣]{س^{٢}}$

(٨) $س^{ا}$

(٩) $ا^{\frac{١}{٢}}$

(١٠) $\sqrt{ا^{-\frac{١}{ن}}}$

(١١) $\sqrt[٣]{س^{ن} ص^{\frac{١}{ن}}}$

(١٢) $ا^{\frac{١}{ا-١}}$

(١٣) $\frac{س^{-\frac{١}{٢}}}{ص^{٢}}$

(١٤) $\frac{ا^{\frac{١}{٢}}}{س^{-ن}}$

ضع المقادير الآتية على صورة جذور بأدنى دليل متحد

(١٥) $\sqrt{ا}$ ، $\sqrt[٩]{ا^{٥}}$

(١٦) $\sqrt[٥]{ا^{٣}}$ ، $\sqrt{ا}$

(١٧) $\sqrt[٨]{س^{٣}}$ ، $\sqrt[٩]{س^{٦}}$ ، $\sqrt[٢٠]{س^{٥}}$

(١٨) $\sqrt[١٦]{س^{٤}}$ ، $\sqrt[١٢]{س^{١٠}}$

(١٩) $\sqrt[٢١]{ا^{٣} ب^{٤}}$ ، $\sqrt[٧]{ا ب}$

(٢٠) $\sqrt{ا س^{٢}}$ ، $\sqrt[٣٩]{ا^{٩١} س^{٦٠}}$

(٢١) $\sqrt{٥}$ ، $\sqrt[٣]{١١}$ ، $\sqrt[٦]{١٣}$

(٢٢) $\sqrt[٤]{٨}$ ، $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt[٨]{٦}$

(٢٣) $\sqrt[٣]{٢}$ ، $\sqrt[٩]{٨}$ ، $\sqrt[٦]{٤}$

بند **٢٥٨** — جذر أى مقدار يساوى حاصل ضرب جذور عوامله

لأن $\sqrt[ن]{ا ب} = (ا ب)^{\frac{١}{ن}}$

$= ا^{\frac{١}{ن}} . ب^{\frac{١}{ن}}$ .... بند ٢٤٤

$= \sqrt[ن]{ا} . \sqrt[ن]{ب}$

وأيضا $\sqrt[ن]{ا ب ح} = \sqrt[ن]{ا} . \sqrt[ن]{ب} . \sqrt[ن]{ح}$

وهكذا مهما بلغ عدد العوامل

(مثال ١) $\sqrt[٤]{١٥} = \sqrt[٤]{٣} . \sqrt[٤]{٥}$

(مثال ٢) $\sqrt[٣]{ا^{٦} ب} = \sqrt[٣]{ا^{٦}} . \sqrt[٣]{ب} = ا^{٢} \sqrt[٣]{ب}$

(مثال ٣) $\sqrt{٥٠} = \sqrt{٢٥} . \sqrt{٢} = ٥ \sqrt{٢}$

من الأمثلة المتقدمة يظهر أنه يمكن أحيانا وضع الجذر الأصم على صورة حاصل ضرب كمية جذرية فى جذر أصم

واذا حول الجذر الأصم إلى هذه الصورة يقال إنه حول إلى أبسط صوره

فأبسط شكل للمقدار $\sqrt{١٢٨}$ إذن $٨\sqrt{٢}$

وبالعكس يمكن إدخال معامل الجذر الأصم تحت علامة الجذر بوضعه أولا على صورة جذر أصم ثم ضرب الجذرين الأصمين أحدهما فى الاخر

(مثال ١) $٧\sqrt{٥} = \sqrt{٤٩} \times \sqrt{٥} = \sqrt{٢٤٥}$

(« ٢) $أ\sqrt[٨]{ب} = \sqrt[٨]{أ^{٨}} \cdot \sqrt[٨]{ب} = \sqrt[٨]{أ^{٨}ب}$

إذا حوّل الجذر الأصم إلى هذه الصورة سمى الناتج جذرا أصم محضا

بند ٢٥٩ — الجذور الصماء التى يكون أو يمكن أن يكون بينها عامل غير جذرى مشترك يسمى متشابهة وإلا سميت غير متشابهة

فمثلا $٥\sqrt{٣}$ ، $٢\sqrt{٣}$ ، $\frac{١}{٥}\sqrt{٣}$ جذور صماء متشابهة

أما $٣\sqrt{٢}$ ، $٢\sqrt{٣}$ فغير متشابهة

وكذلك $٣\sqrt{٢٠}$ ، $٤\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{\frac{١}{٥}}$ متشابهة

لأن $٣\sqrt{٢٠} = ٣\sqrt{٤} \times \sqrt{٥} = ٣ \times ٢\sqrt{٥} = ٦\sqrt{٥}$

، $\sqrt{\frac{١}{٥}} = \sqrt{\frac{٥}{٢٥}} = \frac{١}{٥}\sqrt{٥}$

بند ٢٦٠ — يلزم لجمع الجذور الصماء المتشابهة أن توضع أولا فى أبسط صورة ثم يجعل مجموع معاملات المقدار الجذرى المشترك بينها معاملا لهذا المقدار الأصم المشترك فيها

(مثال ١) لجمع $٣\sqrt{٢٠}$ ، $٤\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{\frac{١}{٥}}$

نقول إن حاصل الجمع $= ٦\sqrt{٥} + ٤\sqrt{٥} + \frac{١}{٥}\sqrt{٥}$

$= \frac{٥١}{٥}\sqrt{٥}$

(مثال ٢) حاصل جمع $س\sqrt[٣]{٨س^{٣}أ} + ص\sqrt[٣]{-ص^{٣}أ} - ع\sqrt[٣]{ع^{٣}أ}$

$= س \times ٢س\sqrt[٣]{أ} + ص(-ص)\sqrt[٣]{أ} - ع \times ع\sqrt[٣]{أ}$

$= (٢س^{٢} - ص^{٢} - ع^{٢})\sqrt[٣]{أ}$

بند ٢٦١ — لا يمكن اختصار الجذور الصماء غير المتشابهة

فمثلا لا يمكن أن يوضع حاصل جمع $٥\sqrt{٢}$ ، $-٢\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٦}$ فى صورة أبسط من $٥\sqrt{٢} - ٢\sqrt{٣} + \sqrt{٦}$

(تمارين ٣١ ب)

حوّل كلا من المقادير الآتية إلى أبسط صورة

(١) $\sqrt{٢٨٨}$	(٣) $\sqrt[٣]{٢٥٦}$	(٥) $٣\sqrt{١٥٠}$
(٢) $\sqrt{١٤٧}$	(٤) $\sqrt{٤٣٢}$	(٦) $٢\sqrt{٧٢٠}$

(٧) $٥\sqrt{٢٤٥}$

(٨) $\sqrt[٣]{١٠٢٩}$

(٩) $\sqrt[٤]{٣١٢٥}$

(١٠) $\sqrt[٣]{-٢١٨٧}$

(١١) $\sqrt{٣٦أ^{٣}}$

(١٢) $\sqrt{٢٧أ^{٣}ب^{٥}}$

(١٣) $\sqrt[٣]{-١٠٨ س^{٤} ص^{٣}}$

(١٤) $\sqrt[ن]{س^{٣ن} ص^{٢ن+٥}}$

(١٥) $\sqrt[ط]{س^{أ+ط} ص^{٢ط}}$

(١٦) $\sqrt{أ^{٣}+٢أ^{٢}ب+أب^{٢}}$

(١٧) $\sqrt[٣]{٨ س^{٤} ص - ٢٤ س^{٣} ص^{٢} + ٢٤ س^{٢} ص^{٣} - ٨ س ص^{٤}}$

حوّل كلا من المقادير الآتية إلى جذر أصم محض

(١٨) $١١\sqrt{٢}$

(١٩) $١٤\sqrt{٥}$

(٢٠) $٦\sqrt[٣]{٤}$

(٢١) $٥\sqrt[٣]{٦}$

(٢٢) $\frac{٤}{١١}\sqrt{\frac{٧٧}{٨}}$

(٢٣) $\frac{٣أب}{٢ح}\sqrt{\frac{٢٠ح^{٢}}{٩أ^{٢}ب}}$

(٢٤) $\frac{٣س}{ص}\sqrt{\frac{٢أص^{٣}}{س^{٢}}}$

(٢٥) $\frac{أ}{س^{٢}}\sqrt{\frac{٣س^{٣}}{أ}}$

(٢٦) $\frac{٢أ}{٣س}\sqrt[٣]{\frac{٢٧س^{٤}}{أ}}$

(٢٧) $\frac{٢أ}{ب}\sqrt[٤]{\frac{ب^{٤}}{٨أ^{٣}}}$

(٢٨) $أ\sqrt[ن]{\frac{ب}{أ^{ن-٢}}}$

(٢٩) $\frac{أ}{ب}\sqrt[ط]{\frac{ب^{ط+١}}{أ^{ط-١}}}$

(٣٠) $\frac{ص}{س^{ن}}\sqrt{\frac{س^{٢ن+١}}{ص^{٣}}}$

(٣١) $(س+ص)\sqrt{\frac{س-ص}{س+ص}}$

(٣٢) $\frac{أ س}{أ-س}\sqrt{\frac{أ^{٢}-س^{٢}}{أ^{٢} س^{٢}}}$

أوجد قيمة كل من المقادير الآتية

(٣٣) $٣\sqrt{٤٥} - \sqrt{٢٠} + ٧\sqrt{٥}$

(٣٤) $٤\sqrt{٦٣} + ٥\sqrt{٧} - ٨\sqrt{٢٨}$

(٣٥) $\sqrt{٤٤} - ٥\sqrt{١٧٦} + ٢\sqrt{٩٩}$

(٣٦) $٢\sqrt{٣٦٣} - ٥\sqrt{٢٤٣} + \sqrt{١٩٢}$

(٣٧) $٢\sqrt[٣]{١٨٩} + ٣\sqrt[٣]{٨٧٥} - ٧\sqrt[٣]{٥٦}$

(٣٨) $٥\sqrt[٣]{-٨١} - ٧\sqrt[٣]{١٩٢} + ٤\sqrt[٣]{٦٤٨}$

(٣٩) $٣\sqrt[٤]{١٦٢} - ٧\sqrt[٤]{٣٢} + \sqrt[٤]{١٢٥٠}$

(٤٠) $٥\sqrt[٣]{-٥٤} - ٢\sqrt[٣]{-١٦} + ٤\sqrt[٣]{٦٨٦}$

(٤١) $٤\sqrt{١٢٨} + ٤\sqrt{٧٥} - ٥\sqrt{١٦٢}$

(٤٢) $٥\sqrt{٢٤} - ٢\sqrt{٥٤} - \sqrt{٦}$

(٤٣) $\sqrt{٢٥٢} - \sqrt{٢٩٤} - ٤٨\sqrt{\frac{١}{٦}}$

(٤٤) $٣\sqrt{١٤٧} - \frac{٧}{٣}\sqrt{\frac{١}{٣}} - \sqrt{\frac{١}{٢٧}}$

بند ٢٦٢ — (قاعدة) لضرب جذرين متحدى الدليل نضرب العوامل غير الجذرية بعضها فى بعض والعوامل الجذرية بعضها فى بعض كل على انفراد

لأن $\text{ا}\sqrt[\text{ن}]{\text{س}} \times \text{ب}\sqrt[\text{ن}]{\text{ص}} = \text{ا س}^{\frac{1}{\text{ن}}} \times \text{ب ص}^{\frac{1}{\text{ن}}}$

$= \text{ا ب س}^{\frac{1}{\text{ن}}}\ \text{ص}^{\frac{1}{\text{ن}}}$

$= \text{ا ب}\ (\text{س ص})^{\frac{1}{\text{ن}}}$

$= \text{ا ب}\sqrt[\text{ن}]{\text{س ص}}$

(مثال ١) $٥\sqrt{٣} \times ٣\sqrt{٧} = ١٥\sqrt{٢١}$

(مثال ٢) $٢\sqrt{\text{س}} \times ٣\sqrt{\text{س}} = ٦\ \text{س}$

(مثال ٣) $\sqrt[٤]{\text{ا}+\text{ب}} \times \sqrt[٤]{\text{ا}-\text{ب}} = \sqrt[٤]{(\text{ا}+\text{ب})(\text{ا}-\text{ب})} = \sqrt[٤]{\text{ا}^{٢} - \text{ب}^{٢}}$

بند ٢٦٣ — إذا لم تكن الجذور بأبسط صورها يستحسن أن تحول إلى أبسط صورها قبل الضرب فان ذلك يسهل العمل كثيرا

(مثال) حاصل ضرب $٥\sqrt{٣٢}$ فى $\sqrt{٤٨}$ فى $٢\sqrt{٥٤}$

$= ٥ \times ٤\sqrt{٢} \times ٤\sqrt{٣} \times ٢ \times ٣\sqrt{٦} = ٤٨٠\sqrt{٢} \times \sqrt{٣} \times \sqrt{٦} = ٤٨٠ \times ٦ = ٢٨٨٠$

بند ٢٦٤ — إذا أريد ضرب جذور مختلفة الدليل تحوّل أوّلا إلى جذور معادلة لها فى القيمة ومتحدة الدليل ثم يتبع ما جاء فى ضرب الجذور المتحدة الدليل

(مثال) لضرب $٥\sqrt[٣]{٢}$ فى $٢\sqrt{٥}$

نقول إن حاصل الضرب $= ٥\sqrt[٦]{٢} \times ٢\sqrt[٦]{٥^{٣}} = ١٠\sqrt[٦]{٢^{٢} \times ٥^{٣}} = ١٠\sqrt[٦]{٥٠٠}$

بند ٢٦٥ — إذا أريد إيجاد المقدار العددى لخارج قسمة $\sqrt{٥}$ على $\sqrt{٧}$ فأوّل مايسبق إلى الذهن أن يستخرج $\sqrt{٥}$ وهو ...... ٢٫٢٣٦ ثم $\sqrt{٧}$ وهو ...... ٢٫٦٤٥ ثم يقسم ...... ٢٫٢٣٦ على ...... ٢٫٦٤٥ وتلك ثلاث عمليات مملة فلتسهيل العمل نضرب كلا من البسط والمقام الناتجين من وضع المقسوم والمقسوم عليه على صورة كسر فى $\sqrt{٧}$ وذلك لجعل المقام مقدارا جذريا هكذا

$$\frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٧}} = \frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٧}} \times \frac{\sqrt{٧}}{\sqrt{٧}} = \frac{\sqrt{٥ \times ٧}}{٧} = \frac{\sqrt{٣٥}}{٧}$$

ونعلم أن $\sqrt{٣٥} = ٥٫٩١٦......$

$$\therefore \frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٧}} = \frac{٥٫٩١٦}{٧} = ...٠٫٨٤٥$$

بند ٢٦٦ — فائدة الطريقة المبينة بالبند السابق عظيمة جدّا ولذلك لا يقصر استعمالها على الأحوال التى يكون مطلوبا فيها إيجاد المقادير العددية للجذور الكسرية بل قد تستعمل أيضا فى حالة ما إذا كانت بسوط الكسور ومقاماتها حروفا لا أرقاما ولم يطلب إيجاد قيمتها العددية

فمن المصطلح عليه أن تختزل $\frac{أ\sqrt{ب}}{\sqrt{ح}}$ هكذا

$$\frac{أ\sqrt{ب}}{\sqrt{ح}} = \frac{أ\sqrt{ب}\times\sqrt{ح}}{\sqrt{ح}\times\sqrt{ح}} = \frac{أ\sqrt{ب ح}}{ح}$$

الطريقة المتبعة فى محو الجذور الصماء من مقامات الكسور تسمى طريقة جعل المقامات جذرية وذلك بضرب كل من البسط والمقام فى أى عامل يجعل المقام مقدارا جذريا وسنعود إلى هذه النقطة فى بند ٢٧٠

بند ٢٦٧ — لايجاد خارج قسمة جذر أصم على جذر أصم آخر نضعهما أولا على صورة كسر ثم نحول المقام ونجعله مقدارا جذريا

(مثال ١) لقسمة $٤\sqrt{٧٥}$ على $٢٥\sqrt{٥٦}$

نقول إن الخارج $= \frac{٤\sqrt{٧٥}}{٢٥\sqrt{٥٦}} = \frac{٤\times ٥\sqrt{٣}}{٢٥\times ٢\sqrt{١٤}} = \frac{٢\sqrt{٣}}{٥\sqrt{١٤}}$

$$= \frac{٢\sqrt{٣}\times\sqrt{١٤}}{٥\sqrt{١٤}\times\sqrt{١٤}} = \frac{٢\sqrt{٤٢}}{٥\times ١٤} = \frac{\sqrt{٤٢}}{٣٥}$$

(مثال ٢) $\frac{\sqrt[٣]{ب}}{\sqrt[٣]{ح^٢}} = \frac{\sqrt[٣]{ب}\times\sqrt[٣]{ح}}{\sqrt[٣]{ح^٢}\times\sqrt[٣]{ح}} = \frac{\sqrt[٣]{ب ح}}{\sqrt[٣]{ح^٣}} = \frac{\sqrt[٣]{ب ح}}{ح}$

(تمارين ٣١ ح)

أوجد قيمة كل من المقادير الاتية

(١) $٢\sqrt{١٤}\times\sqrt{٢١}$

(٢) $٣\sqrt{٨}\times\sqrt{٦}$

(٣) $٥\sqrt{١}\times ٢\sqrt{٣}$

(٤) $٢\sqrt{١٥}\times ٣\sqrt{٥}$

(٥) $٨\sqrt{١٢}\times ٣\sqrt{٢٤}$

(٦) $\sqrt[٣]{س+٢}\times\sqrt[٣]{س-٢}$

(٧) $٢١\sqrt{٣٨٤}\div ٨\sqrt{٩٨}$

(٨) $٥\sqrt{٢٧}\div ٣\sqrt{٢٤}$

(٩) $-١٣\sqrt{١٢٥}\div ٥\sqrt{٦٥}$

(١٠) $\sqrt[٣]{١٦٨}\times\sqrt[٣]{١٤٧}$

(١١) $٥\sqrt[٣]{١٢٨}\times ٢\sqrt[٣]{٤٣٢}$

(١٢) $٦\sqrt{١٤}\div ٢\sqrt{٢١}$

(١٣) $١\sqrt{\frac{٣}{ب}}\times ب^{٢}\sqrt{أ}$

(١٤) $\frac{٣\sqrt{١١}}{٢\sqrt{٩٨}}\div\frac{٥}{٧\sqrt{٢٢}}$

(١٥) $\frac{٣\sqrt{٤٨}}{٥\sqrt{١١٢}}\div\frac{٦\sqrt{٤٨}}{\sqrt{٣٩٢}}$

(١٦) $\frac{٣}{س}\sqrt{\frac{أ^٢}{س}}\times\frac{٤}{٣}\sqrt{\frac{س^٣}{٢أ^٤}}$

(١٧) $\frac{٣}{أ-ب}\sqrt{\frac{٢٠ س}{أ-ب}}\div\sqrt{\frac{١٨ س^٣}{(أ-ب)^٥}}$

إذا علم أن $\sqrt{٢} = ١,٤١٤٢١$ ، $\sqrt{٣} = ١,٧٣٢٠٥$ ، $\sqrt{٥} = ٢,٢٣٦٠٧$ ، $\sqrt{٦} = ٢,٤٤٩٤٩$ ، $\sqrt{٧} = ٢,٦٤٥٧٥$

فأوجد قيمة كل من المقادير الآتية بحيث يشتمل كل ناتج على ٤ أرقام عشرية

(١٨) $\frac{\text{١٤}}{\sqrt{\text{٢}}}$	(٢٢) $\frac{\text{٦٠}}{\sqrt{\text{٥}}}$	(٢٦) $\frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٥٠٠}}}$
(١٩) $\frac{\text{٢٥}}{\sqrt{\text{٥}}}$	(٢٣) $\text{١٤٤} \div \sqrt{\text{٦}}$	(٢٧) $\frac{\text{٤}}{\sqrt{\text{٢٤٣}}}$
(٢٠) $\frac{\text{١٠}}{\sqrt{\text{٧}}}$	(٢٤) $\sqrt{\text{٢}} \div \sqrt{\text{٣}}$	(٢٨) $\frac{\text{٢٥}}{\sqrt{\text{٢٥٢}}}$
(٢١) $\frac{\text{٤٨}}{\sqrt{\text{٦}}}$	(٢٥) $\frac{\text{١}}{\text{٢}\sqrt{\text{٣}}}$	(٢٩) $\sqrt{\frac{\text{٢٥٦}}{\text{١٥٧٥}}}$

بند ٢٦٨ — قصرنا البحث إلى الآن على الجذور البسيطة مثل $\sqrt[\text{٤}]{\text{٥}}$ ، $\sqrt[\text{٣}]{\text{أ}}$ ، $\sqrt{\text{س} + \text{ص}}$ فاذا تركب المقدار من جذرين أصمين بسيطين أو أكثر يسمى جذرا أصم مركبا وبناء على ذلك يكون المقداران

$\text{٢}\sqrt{\text{أ}} - \text{٣}\sqrt{\text{ب}}$ ، $\sqrt[\text{٣}]{\text{أ}} + \sqrt[\text{٤}]{\text{ب}}$ جذرين أصمين مركبين

بند ٢٦٩ — قاعدة ضرب الجذور الصماء المركبة هى عين قاعدة ضرب المقادير الجبرية المركبة

(مثال ١) لضرب $\text{٢}\sqrt{\text{س}} - \text{٥}$ فى $\text{٣}\sqrt{\text{س}}$

نقول إن حاصل الضرب $= \text{٣}\sqrt{\text{س}}\,(\text{٢}\sqrt{\text{س}} - \text{٥}) = \text{٦}\,\text{س} - \text{١٥}\sqrt{\text{س}}$

(مثال ٢) لضرب $\text{٢}\sqrt{\text{٥}} + \text{٣}\sqrt{\text{س}}$ فى $\sqrt{\text{٥}} - \sqrt{\text{س}}$

نقول إن حاصل الضرب $= (\text{٢}\sqrt{\text{٥}} + \text{٣}\sqrt{\text{س}})\,(\sqrt{\text{٥}} - \sqrt{\text{س}})$

$$= \text{٢}\sqrt{\text{٥}} \times \sqrt{\text{٥}} + \text{٣}\sqrt{\text{٥}} \times \sqrt{\text{س}} - \text{٢}\sqrt{\text{٥}} \times \sqrt{\text{س}} - \text{٣}\sqrt{\text{س}} \times \sqrt{\text{س}}$$

$$= \text{١٠} - \text{٣}\,\text{س} + \sqrt{\text{٥}\,\text{س}}$$

(مثال ٣) لإيجاد مربع $\text{٢}\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{٧} - \text{٤}\,\text{س}}$

نقول إن $(\text{٢}\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{٧} - \text{٤}\,\text{س}})^{\text{٢}} = (\text{٢}\sqrt{\text{س}})^{\text{٢}} + (\sqrt{\text{٧} - \text{٤}\,\text{س}})^{\text{٢}} + \text{٤}\sqrt{\text{س}} \cdot \sqrt{\text{٧} - \text{٤}\,\text{س}}$

$$= \text{٤}\,\text{س} + \text{٧} - \text{٤}\,\text{س} + \text{٤}\sqrt{\text{٧}\,\text{س} - \text{٤}\,\text{س}^{\text{٢}}}$$

$$= \text{٧} + \text{٤}\sqrt{\text{٧}\,\text{س} - \text{٤}\,\text{س}^{\text{٢}}}$$

(تمارين ٣١ ء)

أوجد قيمة

(١) $(\text{٣}\sqrt{\text{س}} - \text{٥}) \times \text{٢}\sqrt{\text{س}}$

(٢) $(\sqrt{\text{س}} - \sqrt{\text{أ}}) \times \text{٢}\sqrt{\text{س}}$

(٣) $(\sqrt{\text{أ}} + \sqrt{\text{ب}}) \times \sqrt{\text{أ}\,\text{ب}}$

(٤) $(\sqrt{\text{س} + \text{ص}} - \text{١}) \times \sqrt{\text{س} + \text{ص}}$

(٥) $(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})^2$

(٦) $(\sqrt{7}+5\sqrt{3})(2\sqrt{7}-4\sqrt{3})$

(٧) $(3\sqrt{5}-4\sqrt{2})(2\sqrt{5}+3\sqrt{2})$

(٨) $(3\sqrt{\text{ا}}-2\sqrt{\text{س}})(2\sqrt{\text{ا}}+3\sqrt{\text{س}})$

(٩) $(\sqrt{\text{س}}+\sqrt{\text{س}-1})\times\sqrt{\text{س}-1}$

(١٠) $(\sqrt{\text{س}+1}-\sqrt{\text{س}-1})\times\sqrt{\text{س}+1}$

(١١) $(\sqrt{\text{ا}+\text{س}}-2\sqrt{\text{ا}})^2$

(١٢) $(2\sqrt{\text{ا}}-\sqrt{1+4\text{ا}})^2$

(١٣) $(\sqrt{1+\text{س}}-\sqrt{1-\text{س}})^2$

(١٤) $(\sqrt{1+\text{س}}-2)(\sqrt{1+\text{س}}-1)$

(١٥) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})$

(١٦) $(\sqrt{5}+3\sqrt{2}+\sqrt{7})(\sqrt{5}+3\sqrt{2}-\sqrt{7})$

أكتب مربع

(١٧) $\sqrt{2\text{س}+1}-\sqrt{2\text{س}-1}$

(١٨) $\sqrt{\text{س}^2-2\text{ص}^2}+\sqrt{\text{س}^2+2\text{ص}^2}$

(١٩) $\sqrt{\text{م}+\text{ن}}+\sqrt{\text{م}-\text{ن}}$

(٢٠) $3\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}-2\sqrt{\text{ا}^2-\text{ب}^2}$

(٢١) $3\text{س}\sqrt{2}-3\sqrt{7-2\text{س}^2}$

(٢٢) $\sqrt{4\text{س}^2+1}-\sqrt{4\text{س}^2-1}$

بند ٢٧٠ — هناك حالة من حالات ضرب الجذور المركبة جديرة بالعناية فانا إذا ضربنا مجموع جذرين أصمين تربيعيين فى فرقهما يكون الناتج كمية جذرية

(مثال ١) $(\sqrt{\text{ا}}+\sqrt{\text{ب}})(\sqrt{\text{ا}}-\sqrt{\text{ب}})=(\sqrt{\text{ا}})^2-(\sqrt{\text{ب}})^2=\text{ا}-\text{ب}$

(مثال ٢) $(3\sqrt{5}+4\sqrt{3})(3\sqrt{5}-4\sqrt{3})=(3\sqrt{5})^2-(4\sqrt{3})^2=45-48=-3$

وكذا $(4+\sqrt{\text{ا}+\text{ب}})(4-\sqrt{\text{ا}+\text{ب}})=(4)^2-(\sqrt{\text{ا}+\text{ب}})^2=16-\text{ا}-\text{ب}$

بند ٢٧١ — (تعريف) إذا اختلف جذران أصمان مركب كل منهما من جذرين تربيعيين فى العلامة التى تربط حدى كل منهما فقط فانهما يسميان مترافقين

فمثلا $3\sqrt{7}+5\sqrt{11}$ مترافق مع $3\sqrt{7}-5\sqrt{11}$

وكذا $\text{ا}-\sqrt{\text{ا}^2-\text{س}^2}$ مترافق مع $\text{ا}+\sqrt{\text{ا}^2-\text{س}^2}$

حاصل ضرب أى جذرين أصمين مترافقين كمية جذرية (بند ٢٧٠)

(مثال) $(3\sqrt{\text{ا}}+\sqrt{\text{س}-9\text{ا}})\times(3\sqrt{\text{ا}}-\sqrt{\text{س}-9\text{ا}})$

$=(3\sqrt{\text{ا}})^2-(\sqrt{\text{س}-9\text{ا}})^2=9\text{ا}-(\text{س}-9\text{ا})=18\text{ا}-\text{س}$

بند ٢٧٢ — الحالة الوحيدة لقسمة الجذور الصماء المركبة التى سنبحث فيها هنا هى التى يكون فيها المقسوم عليه جذرا أصم مركبا من جذرين تربيعيين لأنا إذا وضعنا كلا من المقسوم والمقسوم عليه فى صورة كسر فمن السهل تحويل المقام إلى كمية جذرية بضرب كل من البسط والمقام فى مرافق المقسوم عليه

(مثال ١) لقسمة $٤ + ٣\sqrt{٢}$ على $٥ - ٣\sqrt{٢}$

نقول إن الخارج $= \dfrac{٤ + ٣\sqrt{٢}}{٥ - ٣\sqrt{٢}}$

$$= \frac{٤ + ٣\sqrt{٢}}{٥ - ٣\sqrt{٢}} \times \frac{٥ + ٣\sqrt{٢}}{٥ + ٣\sqrt{٢}}$$

$$= \frac{٢٠ + ١٨ + ١٢\sqrt{٢} + ١٥\sqrt{٢}}{٢٥ - ١٨}$$

$$= \frac{٣٨ + ٢٧\sqrt{٢}}{٧}$$

(مثال ٢) لتحويل مقام الكسر $\dfrac{ب^٢}{\sqrt{١^٢ + ب^٢} + ١}$ إلى كمية جذرية

نقول إن المقدار $= \dfrac{ب^٢}{\sqrt{١^٢ + ب^٢} + ١} \times \dfrac{\sqrt{١^٢ + ب^٢} - ١}{\sqrt{١^٢ + ب^٢} - ١}$

$$= \frac{ب^٢ \left\{ \sqrt{١^٢ + ب^٢} - ١ \right\}}{(١^٢ + ب^٢) - ١^٢}$$

$$= \sqrt{١^٢ + ب^٢} - ١$$

(مثال ٣) لقسمة $\dfrac{\sqrt{٣} + \sqrt{٢}}{٢ - \sqrt{٣}}$ على $\dfrac{٧ + ٤\sqrt{٣}}{\sqrt{٣} - \sqrt{٢}}$

نقول إن خارج القسمة $= \dfrac{\sqrt{٣} + \sqrt{٢}}{٢ - \sqrt{٣}} \times \dfrac{\sqrt{٣} - \sqrt{٢}}{٧ + ٤\sqrt{٣}}$

$$= \frac{(\sqrt{٣})^٢ - (\sqrt{٢})^٢}{١٤ - ١٢ + ٨\sqrt{٣} - ٧\sqrt{٣}}$$

$$= \frac{١}{٢ + \sqrt{٣}}$$

$= ٢ - \sqrt{٣}$ وذلك بتحويل المقام الأخير إلى كمية جذرية .

(مثال ٤) إذا علم أن $\sqrt{5} = 2{,}236068$ فأوجد قيمة $\dfrac{87}{7 - 2\sqrt{5}}$

لذلك نقول إنه بتجريد المقام من الجذر يحدث $\dfrac{87}{7-2\sqrt{5}} = \dfrac{87\,(7+2\sqrt{5})}{49-20}$.

$$= 3\,(7 + 2\sqrt{5})$$

$$= 34{,}416408$$

نرى أنه بتحويل المقام الأخير إلى كمية جذرية قد تجنبنا إجراء عملية قسمة فيها المقسوم عليه مكوّن من سبعة أرقام عشرية

(تمارين ٣١ هـ)

أوجد قيمة كل من المقادير الآتية

(١) $(9\sqrt{2} - 7)\,(9\sqrt{2} + 7)$

(٢) $(3 + 5\sqrt{7})\,(3 - 5\sqrt{7})$

(٣) $(5\sqrt{8} - 2\sqrt{7})\,(5\sqrt{8} + 2\sqrt{7})$

(٤) $(2\sqrt{11} + 5\sqrt{2})\,(2\sqrt{11} - 5\sqrt{2})$

(٥) $(\sqrt{\text{ا}} + 2\sqrt{\text{ب}})\,(\sqrt{\text{ا}} - 2\sqrt{\text{ب}})$

(٦) $(3\text{ح} - 2\sqrt{\text{س}})\,(3\text{ح} + 2\sqrt{\text{س}})$

(٧) $(\sqrt{\text{ا}+\text{س}} - \sqrt{\text{ا}})\,(\sqrt{\text{ا}+\text{س}} + \sqrt{\text{ا}})$

(٨) $(\sqrt{2\text{ط}+3\text{ن}} - 2\sqrt{\text{ن}})\,(\sqrt{2\text{ط}+3\text{ن}} + 2\sqrt{\text{ن}})$

(٩) $(\sqrt{\text{ا}+\text{س}} + \sqrt{\text{ا}-\text{س}})\,(\sqrt{\text{ا}+\text{س}} - \sqrt{\text{ا}-\text{س}})$

(١٠) $(5\sqrt{\text{س}^2 - 3\text{ص}^2} + 17)\,(5\sqrt{\text{س}^2 - 3\text{ص}^2} - 17)$

(١١) $29 \div (11 + 3\sqrt{7})$

(١٢) $17 \div (3\sqrt{7} + 2\sqrt{3})$

(١٣) $(3\sqrt{2} - 1) \div (3\sqrt{2} + 1)$

(١٤) $(2\sqrt{3} + 7\sqrt{2}) \div (5\sqrt{3} - 4\sqrt{2})$

(١٥) $(2\text{س} - \sqrt{\text{س}\,\text{ص}}) \div (2\sqrt{\text{س}\,\text{ص}} - \text{ص})$

(١٦) $(3 + \sqrt{5})\,(\sqrt{5} - 2) \div (5 - \sqrt{5})$

(١٧) $\dfrac{\sqrt{\text{ا}}}{\sqrt{\text{ا}} - \sqrt{\text{س}}} \div \dfrac{\sqrt{\text{ا}} + \sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}}$

(١٨) $\dfrac{2\sqrt{15} + 8}{5 + \sqrt{15}} \div \dfrac{8\sqrt{3} - 6\sqrt{5}}{5\sqrt{3} - 3\sqrt{5}}$

حوّل مقامات الكسور الآتية إلى كميات جذرية

(١٩) $\frac{٢٥\sqrt{٣} - ٤\sqrt{٢}}{٧\sqrt{٣} - ٥\sqrt{٢}}$

(٢٠) $\frac{١٠\sqrt{٦} - ٢\sqrt{٧}}{٣\sqrt{٦} + ٢\sqrt{٧}}$

(٢١) $\frac{\sqrt{٧} + \sqrt{٢}}{٩ + ٢\sqrt{١٤}}$

(٢٢) $\frac{٢٠\sqrt{٣} + ٣\sqrt{٢}}{٥ + ٢\sqrt{٦}}$

(٢٣) $\frac{ص^{٢}}{س + \sqrt{س^{٢} - ص^{٢}}}$

(٢٤) $\frac{س^{٢}}{\sqrt{س^{٢} + ا^{٢}} + ا}$

(٢٥) $\frac{\sqrt{١ + س^{٢}} - \sqrt{١ - س^{٢}}}{\sqrt{١ + س^{٢}} + \sqrt{١ - س^{٢}}}$

(٢٦) $\frac{٢\sqrt{ا + ب} + ٣\sqrt{ا - ب}}{٢\sqrt{ا + ب} - \sqrt{ا - ب}}$

(٢٧) $\frac{\sqrt{٩ + س^{٢}} - ٣}{\sqrt{٩ + س^{٢}} + ٣}$

(٢٨) $\frac{٣ + \sqrt{٦}}{٥\sqrt{٣} - ٢\sqrt{١٢} - \sqrt{٣٢} + \sqrt{٥٠}}$

إذا علم أن $\sqrt{٢} = ١{,}٤١٤٢١$ ، $\sqrt{٣} = ١{,}٧٣٢٠٥$ ، $\sqrt{٥} = ٢{,}٢٣٦٠٧$
فاستخرج قيمة ما يأتى بحيث يكون فى كل ناتج أربعة أرقام عشرية

(٢٩) $\frac{١}{٢ + \sqrt{٣}}$

(٣٠) $\frac{٣ + \sqrt{٥}}{\sqrt{٥} - ٢}$

(٣١) $\frac{\sqrt{٥} + \sqrt{٣}}{٤ + \sqrt{١٥}}$

(٣٢) $\frac{\sqrt{٥} - ٢}{٩ - ٤\sqrt{٥}}$

(٣٣) $\frac{٧\sqrt{٥} + ١٥}{\sqrt{٥} - ١} \times \frac{\sqrt{٥} - ٢}{٣ + \sqrt{٥}}$

(٣٤) $(٢ - \sqrt{٣})(٧ - ٤\sqrt{٣}) \div (٣\sqrt{٣} - ٥)$

بند ٢٧٣ — الجذر التربيعى لكمية جذرية لا يمكن أن يساوى مقدارا جبريا بعضه كمية جذرية وبعضه جذر تربيعى أصم

لأنه إذا أمكن ذلك لكان $\sqrt{ب} = ا + \sqrt{م}$ (بفرض أن ب كمية جذرية ، $\sqrt{م}$ جذر أصم)

وبتربيع الطرفين يحدث $ب = ا^{٢} + م + ٢ا\sqrt{م}$

$$\therefore \sqrt{م} = \frac{ب - ا^{٢} - م}{٢ا}$$

أى أن الجذر الأصم = كمية جذرية وهو مستحيل

بند ٢٧٤ — إذا كان $س + \sqrt{ص} = ا + \sqrt{ب}$ على فرض أن كلا من س ، ا كمية جذرية وأن كلا من $\sqrt{ص}$ ، $\sqrt{ب}$ كمية غير جذرية صماء فنستنتج من ذلك أن س = ا ، ص = ب

لأنه إن لم تكن س = ا وفرضنا أنها = ا + م

يكون $ا + م + \sqrt{ص} = ا + \sqrt{ب}$

أى أن $\sqrt{ب} = م + \sqrt{ص}$ وهذا مستحيل (بند ٢٧٣)

فإذن س = ا

وينتج من ذلك أن ص = ب

ومن حيث إن $س + \sqrt{ص} = ا + \sqrt{ب}$

نستنتج أيضا أن $س - \sqrt{ص} = ا - \sqrt{ب}$

بند ٢٧٥ — يظهر من البند المتقدم أنه فى أى معادلة موضوعة بالصورة

$س + \sqrt{ص} = ا + \sqrt{ب}$ .... (١)

يمكنا أن نكون منها متساويتين إحداهما طرفاها المقادير غير الجذرية والأخرى طرفاها المقادير الجذرية بمعنى أن المعادلة (١) هى فى الحقيقة معادلتان مستقلة إحداهما عن الأخرى وهما س = ا ، ص = ب ولا يصح هذا الاعتبار إلا إذا كانت كل من $\sqrt{ص}$ ، $\sqrt{ب}$ مقادير غير جذرية صماء

بند ٢٧٦ — إذا كان $\sqrt{ا + \sqrt{ب}} = \sqrt{س} + \sqrt{ص}$

كان أيضا $\sqrt{ا - \sqrt{ب}} = \sqrt{س} - \sqrt{ص}$

(البرهان) بتربيع طرفى المتساوية الأولى ينتج أن $ا + \sqrt{ب} = س + ٢\sqrt{س ص} + ص$

∴ ا = س + ص ، $\sqrt{ب} = ٢\sqrt{س ص}$ بند ٢٧٥

فيكون إذن $ا - \sqrt{ب} = س - ٢\sqrt{س ص} + ص$

، $\sqrt{ا - \sqrt{ب}} = \sqrt{س} - \sqrt{ص}$

بند ٢٧٧ — لايجاد الجذر التربيعى للمقدار $ا + \sqrt{ب}$

نفرض أن $\sqrt{ا + \sqrt{ب}} = \sqrt{س} + \sqrt{ص}$

فعلى مقتضى ماجاء بالبند السابق يكون س + ص = ا .... (١)

، $٢\sqrt{س ص} = \sqrt{ب}$ .... (٢)

∴ (س − ص) = (س + ص) − ٤ س ص

$= ا^{٢} - ب$ من المعادلتين ١ ، ٢

∴ $س - ص = \sqrt{ا^{٢} - ب}$

وبضم هذه المعادلة الأخيرة إلى المعادلة (١) نجد ان

$$س = \frac{١ + \sqrt{١^٢ - ب}}{٢}$$

$$، \quad ص = \frac{١ - \sqrt{١^٢ - ب}}{٢}$$

$$\therefore \sqrt{١ + \sqrt{ب}} = \sqrt{\frac{١ + \sqrt{١^٢ - ب}}{٢}} + \sqrt{\frac{١ - \sqrt{١^٢ - ب}}{٢}}$$

بند ٢٧٨ — نرى من مقدارى س ، ص اللذين أوجدناهما أن كلا منهما جذر أصم مركب ما لم تكن $١^٢ - ب$ مربعا كاملا وعلى ذلك فالطريقة التى أوردناها ببند ٢٧٧ لاتفيد فى استخراج الجذر التربيعى للقدار $١ + \sqrt{ب}$ إلا إذا كانت $١^٢ - ب$ مربعا كاملا

(مثال) لايجاد الجذر التربيعى للكمية $١٦ + ٢ \sqrt{٥٥}$

نفرض أن $\sqrt{١٦ + ٢\sqrt{٥٥}} = \sqrt{س} + \sqrt{ص}$

فيكون $١٦ + ٢\sqrt{٥٥} = س + ٢\sqrt{س ص} + ص$

$\therefore$ $س + ص = ١٦$ .... (١)

، $٢\sqrt{س ص} = ٢\sqrt{٥٥}$ .... (٢)

$\therefore$ $(س - ص) = (س + ص)^٢ - ٤ س ص$

$= ١٦^٢ - ٤ \times ٥٥$ من (١) ، (٢)

$= ٤ \times ٩$

$\therefore$ $س - ص = \pm ٦$ .... (٣)

ومن (١) ، (٣) نجد أن $س = ١١$ أو ٥ ، $ص = ٥$ أو ١١

فالجذر المطلوب إذن $\sqrt{١١} + \sqrt{٥}$

وبالطريقة عينها يمكننا أن نبرهن على أن $\sqrt{١٦ - ٢\sqrt{٥٥}} = \sqrt{١١} - \sqrt{٥}$

(ملاحظة) من حيث إن كل كمية لها جذران تربيعيان متساويان فى القيمة ومتضادّان فى العلامة كان ينبغى على هذا أن نقول

الجذر التربيعى للكمية $١٦ + ٢\sqrt{٥٥} = \pm(\sqrt{١١} + \sqrt{٥})$

والجذر التربيعى للكمية $١٦ - ٢\sqrt{٥٥} = \pm(\sqrt{١١} - \sqrt{٥})$

ولكن يكتفى عادة بالقيمة الموجبة وعلى ذلك فانه عند ما نفرض أن

$$\sqrt{١ - \sqrt{ب}} = \sqrt{س} - \sqrt{ص}$$

يفهم من ذلك أن $س$ أكبر من $ص$ فليس إذن من الضرورى فى حل الأمثلة الرقمية استعمال العلامة المزدوجة عند مانحصل على المعادلة المقابلة للعادلة (٣) فى المثال السابق

بند ٢٧٩ — إذا كانت الكمية ذات الحدّين المراد استخراج جذرها تتركب من جذرين أصمين تربيعيين يتبع فى الحل الطريقة الآتية

لايجاد الجذر التربيعى للكمية $\sqrt{١٧٥} - \sqrt{١٤٧}$

نقول إن $\sqrt{١٧٥} - \sqrt{١٤٧} = \sqrt{٧}\left(\sqrt{٢٥} - \sqrt{٢١}\right) = \sqrt{٧}\left(٥ - \sqrt{٢١}\right)$

$$\therefore \sqrt{\sqrt{١٧٥} - \sqrt{١٤٧}} = \sqrt[٤]{٧} \times \sqrt{٥ - \sqrt{٢١}}$$

وبمتابعة العمل كما فى البند السابق نجد أن

$$\sqrt{٥ - \sqrt{٢١}} = \sqrt{\tfrac{٧}{٢}} - \sqrt{\tfrac{٣}{٢}}$$

$$\therefore \sqrt{\sqrt{١٧٥} - \sqrt{١٤٧}} = \sqrt[٤]{٧}\left(\sqrt{\tfrac{٧}{٢}} - \sqrt{\tfrac{٣}{٢}}\right)$$

بند ٢٨٠ — يتيسر غالبا استخراج الجذر التربيعى لمقدار غير جذرى ذى حدّين بمجرد النظر إليه

(مثال ١) لايجاد الجذر التربيعى للمقدار $١١ + ٢\sqrt{٣٠}$

كل ما يلزم إجراؤه هو البحث عن كميتين مجموعهما ١١ وحاصل ضربهما ٣٠

وعلى ذلك يكون $١١ + ٢\sqrt{٣٠} = ٦ + ٥ + ٢\sqrt{٦ \times ٥}$

$$= \left(\sqrt{٦} + \sqrt{٥}\right)^{٢}$$

$$\therefore \sqrt{١١ + ٢\sqrt{٣٠}} = \sqrt{٦} + \sqrt{٥}$$

(مثال ٢) لايجاد الجذر التربيعى للمقدار $٥٣ - ١٢\sqrt{١٠}$

(أولا) نكتب المقدار بصورة يكون فيها معامل الجذر الأصم ٢ هكذا

$$٥٣ - ١٢\sqrt{١٠} = ٥٣ - ٢\sqrt{٣٦٠}$$

وحينئذ يبقى علينا أن نوجد كميتين حاصل ضربهما ٣٦٠ ومجموعها ٥٣ وهما ٨ ، ٤٥

فاذن $٥٣ - ١٢\sqrt{١٠} = ٤٥ + ٨ - ٢\sqrt{٤٥ \times ٨}$

$$= \left(\sqrt{٤٥} - \sqrt{٨}\right)^{٢}$$

$$\therefore \sqrt{٥٣ - ١٢\sqrt{١٠}} = \sqrt{٤٥} - \sqrt{٨}$$

$$= ٣\sqrt{٥} - ٢\sqrt{٢}$$

(تمارين ٣١ و)

أوجد الجذر التربيعي لكل من المقادير غير الجذرية ذات الحدّين الآتية

(١) $7 - 2\sqrt{10}$	(٦) $18 - 8\sqrt{5}$	(١١) $4\frac{1}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{3}$
(٢) $13 + 2\sqrt{30}$	(٧) $41 - 24\sqrt{2}$	(١٢) $16 + 5\sqrt{7}$
(٣) $8 - 2\sqrt{7}$	(٨) $83 + 12\sqrt{35}$	(١٣) $\sqrt{27} + 2\sqrt{6}$
(٤) $5 + 2\sqrt{6}$	(٩) $47 - 4\sqrt{33}$	(١٤) $\sqrt{32} - \sqrt{24}$
(٥) $75 + 12\sqrt{21}$	(١٠) $2\frac{1}{4} + \sqrt{5}$	(١٥) $3\sqrt{5} + \sqrt{40}$

أوجد الجذر الرابع لكل من المقادير غير الجذرية ذات الحدّين الآتية

(١٦) $17 + 12\sqrt{2}$	(١٨) $\frac{3}{2}\sqrt{5} + 3\frac{1}{2}$	(٢٠) $49 - 20\sqrt{6}$
(١٧) $56 + 24\sqrt{5}$	(١٩) $14 + 8\sqrt{3}$	(٢١) $248 + 32\sqrt{60}$

استخرج بمجرّد النظر قيمة كل من المقادير الآتية

(٢٢) $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$	(٢٥) $\sqrt{19 + 8\sqrt{3}}$	(٢٨) $\sqrt{11 + 4\sqrt{6}}$
(٢٣) $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$	(٢٦) $\sqrt{8 + 2\sqrt{15}}$	(٢٩) $\sqrt{15 - 4\sqrt{14}}$
(٢٤) $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$	(٢٧) $\sqrt{9 - 2\sqrt{14}}$	(٣٠) $\sqrt{29 + 6\sqrt{22}}$

المعادلات المشتملة على جذور صماء

بند ٢٨١ — يحدث أحيانا أن يطلب حل معادلات فيها المجاهيل داخلة تحت علامة الجذر ومثل هذه المعادلات كثيرة الأنواع ويحتاج فى حلها غالبا إلى استعمال شىء من التحيل وسنقتصر هنا على البسيط من هذه المعادلات وهى ما يمكن حلها على وجه الاجمال بطريقة تحويل أحد الحدود التى تحت علامة الجذر إلى أحد طرفى المعادلة على شرط أن يكون هذا الحدّ بمفرده ثم يربع الطرفان وبذلك يمكن رفع علامة الجذر والتخلص منها وبتكرار هذه العملية يمكنا أن نتخلص من جميع الجذور الواحد بعد الآخر

(مثال ١) لحل $2\sqrt{\text{س}} - \sqrt{4\text{س} - 11} = 1$

نقول إنه بالنقل يحدث أن $2\sqrt{\text{س}} - 1 = \sqrt{4\text{س} - 11}$

نربع الطرفين فيحدث أن $4\text{س} - 4\sqrt{\text{س}} + 1 = 4\text{س} - 11$

أى $4\sqrt{\text{س}} = 12$.

$\therefore \sqrt{\text{س}} = 3$

$\therefore \text{س} = 9$

(مثال ٢) حل $٢ + \sqrt[3]{س - ٥} = ١٣$

نقول إنه بالنقل نجد أن $\sqrt[3]{س - ٥} = ١١$

نكعب الطرفين فنجد أن $س - ٥ = ١٣٣١$

∴ $س = ١٣٣٦$

(مثال ٣) حل $\sqrt{س + ٥} + \sqrt{٣س + ٤} = \sqrt{١٢س + ١}$

نقول إنه بتربيع الطرفين يحدث أن

$$س + ٥ + ٣س + ٤ + ٢\sqrt{(س + ٥)(٣س + ٤)} = ١٢س + ١$$

وبالنقل ثم القسمة على ٢ يحدث أن

$$\sqrt{(س + ٥)(٣س + ٤)} = ٤س - ٤ \quad \ldots\ldots\ldots \quad (١)$$

وبالتربيع يحدث أن $(س + ٥)(٣س + ٤) = ١٦س^{٢} - ٣٢س + ١٦$

أو $١٣س^{٢} - ٥١س - ٤ = ٠$

$$(س - ٤)(١٣س + ١) = ٠$$

∴ $س = ٤$ أو $-\frac{١}{١٣}$

إذا حققنا المعادلة بوضع قيمة المجهول بدله فى المعادلة الأصلية نجد أن المعادلة تصح بوضع ٤ بدل س ولا تصح بوضع $-\frac{١}{١٣}$ بدل س ولكن إذا غيرنا علامة الجذر الثانى فى المعادلة هكذا $\sqrt{س + ٥} - \sqrt{٣س + ٤} = \sqrt{١٢س + ١}$ نجد إنها تصح إن وضع $-\frac{١}{١٣}$ بدل س

وبتربيع طرفى المعادلة بعد تغيير الاشارة نجد بعد الاختصار أن

$$-\sqrt{(س + ٥)(٣س + ٤)} = ٤س - ٤ \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٢)$$

وبمقارنة المعادلتين (١) ، (٢) نجد أنه عند ماتربع طرفى كل منهما تكون المعادلتان الناتجتان اللتان من الدرجة الثانية متساويتين وجذرا كل منهما عين جذرى الأخرى وهما ٤ ، $-\frac{١}{١٣}$

يظهر من ذلك أنه إذا استوجب حل المعادلة تربيع طرفيها لا يمكننا أن نعلم أى المقادير التى أوجدناها للمجهول تصح به المعادلة الأصلية إلا بعد التجربة

ولكى يمكن تحقيق المعادلة بجميع المقادير التى تستخرج للمجهول ينبغى أن نعتبر فى التحقيق علامتى الجذور

(تمارين ٣١ ن)

حل المعادلات الآتية

(١) $\sqrt{س - ٥} = ٣$

(٢) $\sqrt[3]{٤س - ٧} = ٥$

(٣) $٧ - \sqrt{س - ٤} = ٣$

(٤) $١٣ - \sqrt[3]{٥س - ٤} = ٧$

(٥) $\sqrt{٥س - ١} = ٢\sqrt{س} + ٣$

(٦) $٢\sqrt{٣ - ٧س} - ٣\sqrt{٨س - ١٢} = ٠$

(٧) $٢\sqrt[٣]{٥س - ٣٥} = ٥\sqrt[٣]{٢س - ٧}$

(٨) $\sqrt{٩س^{٢} - ١١س - ٥} = ٣س - ٢$

(٩) $\sqrt[٤]{٢س + ١١} = \sqrt{٥}$

(١٠) $\sqrt{٤س^{٢} - ٧س + ١} = ٢س - ١\frac{٤}{٥}$

(١١) $\sqrt{س + ٢٥} = ١ + \sqrt{س}$

(١٢) $\sqrt{٨س + ٣٣} - ٣ = ٢\sqrt{٢س}$

(١٣) $\sqrt{س + ٣} + \sqrt{س} = ٥$

(١٤) $١٠ - \sqrt{٢٥ + ٩س} = ٣\sqrt{س}$

(١٥) $\sqrt{س - ٤} + ٣ = \sqrt{س + ١١}$

(١٦) $\sqrt{٩س - ٨} = ٣\sqrt{س + ٤} - ٢$

(١٧) $\sqrt{٤س + ٥} - \sqrt{س} = \sqrt{س + ٣}$

(١٨) $\sqrt{٢٥س - ٢٩} - \sqrt{٤س - ١١} = ٣\sqrt{س}$

(١٩) $\sqrt{٨س + ١٧} - \sqrt{٢س} = \sqrt{٢س + ٩}$

(٢٠) $\sqrt{٣س - ١١} + \sqrt{٣س} = \sqrt{١٢س - ٢٣}$

(٢١) $\sqrt{١٢س - ٥} - \sqrt{٣س - ١} = \sqrt{٢٧س - ٢}$

(٢٢) $\sqrt{س + ٣} + \sqrt{س + ٨} - \sqrt{٤س + ٢١} = ٠$

(٢٣) $\sqrt{س + ٢} + \sqrt{٤س + ١} - \sqrt{٩س + ٧} = ٠$

(٢٤) $\sqrt{س + ٤أب} = ٢أ + \sqrt{س}$

(٢٥) $\sqrt{س} + \sqrt{٤أ + س} = ٢\sqrt{ب + س}$

(٢٦) $\sqrt{أ - س} + \sqrt{ب + س} = \sqrt{أ} + \sqrt{ب}$

(٢٧) $٥\sqrt[٣]{٧٠س + ٢٩} = ٩\sqrt[٣]{١٤س - ١٥}$

(٢٨) $\sqrt[٣]{س^{٣} - ٣س^{٢} + ٧س - ١١} = س - ١$

(٢٩) $\sqrt[٣]{٨س^{٣} + ١٢س^{٢} + ١٢س - ١١} = ٢س + ١$

(٣٠) $\sqrt[٣]{١ + س} + \sqrt[٣]{١ - س} = \sqrt[٣]{٢}$

بند ٢٨٢ — إذا كانت الجذور موضوعة على صورة كسور فى معادلة يجب محو الكسور بالطريقة المعتادة مع استعمال القواعد التى مرت فى هذا الباب لربط المقادير غير الجذرية بعضها ببعض

(مثـال ١) حل $\frac{٦\sqrt{س} - ١١}{٣\sqrt{س}} = \frac{٢\sqrt{س} + ١}{\sqrt{س} + ٦}$

نقول إنه بالضرب التبادلى نجد أن

$$٦س + ٢٥\sqrt{س} - ٦٦ = ٦س + ٣\sqrt{س}$$

أى أن $٢٥\sqrt{س} - ٣\sqrt{س} = ٦٦$

$$٢٢\sqrt{س} = ٦٦$$

$$\sqrt{س} = ٣$$

$$\therefore \quad س = ٩$$

(مثال ٢) لحل $\sqrt{٩ + ٢س} - \sqrt{٢س} = \dfrac{٥}{\sqrt{٩ + ٢س}}$

نقول إنه بعد محو الكسور يحدث أن $٩ + ٢س - \sqrt{٢س(٩ + ٢س)} = ٥$

أى أن $٤ + ٢س = \sqrt{٢س(٩ + ٢س)}$

وبالتربيع يحدث أن $١٦ + ١٦س + ٤س^{٢} = ١٨س + ٤س^{٢}$

$$\therefore \quad ١٦ = ٢س$$

$$س = ٨$$

(تمارين ٣١ ح)

حل المعادلات الآتية

(١) $\dfrac{٦\sqrt{س} - ٢١}{٣\sqrt{س} - ١٤} = \dfrac{٨\sqrt{س} - ١١}{٤\sqrt{س} - ١٣}$

(٢) $\dfrac{٩\sqrt{س} - ٢٣}{٣\sqrt{س} - ٨} = \dfrac{٦\sqrt{س} - ١٧}{٢\sqrt{س} - ٦}$

(٣) $\dfrac{\sqrt{س} + ٣}{\sqrt{س} - ٢} = \dfrac{٣\sqrt{س} - ٥}{٣\sqrt{س} - ١٣}$

(٤) $٢ - \dfrac{\sqrt{س} + ٣}{\sqrt{س} + ٢} = \dfrac{\sqrt{س} + ٩}{\sqrt{س} + ٧}$

(٥) $\dfrac{٢\sqrt{س} - ١}{٢\sqrt{س} + \frac{٤}{٣}} = \dfrac{\sqrt{س} - ٢}{\sqrt{س} - \frac{٤}{٣}}$

(٦) $\dfrac{٦\sqrt{س} - ٧}{\sqrt{س} - ١} - ٥ = \dfrac{٧\sqrt{س} - ٢٦}{٧\sqrt{س} - ٢١}$

(٧) $\dfrac{١٢\sqrt{س} - ١١}{٤\sqrt{س} - ٤\frac{٢}{٣}} = \dfrac{٦\sqrt{س} + ٥}{٢\sqrt{س} + \frac{٢}{٣}}$

(٨) $\sqrt{١ + س} + \sqrt{س} = \dfrac{٢}{\sqrt{١ + س}}$

(٩) $\sqrt{س - ١} + \sqrt{س} = \dfrac{٢}{\sqrt{س}}$

(١٠) $\sqrt{س} - \sqrt{س - ٨} = \frac{٢}{\sqrt{س - ٨}}$

(١١) $\sqrt{س + ٥} + \sqrt{س} = \frac{١٠}{\sqrt{س}}$

(١٢) $٢\sqrt{س} - \sqrt{٤س - ٣} = \frac{١}{\sqrt{٤س - ٣}}$

(١٣) $٣\sqrt{س} = \frac{٨}{\sqrt{٩س - ٣٢}} + \sqrt{٩س - ٣٢}$

(١٤) $\sqrt{س} - ٧ = \frac{١}{\sqrt{س} + ٧}$

(١٥) $(\sqrt{س} + ١١)(\sqrt{س} - ١١) + ١١٠ = ٠$

(١٦) $٢\sqrt{س} = \frac{١٢ - ٦\sqrt{س}}{٢\sqrt{س} - ٣}$

(١٧) $٣\sqrt{س} - ١ = \frac{٥}{٣\sqrt{س} + ٧} + ٦$

(١٨) $\frac{س - ١}{\sqrt{س} - ١} = ٣ + \frac{\sqrt{س} + ١}{٢}$

(١٩) $\frac{١}{١ - س} + \frac{١}{\sqrt{س} + ١} + \frac{١}{\sqrt{س} - ١} = ٠$

(٢٠) $٢ = \frac{\sqrt{٢ + س} + \sqrt{٢ - س}}{\sqrt{٢ + س} - \sqrt{٢ - س}}$

(٢١) $\frac{٢س - ٣}{\sqrt{س - ٢} + ١} = ٢\sqrt{س - ٢} - ١$

(٢٢) $\frac{٢}{س - ٦ + \sqrt{س}} + \frac{٣}{\sqrt{س} - ٢} = \frac{٤}{\sqrt{س} + ٣}$

(المطبعة الاميرية ١٧٣١س و٧٦٦٣ض/١٩٢٤/١١٥٠٠)


Bibliotheca Alexandrina
04667387